ΦSX

Theoretische Physik I
Klassische Mechanik

Peter E. Blöchl

Achtung! Der Mathematische Anhang ist noch in Bearbeitung

Institut für Theoretische Physik; Technische Universität Clausthal;
D-38678 Clausthal-Zellerfeld; Deutschland;
http://www.pt.tu-clausthal.de/atp/

keine Panik!

[1]

[1] zum Titelblatt: Wofür steht Φ SX? Erstens hört sich Φ-S-X wie "Physics" an und zweitens stehen die Symbole für die drei Grundpfeiler der Theoretischen Physik: X ist das Symbol für eine Teilchenkoordinate und steht für die Klassische Mechanik, Φ ist das Symbol für eine Wellenfunktion und steht für die Quantenmechanik und S ist das Symbol für Entropie und steht für die Statistische Physik

Vorwort

Diese Mitschrift entspricht einer Vorlesung von 56 akademischen Stunden oder 4 Semesterwochenstunden. Die Vorlesung war begleitet von Hausaufgaben, die in 2 Semesterwochenstunden besprochen wurden.

Fehler lassen sich nicht ganz vermeiden. Im gegenwärtigen Stadium der Mitschrift ist noch besondere Vorsicht geboten. Es sollten daher weitere Bücher zur Hand genommen werden. Für Hinweise sind wir sehr dankbar.

In dieser Mitschrift wurde besonderes Augenmerk auf ausführliche Ableitungen gelegt. Ein Anfänger sollte mit Hilfe dieser Mitschrift und einem Blatt Papier und Bleistift sämtliche Ableitungen nachvollziehen können. Fortgeschrittene sollten die meisten Schritte anhand der Mitschrift nachvollziehen können. Falls sich dennoch logische Sprünge eingeschlichen haben sollten, bitte ich um einen Hinweis.

Mein besonderer Dank gilt Sebastian Mathes, der eine erste Mitschrift anhand der Vorlesung und meiner in feinstem hieroglyphisch verfassten Notizen angefertigt hat. Des Weiteren möchte ich die emsige Hilfe von Christian Walther und Christian Breyer erwähnen, die durch sorgfältiges Korrekturlesen und Nachrechnen zu einer lesbaren und weitgehend richtigen Form beigetragen haben. Ich möchte mich auch bei den Studenten bedanken, welche die Vorlesung im WS 2002/2003 und im WS 2004/2005 gehört haben. Mit ihren Hinweisen während und nach der Vorlesung haben sie einen wesentlichen Beitrag geleistet.

Peter Blöchl

Contents

Chapter 1

Einleitung (1h)

1.1 Ziele der theoretischen Physik

Dies ist der erste Kurs im Kanon der Theoretischen Physik in der Physikausbildung. Deshalb wollen wir an dieser Stelle die Ziele dieses Kanons zu reflektieren.

Was also sind die Ziele der Grundausbildung in der theoretischen Physik?

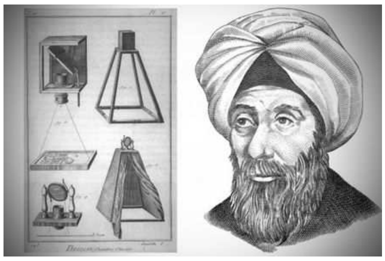


Abb. 1.1: Ibn Al-Haytham, 965-1040, Persien/ Ägypten. Wird als erster theoretischer Physiker betrachtet. Einer der ersten Vertreter der wissenschaftlichen Methodik.

- Die Grundlage unseres physikalischen Weltbildes soll möglichst geschlossen vermittelt werden.
- Physiker sollen sich im Berufsleben besonders dort bewähren, wo es keine vorgefertigen Lösungsmethoden gibt. Da sie sich häufig am Grenzbereich unseres Wissens bewegen, müssen sie erkennen, wann bestimmte Theorien noch anwendbar sind und wann sie zusammenbrechen.
- Wenn die Theorien, welche für eine Beschreibung verwendet werden, zusammenbrechen, sollten Physiker fähig sein, eine neue Theorie zu erstellen. Es ist also eines der Hauptziele der Ausbildung in der theoretischen Physik, die Studenten an die Theoriebildung heranzuführen. Diese Qualifikationen sind wahrscheinlich die Ursache dafür, dass Physiker häufig auch außerhalb ihres eigenen Faches erfolgreich sind.
- Während in den Vorlesungen der Experimentalphysik gewisse Zusammenhänge, ausgedrückt durch komplizierte Formeln, als gegeben angenommen werden, sollen diese hier auf wenige Grundannahmen zurückgeführt werden. Dies führt auf ein weiteres Ziel der Ausbildung der Theoretischen Physik: Sie soll einen roten Faden durch die Physik liefern. Viele Studenten haben gegen Ende dieses Kanons den Eindruck, dass sich alles wie ein Puzzle zusammenfügt.
- Ein weiteres Ziel ist natürlich auch ein Verbreitern und Festigen der gängigsten mathematischen Methoden, die in der Physik gebräuchlich sind.

Unser naturwissenschaftliches Weltbild fußt auf einer gewissen Herangehensweise an Probleme, mehr noch als auf gewisse Naturgesetze. Ich nenne sie die **analytisches Denkweise**. In der Theoretischen Physik soll diese analytische Denkweise weiterentwickelt werden. Die wesentlichen Elemente der analytischen Denkweise sollen im Folgenden dargestellt werden.

1. **Kritische Analyse:** Am Anfang steht eine kritische Analyse der vorliegenden Beobachtungen. Man stellt sich dabei die folgenden Fragen:

- Was wurde beobachtet?
- Was ist das Wesentliche einer Beobachtung für das vorliegende Problem?
- Was sind die Ungenauigkeiten eines Experiments?
- Was sind die Annahmen, welche der Interpretation der Resultate zugrunde liegen?

2. **Theoriebildung:** Nun macht man sich eine Theorie, also ein mathemtisches Modell der Zusammenhänge, welche mit allen Beobachtungen im Rahmen ihrer Genauigkeit übereinstimmen.
    - Erkenne und nutze Analogien
    - Greife auf bekannte Problemlösungsstrategien zurück
    - Nutze die Denkmuster alter Meister
    - Kreativität

3. **Vorhersagen:** Eine Theorie ist nur dann sinnvoll, wenn sie überprüfbare Vorhersagen erlaubt. Es werden also nun die Lösungen der Mathematischen Modelle gesucht und deren Bedeutung für die Realität erklärt. Hierbei geht unter anderem um
    - Mathematische Lösungstechniken,
    - Näherungsverfahren und
    - die kritische Analyse von Vereinfachungen.

4. **Verifizierung:** Die Vorhersagen werden nun anhand neuer Experimente überprüft. Laut dem Wissenschaftsphilosophen Karl Popper[1] wird unser Weltbild als Realität angenommen, bis es experimentell widerlegt wird. Widerspricht ein Experiment den Aussagen der Theorie, muss diese erweitert oder angepasst werden. Deshalb beschränkt sich unser physikalisches Weltbild auf reproduzierbare und überprüfbare Tatsachen. Religion und, in einem gewissen Maß, subjektive Gefühle sind deshalb nicht Gegenstand der Physik. Physik verneint sie aber auch nicht.

1.2 Kanon der theoretischen Physik

Der Kanon der Theoretischen Physik ist wie folgt aufgebaut:

1. **Klassische Mechanik:**

    Die Klassische Mechanik könnte auch Punktdynamik genannt werden. Als Punkte betrachten wir zum Beispiel einen Volleyball, einen Planeten, einen Sateliten, ein Leitungselektronen in einem Metall oder Halbleiterbaulement. Anstatt die Koordinaten im Raum anzugeben, können wir einen Punkt auch allgemeiner als beliebiges n-Tupel von Zahlen auffassen. So können wir in der Meteorologie die Temperatur, den Druck und die Luftfeuchtigkeit zu einem n-Tupel zusammenfassen und die zeitliche Entwicklung dieser Parameter studieren.

    Ein spezielles Kapitel ist die Einführung in Einsteins Spezielle Relativitätstheorie.

2. **Elektrodynamik:**

    Die elektromagnetische Wechselwirkung ist die bedeutendste der vier Naturkräfte, zu denen auch die Gravitation, die Schwache und der Starke Kraft gehören. Während die Gravitation unsere alltägliche Erfahrungswelt bestimmt, dominiert die elektromagnetische Kraft auf kleineren Dimensionen. Erst innerhalb des Atomkerns sind die beiden anderen Naturkräfte von Bedeutung. Mit Ausnahme der Gravitation ist die Beschreibung der anderen Naturkräfte dem Vorbild der elektromagnetischen Kraft nachgebildet. Insbesondere stellt die Elektrodynamik das erste

[1] Karl R. Popper, 1902-1994, Österreichisch-Britischer Philosph. Hauptwerk "Logik der Forschung".

Beispiel für eine Vereinheitlichung von Naturkräften dar: Magnetismus und Elektrizität wurden ursprünglich als eigenständige Wechselwirkungen aufgefasst.

Im Gegensatz zur Klassischen Mechanik befasst sich die Elektrodynamik mit Feldern, also Funktionen von Raum und Zeit.

Ein spezielles Kapitel ist die Spezielle Relativitätstheorie von Feldern, welche uns erlaubt, die Grundlagen der Methoden der Elementarteilchenphysik zu demonstrieren.

3. **Quantentheorie:**

   Auf kleinen Längenskalen verwischt sich der Unterschied zwischen Feldern und Punkten. Das Teilchen- und das Wellenbild werden vereinheitlicht. Die Quantentheorie war die zweite große Umwälzung des naturwissenschaftlichen Weltbildes im 20. Jahrhundert. Die klassische Physik wie die klassische Mechanik und die Elektrodynamik sind Vereinfachungen der Quantenmechanik, die allerdings in unserer makroskopischen Welt sehr genaue Vorhersagen liefern. Die Quantentheorie ist die Grundlage der Chemie, der Laserphysik, der Festkörperphysik. Angeblich geht etwa ein Viertel des Bruttosozialprodukts auf Entwicklungen zurück, die direkt oder indirekt durch die Quantentheorie ermöglicht wurden.[1]

4. **Statistische Physik:**

   Die vollständige Kontrolle der Parameter aller Teilchen eines makroskopischen Systems ist undenkbar. Dennoch ist eine genaue Vorhersage makroskopischer Eigenschaften sehr wohl möglich. In der Statistischen Physik werden Begriffe wie Temperatur, Entropie etc. eingeführt. Die Statistische Physik bildet die Grundlage der Thermodynamik. Die Statistische Physik sagt zum Beispiel Phänomene wie die Bose-Einstein Kondensation, Supraleitung, die Fermiverteilung vorher.

1.3 Einige Ratschläge des Authors an seine Leser

1. Lerne nicht nur zu rechnen, sondern beobachte auch die Denkmuster.
   - → Konzentration auf das Wesentliche.
   - → Vermeide das reine Auswendiglernen, sondern versuche den Inhalt einer Formel zu durchdringen. (In welchen Situationen ist sie anwendbar? Aus welchen Annahmen folgt sie? etc.) Man sollte natürlich dennoch die wichtigsten Formeln kennen, um nicht ständig nachschlagen zu müssen.
2. Wende das Wissen an! Das eigenständige Lösen von Übungsaufgaben ist von elementarer Bedeutung für den Lernerfolg! Das ist die wohl unangenehmste Nachricht, die ich meinen Lesern mitgeben muss.
3. Nicht von der Mathematik blenden lassen: Die Physik ist die Grenze zwischen der Mathematik und der Realität. Es ist hilfreich, sich immer den Zusammenhang des Gelernten mit dem Alltagsleben zu vergegenwärtigen. Zugegebenermaßen ist dieser Zusammenhang nicht immer offensichtlich. Dennoch ist dieser Zusammenhang hilfreich, um sich das Gelernte dauerhaft einzuprägen.
4. Entwickle die Anschauung: In der Physik werden wir bald mit Phänomenen vertraut, die im Gegensatz zu unserer bisherigen Erfahrungswelt zu stehen scheinen. Dies macht den Reiz der Physik aus. Allerdings geraten wir dadurch schnell an die Grenzen unserer Vorstellungskraft. Um diese zu entwickeln, ist es hilfreich sich in Situationen hineinzudenken und das Problem von verschiedenen Seiten zu betrachten.
5. Lerne "Bausteine" für

- Phänomene
- Theorien
- Lösungstechniken

Kreativität ist häufig das gekonnte Zusammenfügen von bereits Bekanntem.

6. Beobachte die Lösungswege. Damit die Lösungsmethoden nicht hinter unübersichtlichen Herleitungen verschwinden, beschäftigen wir uns hier zumeist mit den einfachsten Systemen, die das Prinzip veranschaulichen. Auch wenn man zu Beginn von den mathematischen Problemen ein wenig überwältigt ist, sollte man versuchen, sich in den Wissenschaftler hineinzuversetzen, der einen Beweis erfunden hat. Man sollte sich fragen, was ihn oder sie zu dem Lösungsweg bewegt hat. Diese Gedanken leiten über auf eine höhere Stufe der Abstraktion, de wirklich gute Wissenschaftler auszeichnen.

7. Setze stets die Formeln in Bilder und Diagramme um.

Chapter 2

Newtonsche Mechanik (1h)

2.1 Eine nicht ganz ernst gemeinte Einleitung

Betrachten wir ein freies Teilchen im leeren Raum, das mit nichts wechselwirken kann. Die Bewegungsgleichungen dieses Teilchens dürfen die Symmetrien des leeren Raumes nicht verletzen. Diese Symmetrien sind die drei Raumtranslationen, Zeittranslation und die Drehung um drei unabhängige Achsen. Hinzu kommt, dass ein freies Teilchen nicht zwischen Ruhe und gleichförmiger Bewegung unterscheiden kann. Dieses letzte Prinzip kann man zum Beispiel in einem fahrenden Zug erfahren. Wenn wir nicht aus dem Fenster sehen und wenn der Zug sehr ruhig fährt, gibt es nichts, was uns sagt, ob der Zug steht oder fährt: Wir werden nicht in den Sitz gepresst. Wir erfahren also keinen Widerstand gegen die Bewegung. Wenn wir etwas fallen lassen, wird es senkrecht nach unten fallen, egal ob sich der Zug bewegt oder nicht. Diese Symmetrien sind die **Galilei-Symmetrien** von Zeit und Raum.

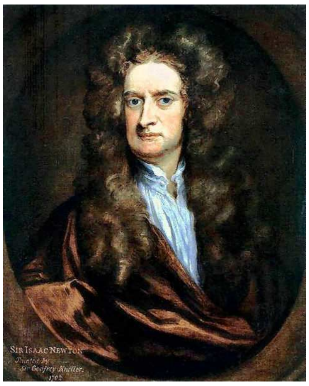


Abb. 2.1: Isaac Newton, 1634-1727 (von Godfrey Kneller, 1702)

Nun wollen wir Bewegungsgleichungen für eine Bahn $\vec{r}(t)$ finden, die alle diese Symmetrien erfüllen. Zusätzlich machen wir die Annahme, dass die Bahn glatt ist, damit wir die Bewegung durch eine Differentialgleichung darstellen können[1]. Die allgemeinste Differentialgleichung für eine Teilchenbahn hat die Form[2]

$$\vec{G}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \ldots) = \vec{0} \tag{2.1}$$

Die Bewegungsgleichung muss eine Vektorgleichung sein, da wir n Gleichungen benötigen, um n Unbekannte des Vektors $\vec{r}$ zu bestimmen. Damit die Funktion $\vec{G}$ Galilei-invariant ist, darf $\vec{G}$ nicht explizit von $t, \vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ abhängen.

Betrachten wir eine **Taylor-Entwicklung**[3] der Funktion $\vec{G}$, erhalten wir

$$G_i(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \ldots) = \bar{G}_i + \frac{\partial G_i}{\partial t} t + \sum_j \frac{\partial G_i}{\partial r_j} r_j + \sum_j \frac{\partial G_i}{\partial \dot{r}_j} \dot{r}_j + \sum_j \frac{\partial G_i}{\partial \ddot{r}_j} \ddot{r}_j \ldots$$

[1] Diese Annahme ist streng genommen nicht richtig. In der Tat lässt sich die Quantenmechanik aus der Annahme herleiten, dass Teilchen eine etwas zufällige Zitterbewegung ausführen. Siehe Nelson[2].

[2] Mit $\dot{\vec{r}}$ bezeichnen wir die erste Zeitableitung der Position des Teilchens, also die Geschwindigkeit. Entsprechend ist $\ddot{\vec{r}}$ die zweite Zeitableitung, bzw. die Beschleunigung

[3] Siehe Anhang D.15

Die einfachste verbleibende Form von $\vec{G}$, welche die obengenannten Symmetrien erfüllt[4], ist

$$G_i = \sum_j \frac{\partial G_i}{\partial \ddot{\vec{r}}_j} \ddot{\vec{r}}_j = \sum_j m_{i,j} \ddot{\vec{r}}_j$$

Die Ableitungen von $\vec{G}$ nach den Beschleunigungen $\ddot{\vec{r}}$ bezeichnen wir als Masse $m_{i,j}$. Mit dieser Funktion $\vec{G}$ resultiert aus $G_i = 0$ (Gl. 2.1) eine gleichförmige Bewegung

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t.$$

Dabei ist $\vec{r}(0)$ die Anfangsposition und $\vec{v}(0)$ die Anfangsgeschwindigkeit.

Wechselwirkungen mit der Außenwelt führen dann zu einer Verletzung der Galilei-Symmetrie und damit dieses einfachen Gesetzes, was durch das **Newtonsche Kraftgesetz** ausgedrückt wird.

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ldots)$$

Der Proportionalitätsfaktor m bezeichnet die **Masse** des Teilchens und $\vec{F}$ die **Kraft**, welche auf das Teilchen einwirkt. Die Masse spielt an diesem Punkt noch keine bedeutende Rolle, weil die Bewegung alleine durch die Beschleunigung $\vec{F}/m$ bestimmt wird. Die Masse wird später wichtig, wenn wir die Wirkung von Kräften auf unterschiedliche Teilchen vergleichen.

Wir haben gesehen, dass die Bewegungsgleichung zum großen Teil aus Symmmetrien, wie der Galilei-Symmetrie, abgeleitet werden können. Wir erhalten die Symmetrien aus Beobachtungen und zweitens mit Hilfe von Idealisierungen. Woher aber kommen die Symmetrien? Das kann ich nicht beantworten. Man kann den philosphischen Standpunkt einnehmen, dass unser Gehirn diese Konzepte entwickelt hat, um die Realität zu strukturieren und dadurch Gefahren aus dem Weg gehen zu können. Diese Konzepte haben sich möglicherweise früh in der Evolution entwickelt, als Tiere lernten, sich gezielt zu bewegen. Pflanzen erfahren die Wirklichkeit wahrscheinlich auf eine ganz andere Weise, weil Raum für sie eine nur untergeordnete Rolle spielt. Warum ist Raum zusammenhängend? Wenn er komplett chaotisch wäre, hätten wir andere Konzepte für den Raum entwickelt oder gar keine, weil wir uns in ihm nicht gezielt bewegen könnten. Ist es Zufall oder eine Eigenschaft des Universums, dass Raum und Zeit so nützlich sind? Warum hat Raum drei Dimensionen und die Zeit nur eine? Warum hat Raum keine Löcher und keine Grenzen? Die Zeit hat in der Tat Löcher, wie wir von durchzechten Parties wissen. Antworten auf diese Fragen findet man vielleicht nur mit Hilfe eines Glases guten Weins am Ende eines erfüllten Physikerlebens.

2.2 Newtonsche Bewegungsgleichung und Newtons Axiome

Aus der Experimentalphysik ist bereits das **Newton'sche Kraftgesetz**[5] bekannt,

KRAFTGESETZ VON NEWTON

Newton's Kraftgesetz für ein Teilchen lautet

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \tag{2.2}$$

Dabei ist m die Masse und $\vec{F}$ die Kraft.
Für N Teilchen hat Newton's Kraftgesetz die Form

$$m_n\ddot{\vec{r}}_n = \vec{F}_n(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \ldots, \dot{\vec{r}}_N, t) \tag{2.3}$$

Dabei ist m_n die Masse des n-ten Teilchens und $\vec{r}_n$ seine Position.

[4]Dieses Argument mag an diesem Punkt noch nicht deutlich werden. Die Symmetrie der Bewegungsgleichungen wird später noch ausführlich behandelt.

[5]Isaac Newton: 1642-1726; Englischer Theologe, Mathematiker

Für die zweite Zeitableitung der Position $\vec{r}$ des Teilchens, die Beschleunigung, gibt es unterschiedliche Schreibweisen.

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = \partial_t^2 \vec{r}$$

Eine gute Geschichte will von von Anfang an erzählt sein. Um nicht in der Mitte zu starten, führen wir hier zunächst die **Newtonschen Axiome** an:[6].

NEWTON'SCHE AXIOME

1. **Trägheitssatz:**[a] In einem Inertialsystem[b] verharrt jeder Körper in einem Zustand der Ruhe oder einer gleichförmigen geradlinien Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.

2. **Bewegungsgleichung und Definition der Kraft:**[c] Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht in die Richtung, in welche jene Kraft wirkt[d].

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

3. **Wechselwirkungsgesetz:**[e] Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder: Die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.[f]

$$\text{actio} = \text{reactio}$$

4. **Superpositionsprinzip:** Kräfte addieren sich vektoriell

$$\vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}_i$$

[a] Lex I: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

[b] Ein Intertialsystem ist ein unbeschrleunigtes Bezugssystem. Wir werden später noch ausführlicher auf Bezugssysteme eingehen.

[c] Lex II: Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

[d] Newton selbst hat dieses Kraftgesetz anders, und damit allgemeiner, definiert: Für ihn ist die Kraft proportional zur Änderung des Impulses $\vec{p}$, also als $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$.

[e] Lex III: Actioni contrariam semper et æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales et in partes contrarias dirigi.

[f] Das Wechselwirkungsgesetz ist der **Impulserhaltungssatz**, mit dem wir uns in Kapitel 6 beschäftigen werden.

Die Newtonschen Axiome werden in einer modernen Darstellung nicht mehr als grundlegende Axiome angenommen. Sie lassen sich aus den Symmetrien des Raum-Zeit Kontinuums ableiten. Aus diesen Symmetrien folgt, dass die Bewegung im leeren Raum ohne äußere Einwirkung unbeschleunigt ist. Eine Beschleunigung ist demnach eine Folge einer äußeren Einwirkung, die wir als Kraft bezeichnen. Newton's zweites Gesetz, $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ ist demnach weniger ein Axiom, sondern eine Definitionsgleichung für die Kraft.

2.3 Numerische Lösung der Bewegungsgleichung

Bevor wir uns mit den Bewegungsformen und den analytischen Eigenschaften der Dynamik auseinandersetzen, möchte ich dem Leser ein Handwerkszeug in die Hand geben, mit dem man die Dynamik

[6] Nach Sir Isaac Newton aus dem Jahr 1687

simulieren und anhand der Simulationen die Eigenschaften der Bewegungen spielerisch erkunden kann. Der hier vorgestellte **Verlet-Algorithmus** wird zum Beispiel in der **Molekulardynamikmethode** angewandt, mit der man die Bewegung von Atomen in Molekülen und Materialien untersucht.

Wir gehen von der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) - \alpha\dot{\vec{r}} \tag{2.4}$$

aus, bei der die Kraft aus zwei Teilen besteht: Eine Kraft $\vec{F}(\vec{r})$, die von der Position des Teilchens abhängt, und die Reibungskraft $-\alpha\dot{\vec{r}}$, die der Geschwindigkeit des Teilchens entgegenwirkt. Die Lösung der Bewegungsgleichung führt auf eine Bahnkurve $\vec{r}(t)$, welche die Position $\vec{r}$ des Teilchens zur Zeit t angibt.

Für eine numerische Behandlung müssen wir den sogenannten **Zeitschritt** Δ einführen, der den zeitlichen Abstand der diskreten Punkte auf der Bahnkurve bestimmt, die berechnet werden sollen. Man sagt, dass die Zeitachse diskretisiert wird.

Der Verlet-Algorithmus besteht aus den folgenden Schritten.

1. Ersetze die Ableitungen $\dot{\vec{r}}$ und $\ddot{\vec{r}}$ in Gl. 2.4 durch die entsprechenden Differentialquotienten [7]:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &\rightarrow \frac{\vec{r}(t+\Delta) - \vec{r}(t-\Delta)}{2\Delta} \\ \ddot{\vec{r}} &\rightarrow \frac{\vec{r}(t+\Delta) - 2\vec{r}(t) + \vec{r}(t-\Delta)}{\Delta^2} \end{aligned}$$

   wodurch Gl. 2.4 in die folgende **diskretisiterte** Gleichung überführt wird.

$$\frac{m}{\Delta^2}\Big[\vec{r}(t+\Delta) - 2\vec{r}(t) + \vec{r}(t-\Delta)\Big] = \vec{F}(\vec{r}) - \frac{\alpha}{2\Delta}\Big[\vec{r}(t+\Delta) - \vec{r}(t-\Delta)\Big]$$

2. Nun lösen wir diese diskretisierte Gleichung nach $\vec{r}(t+\Delta)$ auf. Dabei verwenden wir der Einfachheit halber die Variable $a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha\Delta}{2m}$.

$$\vec{r}(t+\Delta) = \vec{r}(t)\frac{2}{1+a} - \vec{r}(t-\Delta)\frac{1-a}{1+a} + \vec{F}(r(t))\frac{\Delta^2}{m}\cdot\frac{1}{1+a}$$

3. Nun müssen wir nur noch die Anfangsbedingungen $\vec{r}(0)$, $\vec{r}(-\Delta)$ festlegen und können dann die Bewegung Schritt für Schritt iterieren.

4. Die einzelnen Schritte bei der Iteration sind:
   (a) Berechne die Kräfte $\vec{F}(\vec{r}(t))$.
   (b) Propagiere die Bahn $\vec{r}(t+\Delta)$.
   (c) Verschiebe den Zeitschritt: Die Daten werden wie folgt umkopiert

$$\vec{r}(t) \rightarrow \vec{r}(t-\Delta) \qquad \vec{r}(t+\Delta) \rightarrow \vec{r}(t)$$

[7] Zur Herleitung der zweiten Ableitung:

$$\text{Sei die erste Ableitung:}\quad \dot{r}(t) = \frac{r(t+\frac{1}{2}\Delta) - r(t-\frac{1}{2}\Delta)}{\Delta} \qquad \text{Dann folgt:}$$

$$\ddot{r}(t) = \frac{\dot{r}(t+\frac{1}{2}\Delta) - \dot{r}(t-\frac{1}{2}\Delta)}{\Delta} = \frac{\frac{r(t+\Delta)-r(t)}{\Delta} - \frac{r(t)-r(t-\Delta)}{\Delta}}{\Delta} = \frac{r(t+\Delta) - 2r(t) + r(t-\Delta)}{\Delta^2}$$

Die Wahl Δ anstelle von $\Delta/2$ würde die Lösung instabil machen und nur jeden zweiten Gitterpunkt ausnutzen. Man kann sich das verdeutlichen, indem man den Differenzenquotienten mit der doppelten Verschiebung ansetzt. Ohne einen Term $\dot{r}$ in der Differentialgleichung, hängt der Differentialquotient dann nur von jedem zweiten Punkt ab. Die Werte auf geradzahligen Gitterpunkten wären in dem Fall vollkommen unabhängig von den ungeradzahligen Punkten, sodass der Pfad immer hin und herspringen würde.

Achtung: Der Verlet-Algorithmus wird instabil, wenn der Zeitschritt Δ zu groß gewählt wird. Ist T die kürzeste Periode der Dynamik, dann sollte der Zeitschritt die Bedingung

$$\Delta \approx \frac{1}{10}T$$

erfüllen, um eine hinreichende Genauigkeit zu gewährleisten.

2.3.1 Ein einfaches Fortranprogramm

Das Folgende ist ein einfaches Programm in Fortran90. Einen frei verfügbaren Fortran Compiler findet man auf dem Internet unter `http://www.g95.org/`. Das Programm löst die diskretisierte Bewegungsgleichung eines Teilchens in einem harmonischen Potential $E_{pot} = \frac{1}{2}\vec{r}\boldsymbol{c}\vec{r}$ mit einem Reibungsfaktor α.

$$m\ddot{\vec{r}} = -\boldsymbol{c}\vec{r} - \alpha\dot{\vec{r}}$$

Im vorliegenden Fall ist die Bewegung nur eindimensional. Das Programm ist aber gleich für die Verallgemeinerung auf mehrere Dimensionen angelegt. Es kann leicht variiert werden, um es an andere potentielle Energien anzupassen.

```
      program main
      implicit none
!     == Definition der Variablen ================================
      integer(4),parameter :: n=1    ! Dimension der Koordinaten
      real(8)              :: r0(n)  ! aktuelle Position
      real(8)              :: rm(n)  ! vorherige Position
      real(8)              :: rp(n)  ! naechste Position
      real(8)              :: v(n)   ! Geschwindigkeit
      real(8)              :: f(n)   ! Kraft
      real(8)              :: c(n,n) ! Kraftkonstanten
      real(8)              :: m      ! Masse
      real(8)              :: dt     ! Zeitschritt
      real(8)              :: alpha  ! Reibungsfaktor
      real(8)              :: Etot   ! Gesamtenergie
      real(8)              :: Ekin   ! kinetische Energie
      real(8)              :: Epot   ! potentielle energie
      integer(4)           :: niter  ! Anzahl der Zeitschritte
      integer(4)           :: iter   ! Index des Zeitschritts
      real(8)              :: a      ! Hilfsvariable
!     ***********************************************************
!     == oeffne Dateien fuer Ein- und Ausgabe ====================
      open(unit=1000,file='in.dat',form='formatted')
      open(unit=1001,file='energies.dat',form='formatted')
      open(unit=1002,file='r.dat',form='formatted')
!     == Lese Eingabedaten ========================================
      read(1000,*)m,alpha,c
      read(1000,*)dt,niter
      read(1000,*)r0
      read(1000,*)v
!     == bereite Anfangsbedingungen vor ==========================
      rm(:)=r0(:)-v(:)*dt-0.5d0*matmul(c(:,:),r0(:))*dt**2
!     == Das ist die Schlaufe ueber die Zeitschritte  =============
      do iter=1,niter
!       == berechne potentielle Energie und Kraefte ===============
```

```
        call calcepot(n,c,r0,epot,f)
!       ==  propagiere ============================================
        a=0.5d0*alpha*dt/m
        rp(:)= r0(:)    * 2.d0/(1+a) &
             - rm(:)    * (1-a)/(1+a) &
             + f(:)     * dt**2/m/(1+a)
!       == Schreibe Energie und Koordinaten ======================
        v(:)=(rp(:)-rm(:))/(2.d0*dt)
        ekin=0.5d0*m*dot_product(v,v)
        etot=ekin+epot
        write(*,fmt='("iter ",i10," etot ",e10.5 ," ekin ",e10.5  &
     &             ," epot ",e10.5)')iter,etot,ekin,epot
        write(1001,*)real(iter,kind=8)*dt,etot,ekin,epot
        write(1002,*)real(iter,kind=8)*dt,r0(:)
!       == Vertausche Koordinaten fuer den naechsten Zeitschritt ===
        rm(:)=r0(:)
        r0(:)=rp(:)
      enddo
!     == nun schliesse die Dateien ==================================
      close(1000)
      close(1001)
      close(1002)
      stop
      end
!     ..............................................................
      subroutine calcepot(n,c,r,epot,f)
      implicit none
      integer(4),intent(in) :: n
      real(8)   ,intent(in) :: c(n,n)
      real(8)   ,intent(in) :: r(n)
      real(8)   ,intent(out) :: epot
      real(8)   ,intent(out) :: f(n)
!     **************************************************************
      epot=0.5d0*dot_product(r,matmul(c(:,:),r(:)))
      f(:)=-matmul(c(:,:),r(:))
      return
      end
```

Die Eingabedatei in.dat hat die Form

```
1.  0.01  1.0
0.1 100
1.0
0.0
```

Die Eingabeparameter können beliebig geändert werden.

Das Programm schreibt die Energiebeiträge als Funktion der Zeit in die Datei "energies.dat" und die Koordinaten in die Datei "r.dat". Diese können dann zum Beispiel mit Hilfe des Programms xmgrace dargestellt werden. (z.B. xmgrace -nxy energies.dat). Das Programm xmgrace ist frei verfügbar (siehe: http://plasma-gate.weizmann.ac.il/Grace/). Die Resultate sehen dann etwa wie in Abb. 2.2 aus.

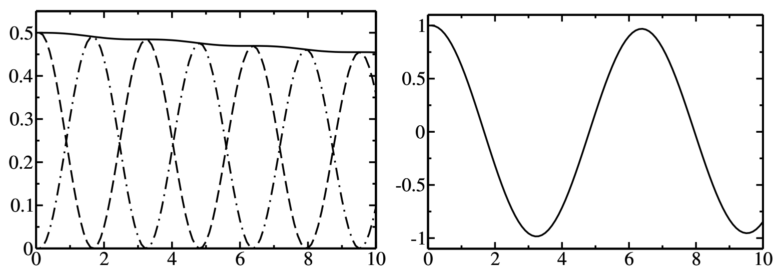


Abb. 2.2: Darstellung der Ausgabedaten des Beispielprogramms für den Verlet Algorithmus. Links die Energien als Funktion der Zeit aus energies.dat. Die volle Linie ist die Gesamtenergie, die gestrichelte Linie ist die potentielle Energie und die kinetische Energie ist durch Strich-Punkt dargestellt. Rechts die Bahnkurve als Funktion der Zeit.

Chapter 3

Bewegungsformen (12h)

3.1 Einfache Modellsysteme

In der Physik abstrahiert man von der Realität, die in ihrer Gesamtheit zu komplex ist, um sie ganz zu erfassen. Deshalb untersuchen wir einfache Modellsysteme, um das Wesentliche eines Problems zu erkennen. Anschließend werden diese Modelle kombiniert, um komplexere Situationen zu beschreiben. Das Ziel ist es, von einfachen Problemen zu lernen, um dann mit Hilfe von Verallgemeinerungen Vorhersagen für Situationen zu treffen, die noch nicht beobachtet wurden.

Die meisten realen Systeme lassen sich nicht exakt beschreiben. Zum Einen mag das System nicht vollständig bestimmbar sein (Dreckeffekte[1]). Vielleicht sind auch die Bewegungsgleichungen nicht genau bekannt. Oder das System ist einfach so komplex, dass man keine exakte Lösung finden kann. Vielfach ist eine exakte Lösung eines Problems auch gar nicht von Interesse, solange man eine nur hinreichend genaue Lösung finden kann.

Aus kognitiver Sicht sind Modellsysteme wie Worte, die Buchstaben zusammenfassen. Würden wir beim Lesen jeden einzelnen Buchstaben betrachten, wäre das nicht sehr effizient. Deshalb prägen wir uns das Gesamtbild eines Wortes ein und erkennen Worte als Einheiten. Beim Lesen fallen uns daher kleine Tippfehler kaum auf. Genauso erlauben es die Modellsysteme viele Eigenschaften eines Systems sofort mit einem begrifflichen Konzept, dem entsprechenden Modellsystem, in Verbindung zu bringen und gemeinsam zu erfassen.

Deshalb spielen idealisierte Modellsysteme in der Theoretischen Physik eine wichtige Rolle. Insbesondere lassen sich einige Modellsysteme auf eine weite Klasse von Problemen verallgemeinern. Dazu gehören

1. das freie Teilchen,
2. der freie Fall,
3. der harmonischer Oszillator und
4. das Zentralfeldproblem (Keplerproblem, Streuprobleme).

Die Modellsysteme $1-3$ ergeben sich, wie in Bild 3.1 schematisch dargestellt, aus einer Taylor-Entwicklung des **Potentials**[2] um einen Punkt im Raum, wobei nur der erste nichtverschwindende Term berücksichtigt wird.

Freies Teilchen: Ist ein Teilchen so schnell, dass es die Variation des Potentials nicht mehr spürt, kann die Variation des Potentials vernachlässigt werden. In anderen Worten: Die Variation der

[1] Dreckeffekte nennt man Effekte, die im Experiment nicht kontrollierbar sind. Zum Beispiel könnte eine Materialprobe nicht genügend rein herzustellen sein. Solche Effekte führen später häufig zu interessanten Forschungsthemen.

[2] Das Potential $V(\vec r)$ hängt mit der Kraft durch die Beziehung $\vec F = -\vec\nabla V(\vec r)$ zusammen. Beachte, dass nicht alle Kraftfelder $\vec F(\vec r)$ durch ein Potential dargestellt werden können.

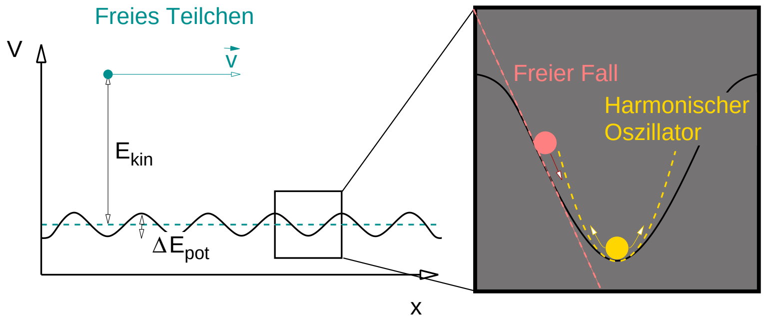
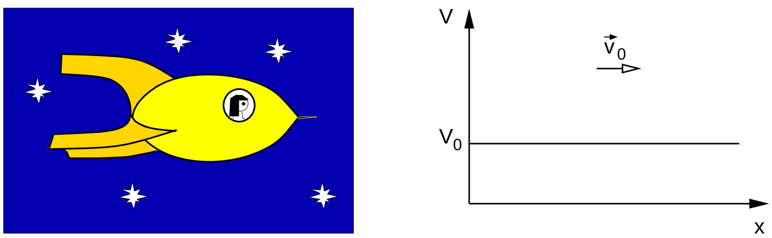
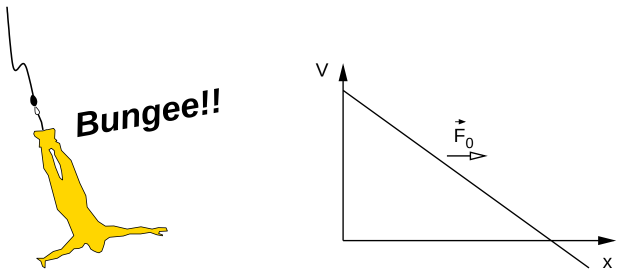


Abb. 3.1: Dieses Bild soll anhand eines beliebigen Potentials die Rolle der Modellsysteme des freies Teilchens, des freien Falls und des harmonischen Oszillators illustrieren.

potentiellen Energie ist gegenüber der **kinetischen Energie** vernachlässigbar. In diesem Fall kann das Problem durch das Modell eines **freien Teilchens** beschrieben werden, auf das keine Kräfte wirken.



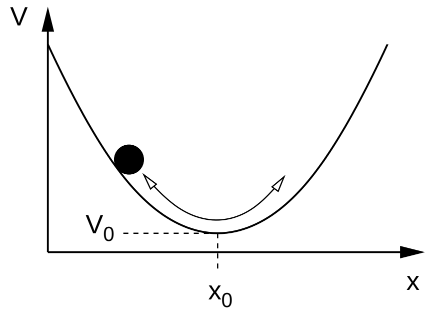
Freier Fall: Wenn die Kraft nur gering von Ort und Zeit abhängt, kann die Ortsabhängigkeit der Kraft vernachlässigt werden. Das Problem ist dann äquivalent zu dem des freien Falls. Der **Freie Fall** beschreibt ein Masseteilchen das eine konstante Gravitationskraft erfährt.[3]



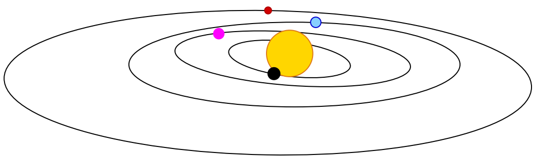
Harmonischer Oszillator: Ist ein Teilchen durch Reibung zur Ruhe gekommen, dann liegt es in einem Minimum des Potentials. An diesem Punkt verschwindet die Kraft. Betrachten wir die Bewegung nur in der unmittelbaren Umgebung dieser Gleichgewichtslage, dann kann die Bewegung durch den **harmonischen Oszillator** beschrieben werden, bei dem die Kraft proportional zu den Auslenkungen ist.[4]

[3]Eigentlich ist die Gravitationskraft nicht exakt ortsunabhängig. Diese Näherung ist aber für Prozesse auf der Erdoberfläche durchaus angemessen.

[4]Die Karikatur stammt von Ehrich Ohser 1903-1944, der unter dem Synonym E.O.Plauen publizierte. Bekannt durch Illustration der Werke von Erich Kästner und die Illustrationsreihe Vater und Sohn in der “Berliner Illustrirten”.



Zentralfeldproblem: Das **Zentralfeldproblem** ist ein Modell für ein System, bei dem ein Punkt im Raum ein ausgezeichnetes Zentrum bildet. Für unser Planetensystem ist die Sonne ein besonderes Zentrum, weil die Sonne durch ihre große Masse die Bewegung der Planeten bestimmt. Das entsprechende Potential ist kugelsymmetrisch.



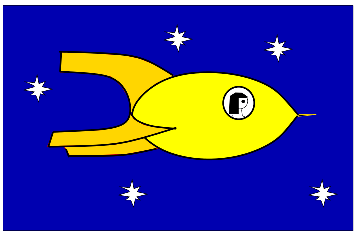
Ist das Potential proportional zu $1/|\vec{r}|$, dann liegt das sogenannte **Keplerproblem** vor. Das Keplerproblem ist einerseits auf die Planetenbewegung und auf der anderen Seite auf die Bewegung eines Elektrons in einem Atom anwendbar. Das Keplerproblem $V(\vec{r}) \sim \frac{1}{|\vec{r}|}$ entspricht allgemein einer sogenannten "langreichweitigen Wechselwirkung":

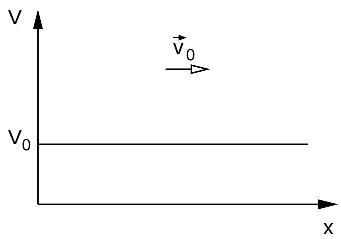
Das Zentralfeldproblem wird später in Kapitel 6.7 behandelt.

Im Folgenden werden wir diese Modellsysteme im Detail lösen. Der Lösungsweg ist im Detail dargestellt, auch wenn dieser in manchen der vorliegenden Fälle trivial erscheint. Das Augenmerk liegt hierbei auf der Demonstration und der Gegenüberstellung von Lösungsstrategien, die am deutlichsten anhand von einfachen Problemen demonstriert werden können.

Es wird empfohlen, sich vor der weiteren Lektüre mit den mathematischen Grundlagen von gewöhnlichen Differentialgleichungen in Anhang D.12 auf Seite 268 vertraut zu machen.

3.2 Das freie Teilchen





Das **freie Teilchen** ist kräftefrei und erfüllt daher die Differentialgleichung:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{0}$$

welches sich direkt aus Newton's Gesetz Gl. 2.2 für eine kräftefreie Bewegung ergibt.

Diese spezielle Bewegungsgleichung kann durch Integration gelöst werden.

$$\int_0^t dt' \, \ddot{\vec{r}}(t') = \dot{\vec{r}}(t) - \dot{\vec{r}}(0) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{r}}(0)$$

$$\int_0^t dt' \, \dot{\vec{r}}(t') = \vec{r}(t) - \vec{r}(0) = \int_0^t dt' \, \dot{\vec{r}}(0) = \dot{\vec{r}}(0)t \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \dot{\vec{r}}(0)t$$

Wir erhalten also

$$\vec{r}(t) = \underbrace{\vec{r}(0)}_{(a)} + \underbrace{\dot{\vec{r}}(0)}_{(b)} t,$$

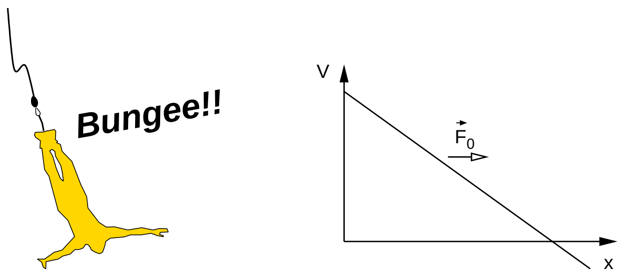
wobei die Integrationskonstanten die Startposition (a) und die Startgeschwindigkeit (b) die Anfangsbedingungen sind. In Abwesenheit von Kräften bewegt sich ein Teilchen auf einer geraden Linie mit konstanter Geschwindigkeit, also geradlinig und gleichförmig.

Anhand dieses einfachen Beispiels wir eine wesentliche Beobachtung von allgemeiner Bedeutung: Die Bewegungsgleichungen lassen eine Vielzahl von möglichen Bahnkurven zu. Um die Bahnkurve eindeutig festzulegen, benötigt man zusätzlich zu den Bewegungsgleichungen einen Satz von **Anfangs- oder Randbedingungen** [5], die den Integrationskonstanten entsprechen. Die Notwendigkeit, Randbedingungen vorzugeben, ist eine allgemeine Eigenschaft von Differentialgleichungen.

Die Anzahl der Anfangs- und Randbedingungen ist dabei gleich der Ordnung der Differentialgleichung multipliziert mit der Dimension der betrachteten Bewegung.

Anhand dieses Beispiels wird deutlich, warum man bei der Lösung von Differentialgleichungen von **Integration der Bewegungsgleichung** spricht. Die Anfangsbedingungen spielen die Rolle der Integrationskonstanten bei der "Integration der Differentialgleichung".

3.3 Freier Fall



Der **Freie Fall** beschreibt die Bewegung eines Teilchens unter dem Einfluss einer konstanten Kraft.

Dabei stellt man sich zum Beispiel die Erdanziehung vor, die auf alle Körper auf der Erdoberfläche wirkt.[6]. Diese Kraft ist

$$\vec{F} = -mg\vec{e}_z \ ,$$

wobei m die Masse des Körpers, auf den die Kraft wirkt, ist. Die Naturkonstante $g = 9.81\frac{m}{s^2}$ ist die sogenannte **Fallbeschleunigung**. Sie ist spezifisch für die Erdanziehung auf der Erdoberfläche und ist deshalb nicht auf z.B. den Mond übertragbar. Der Vektor $\vec{e}_z$ ist der Einheitsvektor, der vertikal nach oben zeigt, d.h, von der Erdoberfläche weg. Typische Beispiele des freien Falls sind die Flugbahn eines Schneeballs oder die eines Bungee-Springers.

[5] Anfangsbedingungen sind ein Spezialfall von Randbedingungen. In dem Fall ist der Rand eines Zeitintervalls gemeint. Der Anfang ist natürlich auch der Rand dieses Intervalls.

[6] Die Erdanziehungskraft ist nur näherungsweise konstant. Sie fällt oberhalb der Erdoberfläche umgekehrt proportional zum Abstandsquadrat vom Erdzentrum ab.

Das Modellsystem des Freien Falls ist aber nicht auf die Schwerkraft beschränkt. Ein Auto, das mit konstanter Kraft beschleunigt, oder ein Elektron in einem konstanten elektrischen Feld, wird mit derselben Bewegungsgleichung beschrieben.

Wir beginnen mit dem Newtonschen Kraftgesetz Gl. 2.2

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_0, \tag{3.1}$$

wobei die Kraft $\vec{F}_0$ konstant sein soll.

Hier wird eine weitere Technik für die Lösung einer Differentialgleichung vorgestellt. Man "rät" einen Ansatz für die Lösung, die freie Parameter enthält. Die Parameter werden anschließend durch Einsetzen in die Differentialgleichung bestimmt. Gibt es keinen geeigneten Parametersatz, dann muss man einen anderen Ansatz wählen.

Wir müssen also einen Ansatz finden. Der Zusammenhang von Differentialgleichungen und Integration legt einen Ansatz der Form

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{b}t + \vec{c}t^2 \tag{3.2}$$

nahe, weil zweifache Integration einer Konstanten Potenzen bis zur zweiten Ordnung in t erzeugt. [7]

Nun gilt es, die freien Parameter $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ durch

1. die Bewegungsgleichung Gl. 3.1 und
2. die Anfangsbedingungen[8] $\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0$ und $\dot{\vec{r}}(t=0) = \vec{v}_0$

zu bestimmen. Dabei ist $\vec{r}_0$ die Anfangsposition und $\vec{v}_0$ die Anfangsgeschwindigkeit.

Im Folgenden werden diese Schritte im Detail vorgeführt.

Einsetzen in die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) \overset{Gl.\ 3.2}{=} \vec{a} + \vec{b}t + \vec{c}t^2 \quad &\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}} = \vec{b} + 2\vec{c}t \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}} = 2\vec{c} \\
\vec{F}_0 \overset{Gl.\ 3.1}{=} m\ddot{\vec{r}} = 2m\vec{c} \quad &\Rightarrow \quad \vec{c} = \frac{\vec{F}_0}{2m}
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t=0) \overset{!}{=} \vec{r}_0 \quad &\overset{Gl.\ 3.2}{\Rightarrow} \quad \vec{a} = \vec{r}_0 \\
\dot{\vec{r}}(t=0) \overset{!}{=} \vec{v}_0 \quad &\overset{Gl.\ 3.2}{\Rightarrow} \quad \vec{b} = \vec{v}_0
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Parameter in den Ansatz erhalten wir die Lösung der Bewegungsgleichung

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2m}\vec{F}_0 t^2 \tag{3.3}$$

Analyse der Bahnkurve

Unser Ziel ist es, uns ein Bild der Bahnkurve zu machen. Dazu zeigen wir zuerst, dass die Bahnkurve in einer Ebene liegt. Anschließend bestimmen wir die Bahn $z(x)$ in dieser Ebene, wobei z die Höhe und x die horizontale Koordinate des Teilchens ist.

[7] Man könnte auch eine allgemeinere Potenzreihenentwicklung $\vec{r}(t) = \sum_0^n \vec{a}_n t^n$ als Ansatz wählen.

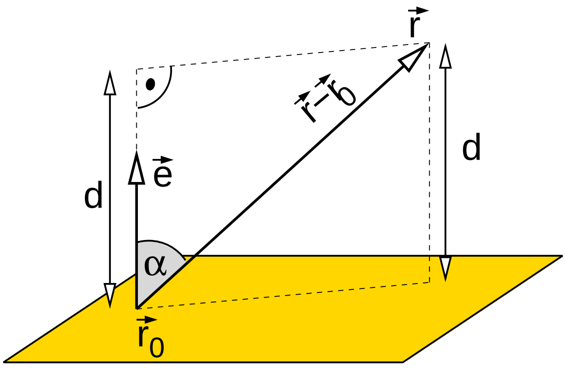
[8] Alternativ zu den Anfangsbedingungen könnte man zum Beispiel auch zwei Randbedingungen, wie Anfangs- und Endposition, vorschreiben.

Man kann leicht überprüfen, dass sich die Bahnkurve in einer Ebene liegt, die von der Kraft $\vec{F}_0$ und der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ aufgespannt wird. Wir bestimmen dazu den Abstand d der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ von dieser Ebene:

$$d = (\vec{r}(t) - \vec{r}_0) \cdot \frac{\vec{v}_0 \times \vec{F}_0}{|\vec{v}_0 \times \vec{F}_0|} \tag{3.4}$$

Die Ebene ist dadurch definiert, dass der Abstand d alle Punkte auf der Ebene verschwindet. Die Forderung $d = 0$ mit Gl 3.4 ist gerade die sogenannte **Ebenengleichung**, welche in Anhang D.6.3 erklärt wird.

Der Vektor $\vec{e} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{v}_0 \times \vec{F}_0}{|\vec{v}_0 \times \vec{F}_0|}$ ist der Normalenvektor der Ebene, welche durch Geschwindigkeit und Kraft aufgespannt werden. Er ist normiert, d.h. er besitzt die Länge 1. Die Projektion des Abstandvektors des Punktes $\vec{r}(t)$ von einem beliebigen Vektor in der Ebene, z.B. $\vec{r}_0$ ergibt den Abstand von der Ebene.



Durch Einsetzen der Bahnkurve Gl. 3.3 in Gl. 3.4 weisen wir nach, dass die Bahnkurve in der Ebene liegt:

$$\begin{aligned}
d(t) &\stackrel{Gl.\,3.4}{=} (\vec{r}(t) - \vec{r}_0) \cdot \frac{\vec{v}_0 \times \vec{F}_0}{|\vec{v}_0 \times \vec{F}_0|} \\
&\stackrel{Gl.\,3.3}{=} \left(\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2m}\vec{F}_0 t^2 - \vec{r}_0\right) \cdot \frac{\vec{v}_0 \times \vec{F}_0}{|\vec{v}_0 \times \vec{F}_0|} \\
&= \left(\vec{v}_0 t + \frac{1}{2m}\vec{F}_0 t^2\right) \cdot \frac{\vec{v}_0 \times \vec{F}_0}{|\vec{v}_0 \times \vec{F}_0|} \\
&= \frac{\overbrace{\vec{v}_0 \cdot (\vec{v}_0 \times \vec{F}_0)}^{=0}}{|\vec{v}_0 \times \vec{F}_0|} t + \frac{1}{2m} \frac{\overbrace{\vec{F}_0 \cdot (\vec{v}_0 \times \vec{F}_0)}^{=0}}{|\vec{v}_0 \times \vec{F}_0|} t^2 = 0
\end{aligned}$$

Beide Terme verschwinden, weil das **Spatprodukt**[9] $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ verschwindet, wenn zwei seiner Vektoren identisch sind. Damit haben wir gezeigt, dass die Bahn in einer Ebene liegt, die durch die Kraft und die Anfangsgeschwindigkeit aufgespannt wird und die Anfangsposition enthält.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit legen wir diese Ebene in die x-z-Ebene derart, dass die z-Achse antiparallel zur Kraft steht und die x Achse entlang der horizontalen bewegungsrichtung zeigt.

Die Bahnkurve erhalten wir nun, indem wir eine Koordinate $x(t)$ nach der Zeit auflösen und das

[9]Siehe Anhang D.3.4 auf S. 242 für eine Beschreibung des Spatprodukts.

Resultat $t(x)$ in $z(t)$ einsetzen.

$$x(t) \overset{Gl.\ 3.3, \vec{F}\perp\vec{e}_x}{=} x_0 + v_{0,x}t \qquad \Rightarrow \qquad t(x) = \frac{1}{v_{0,x}}(x - x_0)$$

$$\begin{aligned} z(t) &\overset{Gl.\ 3.3}{=} z_0 + v_{0,z}t + \frac{1}{2m}F_{0,z}t^2 \\ &= z_0 + \frac{v_{0,z}}{v_{0,x}}(x - x_0) + \frac{F_{0,z}}{2mv_{0,x}^2}(x - x_0)^2 \end{aligned}$$

Die Bahnkurve ist also eine Parabel. Sie ist in Abb. 3.2 dargestellt.

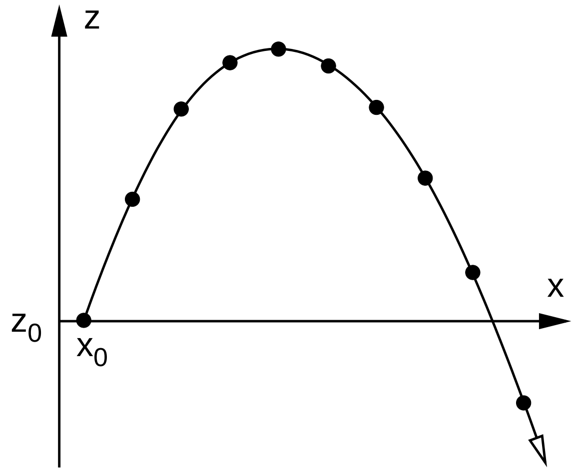


Abb. 3.2: Die Bahnkurve des freien Falls ist eine Parabel. Die Punkte sind Schnappschüsse mit gleichen Zeitabständen.

3.4 Teilchen mit konstanter Kraft und Reibung

Nun führen wir zusätzlich zur konstanten Kraft $\vec{F}$ eine Reibungskraft ein. Wir erhalten dann die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_0 - \alpha\dot{\vec{r}} \tag{3.5}$$

Die Reibungskraft ist der Geschwindigkeit entgegengesetzt und verlangsamt die Bewegung. Der Proportionalitätsfaktor α wird **Reibungskoeffizient** genannt.

Die Ursache der Reibung ist die Umwandlung von mechanischer Energie der Bahnbewegung in thermische Energie, also Wärme. Gleitet ein Körper auf einem Anderen, dann verformen sich kleinste Verzahnungen der Materialoberflächen auf der Gleitfläche. Dabei werden die Atome an den Oberflächen in Schwingungen versetzt, die sich in das Innere der Körper fortsetzen, und damit Energie in das Material hineintragen: Es ensteht **Reibungswärme**. Sind die Oberflächen durch ein Gleitöl voneinander getrennt, dann wird das Öl beim Gleitvorgang verwirbelt, wodurch es sich wiederum erwärmt. Diese Wärme wird wiederum ins Innere der Körper abgeführt. Die als Wärme abgeführte Energie steht der Bewegung nicht mehr zu Verfügung, weshalb sich der Körper verlangsamt.

Bei der Lösung der Differentialgleichung verwenden wir einen Trick: In der Differentialgleichung Gl. 3.5 tritt nur die Geschwindigkeit $\vec{v} \overset{\text{def}}{=} \dot{\vec{r}}$ aber nicht die Position des Teilchens auf. Deshalb lösen wir zunächst die Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit und integrieren anschließend die Geschwindigkeit, um die Position als Funktion der Zeit zu erhalten. Wir haben damit die Differentialgleichung zweiter Ordnung, Gl. 3.5, in zwei einfachere Differentialgleichungen erster Ordnung zerlegt.

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} \tag{3.6}$$

$$m\dot{\vec{v}} \overset{Gl.\ 3.5,3.6}{=} \vec{F}_0 - \alpha\vec{v} \tag{3.7}$$

Wir haben es hier mit einem Spezialfall eines allgemeinen Prinzips zu tun:

Jede Differentialgleichung kann auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung abgebildet werden.

Wir bestimmen also zunächst die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung für die Geschwindigkeit Gl. 3.7. Die Inhomogenität ist gerade $\vec{F}_0$. Wie in Def. D.8 (siehe S. 270) erwähnt, erhält man die allgemeine Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung als Superposition einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, Gl. 3.7, und einer allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung, nämlich $m\dot{\vec{v}} = -\alpha\vec{v}$.

1. Wir bestimmen also zunächst eine beliebige spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Leider gibt es dafür im Allgemeinen kein systematisches Lösungsverfahren[10], sodass man sich auf den eigenen Erfindungsreichtum verlassen muss.

   Weil die Reibungskraft linear mit der Geschwindigkeit ansteigt, gibt es eine gewisse Geschwindigkeit, bei der sich die Reibungskraft mit der konstanten Kraft $\vec{F}_0$ gerade die Waage hält, sodass sich das Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Wir müssen also nur diese Geschwindigkeit bestimmen, um zu einer speziellen Lösung zu gelangen.

   Ausgehend von Gl. 3.7 setzen wir die Geschwindigkeit konstant, d.h. $\dot{\vec{v}} = \vec{0}$, und erhalten

   $$m\dot{\vec{v}} \overset{Gl.\ 3.7}{=} \vec{F}_0 - \alpha\vec{v} \qquad \overset{\dot{\vec{v}}=\vec{0}}{\Rightarrow} \qquad \vec{v} = \frac{1}{\alpha}\vec{F}_0 \tag{3.8}$$

2. Nun bestimmen wir die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $m\dot{\vec{v}} = -\alpha\vec{v}$. Die Gleichungen der drei Komponenten sind entkoppelt. Wir lösen sie getrennt mit Hilfe des den Exponentialansatzes

   $$v_i(t) = A_i \mathrm{e}^{-\lambda_i t} \tag{3.9}$$

   Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

   $$m\dot{v}_i = -\alpha v_i$$
   $$\overset{Gl.\ 3.9}{\Rightarrow} \quad mA_i(-\lambda_i)\mathrm{e}^{-\lambda_i t} = -\alpha A_i \mathrm{e}^{-\lambda_i t}$$
   $$\lambda_i = \frac{\alpha}{m} \tag{3.10}$$
   $$\vec{v}(t) = \vec{A}\,\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{m}t} \tag{3.11}$$

   Der Vektor $\vec{A}$ enthält die drei Integrationskonstanten der dreidimensionalen Differentialgleichung erster Ordnung.

3. Durch die Superposition der speziellen Lösung Gl. 3.8 mit der allgemeinen Lösung Gl. 3.11 der homogenen Gleichung , erhalten wir die allgemeine Lösung für die Geschwindigkeit $v(t)$.

   $$\vec{v}(t) = \frac{1}{\alpha}\vec{F}_0 + \vec{A}\,\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{m}t} \tag{3.12}$$

[10] Speziell für lineare inhomogene DGL gibt es eine systematische Methode, nämlich die in Anhang D.12.5 beschriebene Methode der Variation der Konstanten. Eventuell muss man Differentialgleichungen höherer Ordung auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung abbilden, wie das in Anhang D.12.3 beschrieben ist.

Wir überprüfen das Resultat durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung, Gl. 3.7,

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_0 - \alpha\vec{v}$$
$$\overset{Gl.\ 3.12}{\Rightarrow} \underbrace{m\vec{A}\left(-\frac{\alpha}{m}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{m}t}}_{\dot{\vec{v}}} = \vec{F}_0 - \alpha\underbrace{\left[\frac{1}{\alpha}\vec{F}_0 + \vec{A}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{m}t}\right]}_{\vec{v}}$$

Diese Identität ist offensichtlich erfüllt. Wir haben also damit die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erhalten.

4. Nun müssen wir die freien Konstanten, $\vec{A}$, durch die Anfangsbedingungen ausdrücken. Es bietet sich an, die Anfangsgeschwindigkeit als Anfangsbedingung zu wählen, d.h.

$$\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 \tag{3.13}$$

Durch Einsetzen der Lösung Gl. 3.12 in die Anfangsbedingung Gl. 3.13 erhalten wir

$$\vec{v}_0 = \underbrace{\frac{1}{\alpha}\vec{F}_0 + \vec{A}}_{\vec{v}(t=0)} \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = \vec{v}_0 - \frac{1}{\alpha}\vec{F}_0$$

Die Geschwindigkeit hat also die Bahn

$$\vec{v}(t) = \frac{1}{\alpha}\vec{F}_0 + \left(\vec{v}_0 - \frac{1}{\alpha}\vec{F}_0\right)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{m}t} \tag{3.14}$$

5. Integration der Geschwindigkeit aus Gl. 3.14 liefert die gesuchte Bahn $\vec{r}(t)$ für die Positionen:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \vec{r}(0) + \int_0^t dt'\ \vec{v}(t') \\
&\overset{Gl.\ 3.14}{=} \vec{r}(0) + \frac{1}{\alpha}\vec{F}_0 t + \left(\vec{v}_0 - \frac{1}{\alpha}\vec{F}_0\right)\frac{1}{-\frac{\alpha}{m}} \cdot \left(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{m}t} - 1\right) \\
&= \vec{r}(0) + \frac{1}{\alpha}\vec{F}_0 t - \left(\frac{m}{\alpha}\vec{v}_0 - \frac{m}{\alpha^2}\vec{F}_0\right)\left(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{m}t} - 1\right)
\end{aligned}$$

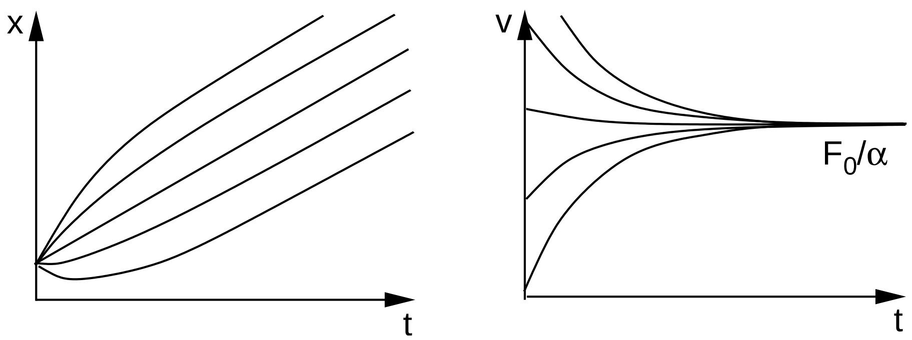
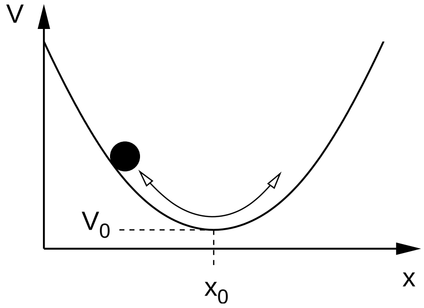


Abb. 3.3: Eindimensionales System mit konstanter Kraft und Reibung. Links: Bahnkurve; rechts: Geschwindigkeit.

Mögliche Bahnkurven sind in Abb. 3.3 dargestellt. Die Bahn nimmt eine konstante Endgeschwindigkeit an, die unabhängig von den Anfangsbedingungen ist. Die Endgeschwindigkeit wird exponentiell erreicht.

3.5 Eindimensionaler harmonischer Oszillator



3.5.1 Einführung

Ein **harmonischer Oszillator** zeichnet sich dadurch aus, dass die Kraft proportional zur Auslenkung ist. In einer Dimension erfüllt er die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -cx$$

Dabei wird c als **Kraftkonstante** bezeichnet.

Der harmonische Oszillator ist das wohl bedeutendste Modellsystem in der Physik.

- Einerseits beschreibt der harmonische Oszillator eine häufige physikalische Situation, nämlich das Verhalten in der Umgebung einer Gleichgewichtslage. Ein harmonischer Oszillator zeichnet sich durch eine einzelne, wohldefinierte Frequenz aus. Damit ist er die Grundlage der Beschreibung von allgemeinen Phänomenen wie Resonanz, Absorption und Lebensdauer von Anregungen.
- Zum Anderen lässt sich der harmonische Oszillator in fast jeder Theorie analytisch lösen. Er bildet daher den Ausgangspunkt von komplexeren Problemen. So kann die Quantenfeldtheorie, welche die Grundlage der Beschreibung von Elementarteilchen bildet, mit Hilfe eines komplexen harmonischen Oszillators verstanden werden. Die Sattelpunktsnäherung, eine der wichtigsten Näherungen in der statistischen Physik, führt ein Probem auf harmonische Oszillatoren zurück.

Wir wollen nun einige Realisierungen des harmonischen Oszillators erwähnen. Sie sind in Abb. 3.4 dargestellt.

- **Federpendel:** ein Gewicht hängt an einer elastischen Feder, die wiederum an einem festem Punkt aufgehängt ist. Die potentielle Energie ist

  $$V(z) = \frac{1}{2}cz^2 + mgz$$

  Dabei ist c die **Kraftkonstante**, m die Masse des Gewichts und g ist die **Fallbeschleunigung**. Die vertikale Position des Gewichts relativ zum Aufhängepunkt der Feder wird mit z bezeichnet. Halten sich die Federkraft und die Erdanziehung die Waage, dann bleibt das Pendel in Ruhe. Diese Ruhelage z_0 erhält man also aus

  $$\left.\frac{dV}{dz}\right|_{z_0} = 0 \qquad \rightarrow \qquad z_0 = -\frac{m}{c}g$$

  Entwickelt man das Potential um die Ruhelage erhalten wir

  $$\begin{aligned} & V(z) = V(z_0) + \frac{1}{2}c(z-z_0)^2 \\ \Rightarrow \qquad & F_z(z) = -\partial_z V(z) = -c(z-z_0) \end{aligned}$$

  Das Potential hat also Parabelform und die Kraft ist proportional zur Auslenkung, was einen harmonischen Oszillator charakterisiert.

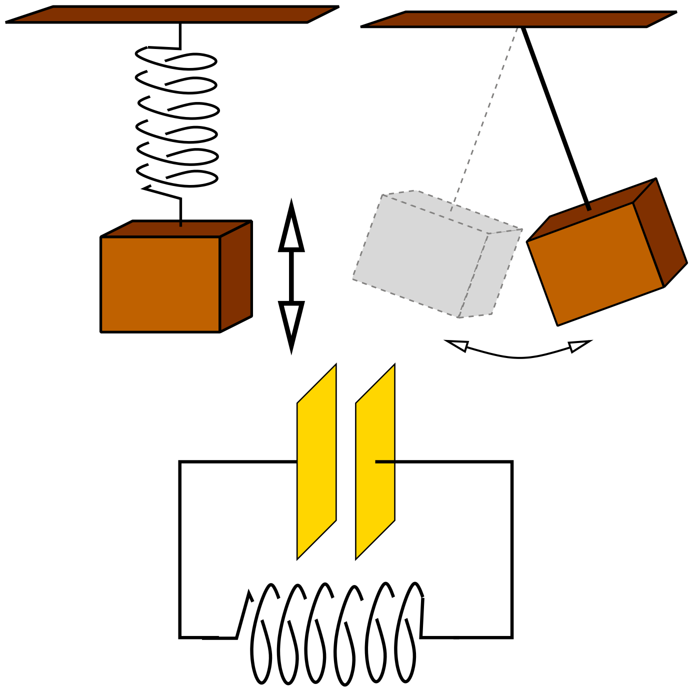


Abb. 3.4: Realisationen des harmonischen Oszillators. Oben links: Federpendel. Oben rechts Fadenpendel, Unten: Elektrischer Schwingkreis.

- **Fadenpendel:**: Die Erdanziehung bewirkt eine Rückstellkraft der Auslenkung. Das Fadenpendel ist nur für kleine Auslenkungen durch den harmonischen Oszillator beschreibbar.

- **Elektrischer Schwingkreis**: Der elektrische Schwingkreis ist ein elektronische Bauteil, welches das Senden von Radiosignalen, bzw. deren Empfang, ermöglicht. Beim Senden erlaubt er die Erzeugung eines starken Signals mit wohldefinierter Frequenz. Beim Empfang filtert er eine Frequenz aus einer Vielzahl unterschiedlicher Frequenzbänder heraus.

  In einem Schwingkreis wird ein **Kondensator** mit **Kapazität** C mit einer Spule mit der **Induktivität** L in einem Stomkreis in Reihe geschaltet. Der Schwingkreis kann zum Beispiel angeregt werden, indem man eine Spannung an den Kondensator anlegt, und diese Spannung dann plötzlich abschaltet. Die Ladung des Kondensators kann mit Hilfe der Kapazität $C = Q/U$ und der angelegten Spannung U bestimmt werden. Wenn die Spannungsquelle getrennt wird, entlädt sich der Kondensator. Die Ladung fließt durch die Spule und der Strom $I = \dot{Q}$ induziert ein magnetisches Feld in der Spule. Der Aufbau des magnetischen Feldes entzieht dem Strom Energie, was sich ein einer Gegenspannung $U = -L\dot{I}$ am Kondensator äußert und dem Stromfluss entgegenwirkt. Wird der Strom schwächer, bricht das Magnetfeld zusammen, was den Strom durch die Spule antreibt und damit den Kondensator, mit entgegengesetzter Polung, wieder auflädt. Dieser Prozess des Entladens und Aufladens des Kondensator wiederholt sich immer wieder, bis die Energie anderweitig in Wärme umgewandelt wird.

  Wir erhalten also die Differentialgleichung

  $$\ddot{U} \overset{Q=CU}{=} \frac{1}{C}\ddot{Q} \overset{I=\dot{Q}}{=} \frac{1}{C}\dot{I} \overset{U=L\dot{I}}{=} -\frac{1}{LC}U$$

  die einem harmonischen Oszillator entspricht. Der einzige Unterschied zu den vorherigen Beispielen ist, dass die Koordinate hier eine Spannung und keine Position ist.

3.5.2 Lösungsweg zum harmonischen Oszillator

Der **eindimensionale harmonische Oszillator** ist durch eine Bewegungsgleichung der Form

$$m \cdot \ddot{x} = -cx$$

charakterisiert. Für ein mechanisches System ist m die Masse und c die **Kraftkonstante**.

Vergegenwärtigen wir uns noch einmal die Schritte, die zur Lösung einer Differentialgleichung notwendig sind:

1. Ansatz wählen.
2. Unbekannte identifizieren
3. Unbekannte bestimmen. Es werden die folgenden Gleichungen verwendet:
   (a) Bewegungsgleichung
   (b) Rand-/Anfangsbedingungen
4. Unbekannte in den Ansatz einsetzen.

Jetzt werden wir die einzelnen Schritte durchgehen.

1. Zunächst wählen wir einen **Ansatz**:

$$x(t) = A \cdot \mathrm{e}^{i\omega t} + B \cdot \mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{3.15}$$

2. **Unbekannten identifizierem:** Die Unbekannten sind A, B, ω, die komplexe Werte annehmen dürfen. Die Identifizierung der Unbekannten scheint in diesem Falle trivial. Es müssen die freien Variablen von anderen Variablen, wie z.B. die Kraftkonstante, in der Differentialgleichung unterschieden werden.

3. **Unbekannte bestimmen:**

   (a) Aus der Bewegungsgleichung folgt

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x}(t) &= -cx(t) \\ -m\omega^2 \left[A \cdot \mathrm{e}^{i\omega t} + B \cdot \mathrm{e}^{-i\omega t}\right] &= -c\left[A \cdot \mathrm{e}^{i\omega t} + B \cdot \mathrm{e}^{-i\omega t}\right] \\ \omega &= \pm\sqrt{\frac{c}{m}} \end{aligned}$$

   (b) Aus den Anfangsbedingungen erhalten wir

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 &\qquad \text{und} \qquad \dot{x}(0) = v_0 \\ \overset{Gl.\ 3.15}{\Rightarrow} x_0 = A + B &\qquad \text{und} \qquad v_0 = i\omega(A - B) \end{aligned}$$

   Wir drücken dieses Gleichungssystem durch eine Vektorgleichung aus.

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

   Indem wir die Inverse[11] der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix}$ von links multiplizieren können wir die

[11] Die Formel für die Inversion einer zweidimensionalen Matrix sollte man auswendig lernen

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{AD - BC} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}$$

Gleichung nach $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ auflösen.

$$\frac{1}{-2i\omega}\begin{pmatrix} -i\omega & -1 \\ -i\omega & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

So können A und B bestimmt werden:

$$A = \frac{1}{2}x_0 + \frac{v_0}{2i\omega}$$
$$B = \frac{1}{2}x_0 - \frac{v_0}{2i\omega}$$

4. Schließlich setzen wir die Unbekannten in den Anzatz Gl. 3.15 ein, um die endgültige Lösung zu erhalten

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(x_0 - i\frac{v_0}{\omega}\right)e^{i\omega t} + \frac{1}{2}\left(x_0 + i\frac{v_0}{\omega}\right)e^{-i\omega t} \tag{3.16}$$

wobei $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$. Beachtenswert ist, dass die Lösung rein reell ist, obwohl wir einen komplexen Ansatz verwendet haben.

Man kann die obige Lösung unterschiedlich darstellen, und man sollte mit diesen Darstellungen vertraut sein.

Wir haben bereits bemerkt dass die Lösung Gl. 3.16 rein reell ist. Sie lässt sich als

$$x(t) = \mathrm{Re}\left[\left(x_0 - i\frac{v_0}{\omega}\right)e^{i\omega t}\right] \tag{3.17}$$

darstellen. Weil der Vorfaktor komplex ist, tragen zum Realteil sowohl der Sinus als auch der Kosinus bei. Häufig wird nur eine komplexe Lösung angegeben. Das hat dann die Frage nach der Bedeutung des Imaginärteils zur Folge. Implizit denkt man sich dabei dass der Realteil der Lösung genommen werden sollte.

Den komplexen Vorfaktor können wir durch Absolutbetrag Q und Phase ϕ darstellen, d.h.

$$x_0 - i\frac{v_0}{\omega} = Qe^{i\phi}$$

was uns auf die folgende Form führt.

$$x(t) = \mathrm{Re}\left[Qe^{i\phi}e^{i\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[Qe^{i(\omega t+\phi)}\right]$$
$$= Q\cos(\omega t + \phi) \tag{3.18}$$

Wir haben $e^{ix} \stackrel{\text{def}}{=} \cos(x) + i\sin(x)$ verwendet. Wir können nun erkennen, dass es sich bei der Lösung um eine verschobene Kosinusfunktion handelt. Der komplexe Vorfaktor bietet uns hier eine elegante Möglichkeit, die Phasenverschiebung auszudrücken.

Schließlich koennen wir die Exponentialfunktion direkt durch Sinus- und Kosinusfunktionen ausdrücken.

Der Nenner ist gerade die Determinante der zu invertierenden Matrix. Diese und weitere Matrixoperationen zweidimensionaler Matrizen sind in Anhang D.5.3 zu finden.

BAHN DES EINDIMENSIONALEN HARMONISCHEN OSZILLATORS

Die Bahn des eindimensionalen harmonischen Oszillators

$$m\ddot{x} = -cx$$

ist

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

mit

$$\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{c}{m}} \tag{3.19}$$

Dabei ist ω_0 die **Kreisfrequenz** des harmonischen Oszillators, x_0 die anfängliche Auslenkung, d.h. $x_0 = x(0)$, und $v_0 = \dot{x}(0)$ ist die Anfangsgeschwindigkeit.

Die Bewegung des harmonischen Oszillators ist also periodisch: Sie wiederholt sich nach einer **Periode** T, d.h. $x(t+T) = x(t)$. Die Periode ist die Dauer einer vollständigen Schwingung.

Definition 3.1 *FREQUENZ UND KREISFREQUENZ*
Die **Frequenz** *f ist als Inverse der Periode T definiert, d.h.*

$$f \stackrel{def}{=} \frac{1}{T} \tag{3.20}$$

Die Einheit der Frequenz ist das **Hertz (Hz)**. *(1Hz=1s^{-1})*
Die **Kreisfrequenz** *ω einer periodischen Bewegung ist als*

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{3.21}$$

definiert. Die Kreisfrequenz hat die Einheit s^{-1}. Die Einheit Hertz (Hz) ist für die Frequenz reserviert und darf nicht für die Kreisfrequenz verwendet werden.

3.6 Überblick: Lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir haben gesehen dass man Differentialgleichungen mit einem geeigneten Ansatz schnell lösen kann. Das "Raten" eines geeigneten Ansatzes ist allerdings schwierig.

Speziell für homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten eignet sich immer der **Exponentialansatz** $e^{\lambda t}$, wobei λ sowohl reell als auch komplexwertig sein kann. Dieser Ansatz wandelt eine homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten in eine algebraische Gleichung um. Letzere kann mit konventionellen Methoden gelöst werden.

Es hat sich eingebürgert, den Exponentialansatz gleich mit Hilfe der periodischen Funktionen $e^{\lambda t} = e^{i\omega t}$ auszudrücken, weil Frequenzspektren in der Physik eine wichtige Rolle spielen. Wir nennen die Funktionen $e^{i\omega t}$ auch **ebene Wellen**[12] Wird die Kreisfrequenz rein imaginär, erhalten wir wieder die Exponentialfunktion.

[12]Der Begriff "Ebene Welle" ist als Verallgemeinerung von der räumlichen Ebenen Welle $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ abgeleitet. Sie heißt *"eben"*, weil die Funktion $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ seinen Wert innerhalb einer Ebene, die senkrecht auf dem Wellenvektor $\vec{k}$ steht, nicht ändert.

Eine homogene lineare eindimensionale Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten lässt sich immer in die Form

$$ax(t) + b\partial_t x(t) + c\partial_t^2 x(t) + \ldots = 0 \tag{3.22}$$

bringen. Wenn $x(t) = \mathrm{e}^{i\omega t}$, dann gilt

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{i\omega t} \\ \partial_t x(t) &= i\omega \mathrm{e}^{i\omega t} \\ \partial_t^2 x(t) &= (i\omega)^2 \mathrm{e}^{i\omega t} \\ &\vdots \\ \partial_t^n x(t) &= (i\omega)^n \mathrm{e}^{i\omega t} \end{aligned}$$

Aus der Differentialgleichung Gl. 3.22 wird durch Einsetzen eine algebraische Gleichung

$$\begin{aligned} a\mathrm{e}^{i\omega t} + b(i\omega)\mathrm{e}^{i\omega t} + c(i\omega)^2\mathrm{e}^{i\omega t} + \ldots &= 0 \\ \Rightarrow a + b(i\omega) + c(i\omega)^2 + \ldots &= 0 \end{aligned}$$

Wir müssen also "nur noch" die Nullstellen eines möglicherweise komplexen Polynoms von ω bestimmen. Jede Nullstelle ω_j führt auf eine mögliche Partiallösung. Ein Polynom n-ter Ordnung hat exakt n Nullstellen in der komplexen Ebene, wobei allerdings mehrere Nullstellen zusammenfallen können. Dies spiegelt wider, dass eine eindimensionale Differentialgleichung n-ter Ordnung n Lösungen besitzt und damit n Anfangs- oder Randbedingungen benötigt, um eine eindeutige Lösung zu erhalten.

- Ist eine Nullstelle rein reell, erhält man eine Schwingung $\mathrm{e}^{i\omega t}$, die sich aus Kosinus- und Sinusfunktionen zusammensetzt.
- Ist die Nullstelle rein imaginär, erhält man eine Exponentialfunktion $\mathrm{e}^{\pm\lambda t}$.
- Liegen die Nullstellen selber am Ursprung, d.h. $\omega = 0$, dann erhält man eine Potenz von t wie t^n. Die Potenzen folgen aus dem Grenzübergang $\lim_{\omega\to 0} \sin(\omega t) = \omega t$. Ein Beispiel hierfür ist das freie Teilchen $m\ddot{x} = 0$.

3.7 System von Massepunkten

Betrachten wir mehrere Teilchen, ist es häufig nützlich, alle Koordinaten in einen $3N$-dimensionalen Vektor zusammmenzufassen, wobei N die Anzahl der Teilchen ist. Ist $\vec{R}_n$ die Position des n-ten Teilchens mit den Koordinaten $R_{i,n}$, dann ist

$$\vec{R} \widehat{=} \begin{pmatrix} R_{x,1} \\ R_{y,1} \\ R_{z,1} \\ R_{x,2} \\ R_{y,2} \\ R_{z,2} \\ R_{x,3} \\ R_{y,3} \\ R_{z,3} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

der $3N$-dimensionale Koordinatenvektor mit Komponenten R_j. Der Index j fasst also Koordinatenindex und Teilchenindex in einen Index zusammen. Es ist also darauf zu achten, ob sich ein Vektor bzw. seine Koordinaten auf den 3-dimensionalen Koordinaten Raum oder den $3N$-dimensionalen **Konfigurationsraum** bezieht. Für eine Gleichung im Konfigurationsraum werden die Kräfte $\vec{F}_n$, welche auf die einzelnen Atome wirken, zu einem $3N$-dimensionalen Vektor zusammengesetzt.

Die Massen kann man entsprechend in einem **Massentensor** $\boldsymbol{m}$ zusammenfassen. Ist M_n die Masse des n-ten Teilchens, dann wird jeder Koordinate dieses Teilchens die selbe Masse zugeordnet. Jede Koordinate besitzt dann eine Masse $m_{j,j} = M_n$, wenn der Index j wieder Teilchen- und Koordinatenindex zusammenfasst und von 1 bis $3N$ läuft, und n der Teilchenindex ist, der zur Koordinate j gehört.

Die Massen bilden keinen Vektor, sondern einen **Tensor**[13], der als Matrix geschrieben wird. In unserem einfachen Fall ist der Massentensor als eine einfache Diagonalmatrix mit den Elementen $m_{i,j} = m_{i,i}\delta_{i,j}$ darstellbar. Verwenden wir die Schreibweise von M_n mit dem Teilchenindex, sind die Elemente des Massentensors

$$\boldsymbol{m} \hat{=} \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & m_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & m_{3,3} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & m_{4,4} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{5,5} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{6,6} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Warum ist die Masse ein Tensor und kein Vektor?

- Man sieht leicht, dass sich die Massen nicht ändern, wenn man das Koordinatensystem wechselt. Wir werden sehen, dass die Transformationseigenschaften unter Koordinatentransformationen eine wesentliche Eigenschaft eines Vektors ist.
- Zum anderen haben die Newtonschen Bewegungsgleichungen im Konfigurationsraum die Form

  $$\boldsymbol{m}\ddot{\vec{R}} = \vec{F}(\vec{R}, \dot{\vec{R}}, t)$$

  Würde ich den Massentensor auf der linken Seite durch einen Vektor ersetzen, dann stünde auf der linken Seite ein Skalar und auf der rechten Seite ein $3N$-dimensionaler Vektor.

In der Tat gibt es Systeme, in denen die Masse nicht mehr als Diagonalmatrix geschrieben werden kann. Dies ist im Festkörper der Fall: Die Kristallstruktur führt dazu, dass die Masse eines Leitungselektrons von der Richtung der angreifenden Kraft relativ zum Kristallgitter abhängt. Damit ist sie nicht mehr isotrop und der Massentensor kann Einträge in allen Elementen besitzen.

Abschließend können die Newtonschen Bewegungsgleichungen also in den folgenden Formen geschrieben werden

- Matrix-Vektor-Schreibweise: Die Masse ist ein $3N \times 3N$ Matrix und Die Position und die Kraft sind $3N$-dimensionale Vektoren.

  $$\boldsymbol{m}\ddot{\vec{R}} = \vec{F}(\vec{R}, \dot{\vec{R}}, t)$$

- Dreidimensionale Vektorschreibweise: Jeder Vektor ist 3-dimensional und der Index zeigt an, zu welchem Atom er gehört. Die Masse kann in diesem Fall als einfache Zahl geschrieben werden. Es gibt N solche Gleichungen, nämlich für jedes Atom, also für jedes n, eine.

  $$M_n\ddot{\vec{R}}_n = \vec{F}_n(\vec{R}_1, \dots, \vec{R}_n, \dot{\vec{R}}_1, \dots, \dot{\vec{R}}_n, t)$$

[13] Für den Moment können wir den Begriff des Tensors dem einer Matrix gleichsetzen. Später werden wir sehen, dass ein Tensor auch ein Objekt mit mehr als zwei Indizes sein kann. Damit eine physikalische Grösse ein Tensor ist, wird häufig gefordert, dass sie sich unter Koordinatentransformationen auf bestimmter Weise transformiert.

- Komponentenschreibweise: Alle Größen sind Zahlen. Die Gleichung steht für $3N$ einzelne Gleichungen entsprechend der $3N$ Werte für den Index i.

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{3N} m_{i,j}\ddot{R}_j}_{m_{i,i}\ddot{R}_i} = F_i(R_1,\dots,R_{3N},\dot{R}_1,\dots,\dot{R}_{3N},t)$$

Für die folgenden Diskussionen ist es wichtig, diese unterschiedlichen Notationen zu verstehen und auseinanderhalten zu können.

3.8 Mehrdimensionaler harmonischer Oszillator

Stellen wir uns vor wir wollten die Schwingungsmoden und Frequenzen eines Moleküls bestimmen. Die Molekülstruktur sei durch einen $3N$-dimensionalen Positionsvektor im Konfigurationsraum gegeben. Die potentielle Energie $V(\vec{R})$ als Funktion der Atompositionen sei bekannt.

Zunächst bestimmen wir die Gleichgewichtslage, also die Struktur, welche das Molekül bei tiefen Temperaturen einnimmt. Diese entspricht dem Minimum R_i^0 der potentiellen Energie $V(\vec{R})$, also

$$\left.\frac{\partial V}{\partial R_i}\right|_{\vec{R}^0} = 0 \tag{3.23}$$

Bei hinreichend tiefen Temperaturen wird das Molekül nur geringfügig aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt. Deshalb bilden wir eine Taylor-Entwicklung[14] des Potentials um die Gleichgewichtslage und brechen nach dem Glied zweiter Ordnung ab.

$$V(\vec{R}) = V(\vec{R}^0) + \sum_i \underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial R_i}\right|_{\vec{R}^0}}_{=0 \text{ nach } (3.23)} (R_i - R_i^0) + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \underbrace{\left.\frac{\partial^2 V}{\partial R_i \partial R_j}\right|_{\vec{R}^0}}_{\stackrel{\text{def}}{=} c_{ij}} (R_i - R_i^0)(R_j - R_j^0) + \dots$$

Damit haben wir das Problem auf einen mehrdimensionalen harmonischen Oszillator abgebildet.

Wir werden im Folgenden sehen, wie man den vieldimensionalen harmonischen Oszillator durch geschickte Transformationen in viele eindimensionale harmonische Oszillatoren zerlegen kann. Der eindimensionalen harmonischen Oszillators stellt aber seit Kapitel 3.5 keine Schwierigkeit mehr für uns dar.

Im Folgenden wird das Lösungsschema beschrieben. Diese Herleitung erfüllt noch den weiteren Zweck, uns mit Matrizenrechnung vertraut zu machen. Es ist sinnvoll, sich an dieser Stelle im Angang D.5 die entsprechenden mathematischen Grundlagen anzusehen. Ich verwende sowohl die Matrix-Vektor Schreibweise als auch die Komponentenschreibweise, um die Übersetzung zu üben. Links steht jeweils der Ausdruck in Komponentenschreibweise und rechts die Vektor-Matrix-Notation.[15].

1. Sei $\vec{x} = \vec{R} - \vec{R}^0$ die Auslenkung vom Minimum. Dann lautet die Newtonsche Bewegungsgleichung für dieses System

$$\underbrace{\sum_j m_{i,j}\ddot{x}_j}_{=m_{i,i}\ddot{x}_i} = -\sum_j c_{i,j}x_j \qquad\qquad \boldsymbol{m}\cdot\ddot{\vec{x}} = -\boldsymbol{c}\cdot\vec{x}$$

   mit der Massenmatrix [16] $\boldsymbol{m} \stackrel{\wedge}{=} m_{ij} = m_{ii}\delta_{ij}$, wobei m_{ii} die Masse des Teilchens ist, das zur i-ten Komponente gehört.

[14] Für die Taylor-Entwicklung siehe App. D.15 auf S. 291

[15] Alle in mathematischer Umgebung fett gedruckten Zeichen sind Matrizen. Beispiel: $c_{ij} \rightarrow \boldsymbol{c}$

[16] Der folgende Ausdruck sagt, dass die Massenmatrix eine Diagonalmatrix ist. Auf der Diagonalen der Matrix stehen die Massen M_i der entsprechenden Teilchen.

2. Variablentransformation von $\vec{x}$ auf[17]

$$y_i \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{m_{ii}}\, x_i \qquad\qquad \vec{y} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\boldsymbol{m}}\, \vec{x}$$

Wir haben hier die Wurzel einer Matrix gebildet. Dies ist wahrscheinlich ein ungewohntes Konzept:

Im vorliegenden Fall ist

$$\left(\sqrt{\boldsymbol{m}}\right)_{i,j} = \sqrt{m_{i,i}}\, \delta_{i,j}$$

was man leicht ueberprüfen kann. Folgende Gleichung muss erfüllt sein: $\sqrt{\boldsymbol{m}}\sqrt{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{m}$, bzw. $\sum_k \left(\sqrt{\boldsymbol{m}}\right)_{i,k} \left(\sqrt{\boldsymbol{m}}\right)_{k,j} = m_{i,j}$.

Allgemein ist eine **Funktion einer Matrix** so definiert, dass man die Matrix in die Potenzreihenentwicklung der Funktion einsetzt. Das Resultat ist wiederum eine Matrix. Hat die Matrix, wie in diesem Fall, Diagonalform, dann ist das Resultat wieder eine Diagonalmatrix. Die Diagonalelemente des Resultats erhält man, indem man die Funktion auf die entsprechenden Diagonalelemente des Arguments anwendet. Mehr zum Thema Funktionen von Matrizen findet man in Anhang. D.5.6 auf S. 250.

Mit dieser Definition und der Transformation auf die neue Variable $\vec{y}$ erhalten wir

$$\ddot{y}_i = -\sum_j \underbrace{\frac{1}{\sqrt{m_{ii}}} \cdot c_{ij} \frac{1}{\sqrt{m_{jj}}}}_{D_{i,j}} y_j \qquad\qquad \ddot{\vec{y}} = -\underbrace{\boldsymbol{m}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{c} \boldsymbol{m}^{-\frac{1}{2}}}_{\boldsymbol{D}} \vec{y} \tag{3.24}$$

Nun definieren wir uns eine neue Größe, die dynamische Matrix:

Definition 3.2 *DYNAMISCHE MATRIX* [a]

$$D_{i,j} \stackrel{def}{=} \frac{1}{\sqrt{m_{ii}}} c_{i,j} \frac{1}{\sqrt{m_{jj}}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{D} \stackrel{def}{=} \boldsymbol{m}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{c} \boldsymbol{m}^{-\frac{1}{2}} \tag{3.25}$$

[a] DIESE GLEICHUNG GEHT DAVON AUS, DASS DIE MASSENMATRIX SYMMETRISCH IST. IST DAS NICHT ERFÜLLT, MUSS DIE MASSENMATRIX AUF DER LINKEN SEITE TRANSPONIERT WERDEN.

3. Als nächstes bestimmen wir die Eigenwerte und Eigenvektoren der dynamischen Matrix $\boldsymbol{D}$. Mehr zum Thema Eigenwertgleichungen findet man in Anhang D.5.5 auf S. 249. Die Eigenwertgleichung ist [18] [19]

$$\sum_j D_{ij} U_{jk} = U_{ik} d_k \qquad\qquad \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{d}$$

$$\Leftrightarrow \qquad D_{ij} = \sum_k U_{ik} d_k U^*_{ik} \qquad\qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{U} \boldsymbol{d} \boldsymbol{U}^\dagger$$

[17] Die Umformung $\ddot{\vec{x}} = \boldsymbol{m}^{-1} \boldsymbol{c} \vec{x}$ wird hier deshalb nicht gewählt, weil die Matrix $\boldsymbol{m}^{-1}\boldsymbol{c}$ nicht symmetrisch ist, was das Diagonalisieren erschwert.

[18] Da die dynamische Matrix $\mathcal{D}$ symmetrisch und reell ist, ist sie auch hermitesch. Eine Matrix heißt hermitesch, wenn die Matrix durch Transposition und komplexer Konjugation in sich selbst übergeht, d.h. wenn $A_{ij} = A^*_{ji}$. Hermitesche Matrizen haben reelle Eigenwerte und Eigenvektoren, die orthogonal zu einander gewählt werden können. Die Eigenvektoren können zu einer Matrix $\boldsymbol{U}$ zusammengefasst werden, die untitär ist, wenn die Eigenwerte orthogonal und normiert sind.

[19] Notation: $\boldsymbol{M}^*$ = konjugiert komplex; $\boldsymbol{M}^{-1}$ = invers; $\boldsymbol{M}^\top$ = transponiert; $\boldsymbol{M}^\dagger$ = hermitesch konjugiert oder adjungiert=transponiert und konjugiert komplex

Die Matrix $\boldsymbol{U}$ enthält die Eigenvektoren. Dabei ist der erste Index i von $U_{i,k}$ der Vektorindex und der zweite Index sagt, um welchen Eigenvektor es sich handelt, nämlich den zum Eigenwert d_k. Die Matrix $\boldsymbol{d}$ ist eine Diagonalmatrix, welche auf der Hauptdiagonalen die Eigenwerte d_k enthält.

Eine hermitesche Matrix $D_{ij} = D^*_{ji}$ hat reelle Eigenwerte d_i und orthogonale[20] Eigenvektoren $\sum_i U^*_{ij} U_{ik} = \delta_{jk}$. Das bedeutet, dass $\boldsymbol{U}$ **unitär** ist. Es gilt also $\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}^\dagger$.

Eine Diagonalisierung wird auch als **Hauptachsentransformation** bezeichnet.

4. Variablentransformation von $\vec{y}$ auf

$$\boxed{\vec{z} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{U}^\dagger \vec{y}} \tag{3.26}$$

führt uns von Gl. 3.24 auf

$$\begin{aligned} \ddot{y}_i &= -\sum_j D_{i,j} y_j & \ddot{\vec{y}} &= -\boldsymbol{D} \cdot \vec{y} \\ &= -\sum_{j,k} U_{i,k} d_k U^*_{j,k} y_j & &= -\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{U}^\dagger \cdot \vec{y} \\ \Leftrightarrow \underbrace{\sum_i U^*_{i,n} \ddot{y}_i}_{\ddot{z}_n} &= -\sum_k \underbrace{\sum_i U^*_{i,n} U_{i,k}}_{\delta_{n,k}} d_k \underbrace{\sum_j U^*_{j,k} y_j}_{z_k} & \underbrace{\boldsymbol{U}^\dagger \cdot \ddot{\vec{y}}}_{=\ddot{\vec{z}}} &= -\underbrace{\boldsymbol{U}^\dagger \cdot \boldsymbol{U}}_{=1} \cdot \boldsymbol{d} \cdot \underbrace{\boldsymbol{U}^\dagger \vec{y}}_{=\vec{z}} \\ \Leftrightarrow \ddot{z}_n &= -d_n \cdot z_n & \ddot{\vec{z}} &= \boldsymbol{d} \vec{z} \end{aligned}$$

wobei die d_j die Diagonalelemente der Diagonalmatrix $\boldsymbol{d}$ sind.

5. Man erhält also eindimensionale, entkoppelte Oszillatoren, die jeweils nur noch von einer Variablen abhängen: Lösung der Differentialgleichung über den Ansatz:

$$z_j(t) = A_j \mathrm{e}^{i\omega_j t} + B_j \mathrm{e}^{-i\omega_j t} \qquad \vec{z}(t) = \mathrm{e}^{i\boldsymbol{\Omega} t} \vec{A} + \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{\Omega} t} \vec{B}$$

Die Lösung ist:

$$\omega_j = \sqrt{d_j} \qquad\qquad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{d}^{\frac{1}{2}}$$

$\boldsymbol{\Omega}$ ist eine Diagonalmatrix mit Elementen $\Omega_{i,j} = \omega_i \delta_{i,j}$.

6. Durch Rücktransformation $\vec{z} \to \vec{y} \to \vec{x}$ erhält man die allgemeine Lösung als

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \boldsymbol{m}^{-\frac{1}{2}} \vec{y}(t) = \boldsymbol{m}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{U} \cdot \vec{z}(t) \\ &= \boldsymbol{m}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{U} \left[\mathrm{e}^{i\boldsymbol{\Omega} t} \vec{A} + \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{\Omega} t} \vec{B} \right] \end{aligned} \tag{3.27}$$

in Vektor-Matrix Notation. Dabei hat die Matrix $\mathrm{e}^{i\boldsymbol{\Omega} t}$ die Elemente $\left(\mathrm{e}^{i\Omega t}\right)_{i,j} = \mathrm{e}^{i\omega_i t} \delta_{i,j}$. Der zu Gl. 3.27 analoge Ausdruck in Komponentenschreibweise ist

$$\begin{aligned} x_j(t) &= \frac{1}{\sqrt{M_j}} \cdot y_j(t) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{M_j}} \cdot U_{jk} z_k(t) \\ &= \sum_k \frac{1}{\sqrt{M_j}} U_{jk} \left[A_k \mathrm{e}^{i\omega_k t} + B_k \mathrm{e}^{-i\omega_k t} \right] \end{aligned} \tag{3.28}$$

[20] Eigenvektoren zu gleichen Eigenwerten sind nicht automatisch orthogonal. Sie können aber durch geeignete Überlagerung orthonormiert werden. Man kann nämlich zeigen, dass jede Überlagerung von zwei Eigenvektoren zum selben Eigenwert wieder ein Eigenvektor des entsprechenden Eigenwerts ist. Dies erlaubt dann die Anwendung des Gram-Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens.

Die Partiallösungen sind die Lösungen, bei denen nur einer der Koeffizienten zu k von Null verschieden ist.

7. Um die Lösung eindeutig festzulegen, wählen wir einen Satz von Anfangsbedingungen $\vec{x}(0)=\vec{x}_0$ und $\dot{\vec{x}}(0)=\vec{v}_0$ und bestimmen daraus die Koeffizienten $\vec{A}$ und $\vec{B}$. Wir leiten das Resultat zunächst in Vektor-Matrix Notation ab. Die analogen Ausdrücke in Komponentenschreibweise folgen danach.

$$\vec{x}(0) \stackrel{Gl.\ 3.27}{=} \boldsymbol{m}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{U}\left[\vec{A}+\vec{B}\right]$$
$$\dot{\vec{x}}(0) \stackrel{Gl.\ 3.27}{=} \boldsymbol{m}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{U}(i\boldsymbol{\Omega})\left[\vec{A}-\vec{B}\right]$$

Wir lösen diese Gleichungen nach den Koeffizienten $\vec{A}$ und $\vec{B}$ auf

$$\vec{A}+\vec{B} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{m}^{\frac{1}{2}}\vec{x}(0)$$
$$\vec{A}-\vec{B} = -i\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{m}^{\frac{1}{2}}\dot{\vec{x}}(0)$$

Anstelle die Gleichung nach $\vec{A}$ und $\vec{B}$ aufzulösen, schreiben wir die allgemeine Lösung auf $\vec{A}+\vec{B}$ und $\vec{A}-\vec{B}$ um.

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \boldsymbol{m}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{U}\frac{1}{2}\left[\underbrace{\left(\mathrm{e}^{i\boldsymbol{\Omega}t}+\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{\Omega}t}\right)}_{2\cos(\boldsymbol{\Omega}t)}\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\underbrace{\left(\mathrm{e}^{i\boldsymbol{\Omega}t}-\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{\Omega}t}\right)}_{2i\sin(\boldsymbol{\Omega}t)}\left(\vec{A}-\vec{B}\right)\right]\\ &= \boldsymbol{m}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{U}\left[\cos(\boldsymbol{\Omega}t)\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{m}^{\frac{1}{2}}\vec{x}(0)+\sin(\boldsymbol{\Omega}t)\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{m}^{\frac{1}{2}}\dot{\vec{x}}(0)\right]\end{aligned}$$

Analog zu vorhergehenden Gleichungen sehen wir, dass Matrix $\sin(\boldsymbol{\Omega})$ die Elemente $\left(\sin(\boldsymbol{\Omega})\right)_{i,j}=\sin(\omega_i t)\delta_{i,j}$ hat.

In Komponentenschreibweise beginnen wir wieder mit den Anfangsbedingungen

$$x_j(0) \stackrel{Gl.\ 3.28}{=} \frac{1}{\sqrt{m_{jj}}}\sum_k U_{j,k}\left[A_k+B_k\right]$$
$$\dot{x}_j(0) \stackrel{Gl.\ 3.28}{=} \frac{1}{\sqrt{m_{jj}}}\sum_k U_{j,k}(i\omega_k)\left[A_k-B_k\right]$$

aus denen wir die Koeffizienten A_k und B_k bestimmen

$$A_k+B_k = \sum_j \underbrace{U^{-1}_{k,j}}_{=U^*_{j,k}}\sqrt{m_{jj}}x_j(0) \tag{3.29}$$
$$A_k-B_k = \sum_j \frac{1}{i\omega_k}\underbrace{U^{-1}_{k,j}}_{=U^*_{j,k}}\sqrt{m_{jj}}\dot{x}_j(0) \tag{3.30}$$

welche wir in die allgemeine Lösung Gl. 3.28 einsetzen.

$$\begin{aligned}x_j(t) &= \sum_k \frac{1}{\sqrt{m_{jj}}}U_{jk}\left[A_k\mathrm{e}^{i\omega_k t}+B_k\mathrm{e}^{-i\omega_k t}\right]\\ &= \sum_k \frac{1}{\sqrt{m_{jj}}}U_{jk}\frac{1}{2}\left[\underbrace{\left(\mathrm{e}^{i\omega_k t}+\mathrm{e}^{-i\omega_k t}\right)}_{2\cos(\omega_k t)}(A_k+B_k)+\underbrace{\left(\mathrm{e}^{i\omega_k t}-\mathrm{e}^{-i\omega_k t}\right)}_{2i\sin(\omega_k t)}(A_k-B_k)\right]\\ &\stackrel{Eqs.\ 3.29,3.30}{=} \sum_{k,\ell}\frac{1}{\sqrt{m_{j,j}}}U_{j,k}\left[\cos(\omega_k t)\underbrace{U^*_{\ell,k}}_{\boldsymbol{U}^{-1}=\boldsymbol{U}^\dagger}\sqrt{m_{\ell,\ell}}\,x_\ell(0)+\frac{\sin(\omega_k t)}{\omega_k}\underbrace{U^*_{\ell,k}}_{\boldsymbol{U}^{-1}=\boldsymbol{U}^\dagger}\sqrt{m_{\ell,\ell}}\,\dot{x}_\ell(0)\right]\end{aligned}$$

Die Lösung setzt sich also aus Einzelschwingungen zusammen, den sogenannten **Schwingungsmoden**. Ein Schwingungsmode ist durch einen Vektor $\vec{g}_k$ mit

$$g_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{M_j}} U_{j,k}$$

und einer Kreisfrequenz ω_k charakterisiert. Da die Eigenvektoren der dynamischen Matrix orthogonal sind, gilt die Beziehung

$$\vec{g}_k^* \boldsymbol{m} \vec{g}_l = \sum_{i,j} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{m_{ii}}} U_{i,k}\right)^*}_{g^*_{i,k}} \underbrace{m_{ii}\delta_{i,j}}_{m_{i,j}} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{m_{jj}}} U_{j,l}\right)}_{g_{j,l}} = \sum_i U^*_{i,k} U_{i,l} \stackrel{\boldsymbol{U}^\dagger \boldsymbol{U}=\boldsymbol{1}}{=} \delta_{k,l}$$

. Die Schwingungsmoden stehen also nicht senkrecht aufeinander. Dennoch gilt zwischen ihnen eine verallgemeinerte Orthogonalitätsbeziehung.

3.9 Gedämpfter harmonischer Oszillator in einer Dimension

Die Bewegungsgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators lautet

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha\dot{x} \tag{3.31}$$

wobei m die Masse, c die Kraftkonstante und α der Reibungskoeffizient ist.

Wenn wir den Exponentialansatz für eine Partiallösung:

$$x(t) = A \cdot \mathrm{e}^{i\omega t} \tag{3.32}$$

in Gl. 3.31 einsetzen, erhalten wir eine algebraische Gleichung. Diese lösen wir nach ω auf.

$$\begin{aligned} -m \cdot \omega^2 &\stackrel{Gln.\ 3.31,3.32}{=} -c - \alpha i\omega \\ \omega^2 - i\frac{\alpha}{m}\omega - \frac{c}{m} &= 0 \\ \left(\omega - \frac{i\alpha}{2m}\right)^2 &= \underbrace{\frac{c}{m}}_{\omega_0^2} - \frac{\alpha^2}{4m^2} \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\omega = \frac{\alpha i}{2m} \pm \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}} \tag{3.34}$$

Dabei ist $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ nach Gl. 3.19 die Eigenfrequenz des entsprechenden ungedämpften harmonischen Oszillators.

Die allgemeine Lösung des gedämpften harmonischen Oszillators ist

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2m}t} \left[A\mathrm{e}^{+i\sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2} t} + B\mathrm{e}^{-i\sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2} t} \right] \tag{3.35}$$

wobei die komplexen Konstanten A, B durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden müssen.

Die Kreisfrequenz ω aus Gl. 3.34 kann reelle und komplexe Werte annehmen, je nachdem ob der Radikand[21] in der Wurzel positiv oder negativ ist.

Entsprechend macht man die folgenden Fallunterscheidungen. Die Bahnkurven dieser Fälle sind in Abb. 3.5 im Überblick dargestellt.

[21] Das Wurzelziehen wird auch Radizieren genannt. Das Argument der Wurzelfunktion wird deshalb auch der Radikand genannt. Dabei ist es unerheblich, ob wir speziell die Quadratwurzel oder eine andere betrachten.

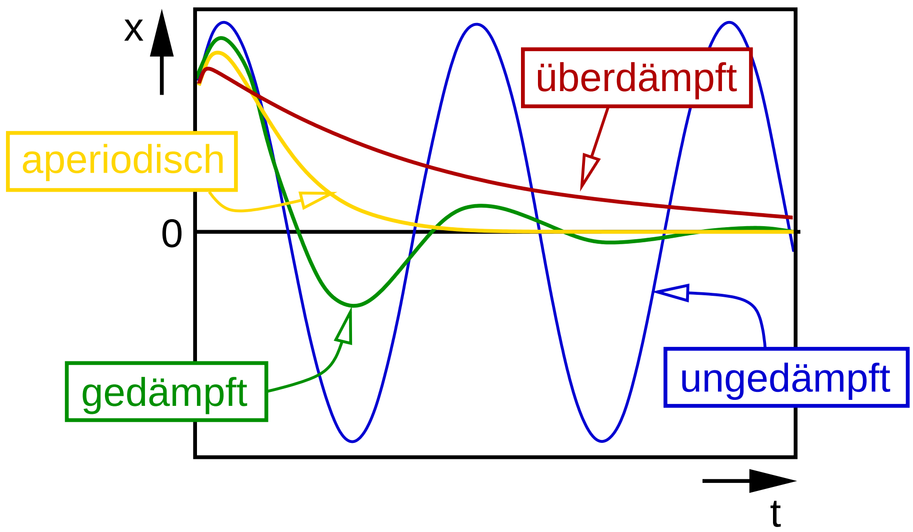


Abb. 3.5: Bahnkurven des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit unterschiedlichen Werten der Reibungskoeffizienten α. Die Wellenzahl des ungedämpften harmonischen Oszillators wurde gleich $\omega_0 = 1$ gesetzt. Die Anfangsbedingungen wurden so gewählt, dass Anfangsposition und Anfangswert den Wert eins haben. (1) Ungedämpfter Fall $\alpha = 0$. (2) Gedämpfter Fall mit $\alpha/(2m) = 0.3$. Beachte, dass die Periode geringfügig länger als im ungedämpften Fall ist. Die Umhüllende ist eine Exponentialkurve. (3) Aperiodischer Grenzfall $\alpha = 2m\omega_0$. (4) Kriechfall. $\alpha = 2m(\omega_0 + 4)$. Beachte, dass das Minimum im Kriechfall trotz höherer Reibung langsamer erreicht wird als im aperiodischen Grenzfall: Die Reibung ist so hoch, dass sich das System nur langsam bewegen kann und damit das Minimum bei $x = 0$ nur langsam erreicht wird.

Wir unterscheiden vier Spezialfälle des gedämpften harmonischen Oszillators mit qualitativ unterschiedlichen Bahnkurven.

- Ungedämpfte Schwingung $\alpha = 0$
- Gedämpfte Schwingung: $\frac{\alpha^2}{4m^2} < \omega_0^2$.
- **Kriechfall** (überdämpfte Schwingung): $\frac{\alpha^2}{4m^2} > \omega_0^2$.
- **Aperiodischer Grenzfall** $\frac{\alpha^2}{4m^2} = \omega_0^2$.

3.9.1 Gedämpfte Schwingung

Eine **gedämpfte Schwingung** liegt bei einer kleinen Reibung vor, welche die Oszillationen noch nicht unterdrückt. Das bedeutet, dass die Kreisfrequenz nicht rein imaginär ist. Entsprechend Gl. 3.34 gilt dies für

$$0 < \alpha < 2m\omega_0$$

Die Bahn hat nach Gl. 3.35 die Form

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left[A\mathrm{e}^{+i\bar{\omega}t} + B\mathrm{e}^{-i\bar{\omega}t}\right] \tag{3.36}$$

wobei

$$\bar{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2} \tag{3.37}$$

und

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha}{2m} \tag{3.38}$$

Wir wollen Gl. 3.36 umstellen um uns die Bedeutung von $\bar{\omega}$ und λ deutlich zu machen: Man kann Gl. 3.36 auch als

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2m}t}\mathrm{Re}\left[A\mathrm{e}^{+i\bar{\omega}t}\right] \tag{3.39}$$

schreiben. Da die Anfangsbedingingen physikalisch gewählt und daher reell sind, ist die Bahnkurve reell. Daraus folgt[22] $B = A^*$, woraus sich die obige Form ergibt.

Häufig findet man dass die Lösung auch einfach in komplexer Form als

$$x(t) = A\mathrm{e}^{+i\bar{\omega}t}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2m}t} \tag{3.40}$$

geschrieben wird. Eigentlich ist das eine unsaubere Schreibweise von Gl. 3.39. Implizit erwartet man dabei immer, dass man sich auf den Realteil beschränkt.

Eine andere Form erhält man, wenn man nun den komplexen Koeffizienten in Gl. 3.39 durch Amplitude und Phase darstellt, also $A = |A|\mathrm{e}^{i\phi}$. Dann erhalten wir

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2m}t}\mathrm{Re}\left[|A|\mathrm{e}^{+i\bar{\omega}t+\phi}\right] = |A|\cos(\bar{\omega}t + \phi)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2m}t} \tag{3.41}$$

An dieser Form erkennt man deutlich, dass das System Schwingungen mit der Kreisfrequenz $\bar{\omega}$ aus Gl. 3.37 ausführt, dessen Amplitude aber exponentiell abklingt. Die Lösung ist eine verschobene Kosinusfunktion $\cos(\bar{\omega}t)$, die durch eine Exponentialfunktion $|A|\mathrm{e}^{-\lambda t}$ moduliert wird. Die Exponentialfunktion ist die Einhüllende der Bahnkurve. Die Größe

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha}{2m} \tag{3.42}$$

aus Gl. 3.38 ist die **Dämpfungskonstante**. Die Dämpfungskonstante ist allgemein durch den exponentiellen Abfall $\mathrm{e}^{-\lambda t}$ einer Amplitude definiert. Die Dämpfungskonstante kann man auch durch die **Abklingzeit** $\tau \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\lambda}$ darstellen, die beschreibt, in welcher Zeit sich die Amplitude um den Faktor $1/e$ verringert[23].

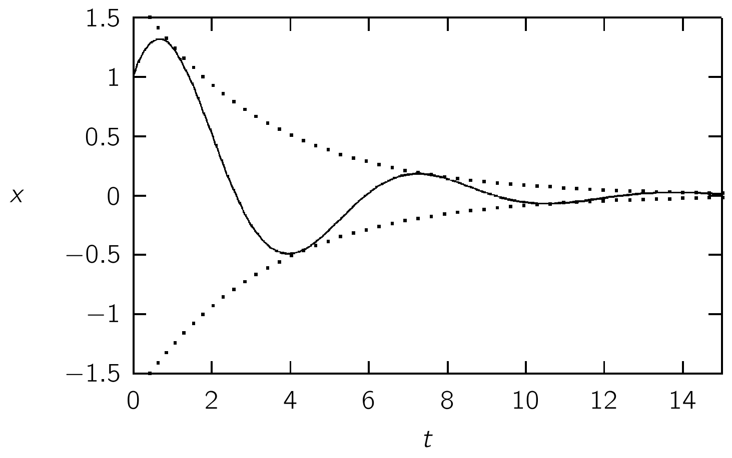


Abb. 3.6: Gedämpfte Schwingung (ganze Linie) mit Einhüllenden (Punkte)

[22]
$$0 = \mathrm{Im}\left[A\mathrm{e}^{+i\bar{\omega}t}\right] = \mathrm{Im}[A]cos(\bar{\omega}t) + \mathrm{Re}[A]sin(\bar{\omega}t) + \mathrm{Im}[B]cos(\bar{\omega}t) - \mathrm{Re}[B]sin(\bar{\omega}t)$$
$$\Rightarrow \mathrm{Im}[A] = -\mathrm{Im}[B] \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Re}[A] = \mathrm{Re}[B]$$
$$\Rightarrow A = B^*$$

[23] $e = 2.71828...$ ist Euler's Konstante

Die Periode der Schwingung $T = 2\pi/\bar{\omega}$ ist etwas länger als im ungedämpften Fall, weil die Wellenzahl $\bar{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ kleiner ist als die des ungedämpften harmonischen Oszillators.

Die Qualität eines Resonators kann dem Gütefaktor oder **Q-Faktor** quantifiziert werden. Der Q-Faktor ist durch

$$Q = 2\pi \left(\frac{\Delta E}{E}\right)^{-1} = \frac{\omega}{|\partial_t \ln[E(t)]|}$$

definiert, wobei ΔE der Energieverlust während einer Periode durch die Reibung ist und E die Energie am Anfang der Periode. Je höher der Q-Faktor, desto länger bleibt die Schwingung erhalten.

Für den gedämpften harmonischen Oszillator hat der Q-Faktor die Form [24]

$$Q = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\lambda}\right)^2 - 1} \overset{\lambda << \omega_0}{\approx} \frac{\omega_0}{2\lambda} = \sqrt{\frac{mc}{\alpha^2}}$$

Der Q-faktor für den aperiodischen Grenzfall ist $Q = \frac{1}{2}$

3.9.2 Kriechfall (Überdämpfte Schwingung)

Der **Kriechfall**, bzw. eine **überdämpfte Schwingung**, liegt vor, wenn die Oszillationen vollständig unterdrückt sind. Diese Bahnkurve besitzt maximal einen Nulldurchgang und nicht unendlich viele wie im gedämpften Fall.

Der Kriechfall liegt vor, wenn die Reibung größer als $2m\omega_0$ ist. In diesem Fallist Frequenz ist rein imaginär, was zu anstelle der oszillierenden Beiträge wiederum zu exponentiellen Termen führt.

Die Bahn hat nach Gl. 3.35 die Form

$$x(t) = A\mathrm{e}^{-\lambda_+ t} + B\mathrm{e}^{-\lambda_- t} \tag{3.43}$$

wobei

$$\lambda_+ = \frac{\alpha}{2m} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - \frac{c}{m}} \tag{3.44}$$

$$\lambda_- = \frac{\alpha}{2m} - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - \frac{c}{m}} \tag{3.45}$$

Man erhält also die Überlagerung von zwei Exponentialfunktionen mit unterschiedlichem Abklingkonstanten. Ein Beispiel ist in Abb. 3.7 dargestellt. Bis auf eine kurze Einschwingzeit, wird die Bahnkurve durch die Exponentialfunktion mit der kleineren Abklingkonstante dominiert. Dies hat Konsequenzen für den Umgang mit Optimierungsproblemen, welche später, in Abschnitt 3.9.4, noch diskutiert werden.

[24] Ausgehend von $x(t) = A\mathrm{e}^{i\omega t} + A^*\mathrm{e}^{-i\omega^* t}$ mit einer komplexen Kreisfrequenz $\omega = \bar{\omega} - i\lambda$ bestimmt man zunächst

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}cx^2 = \mathrm{Re}\left[A^2(c - m\omega^2)\mathrm{e}^{-2i\omega t}\right] + |A|^2(c + m|\omega|^2)\mathrm{e}^{-2\lambda t}$$
$$= \left\{\mathrm{Re}\left[A^2(c - m\omega^2)\mathrm{e}^{-2i\bar{\omega} t}\right] + |A|^2(c + m|\omega|^2)\right\}\mathrm{e}^{-2\lambda t}$$

mit $\lambda = \frac{1}{2}(\omega - \omega^*)$. Der erste Teil in der Klammer ist ein kleiner oszillierender Term, der vernachlässigt wird. Damit erhält man $\partial_t \ln[E] = -2\lambda$.

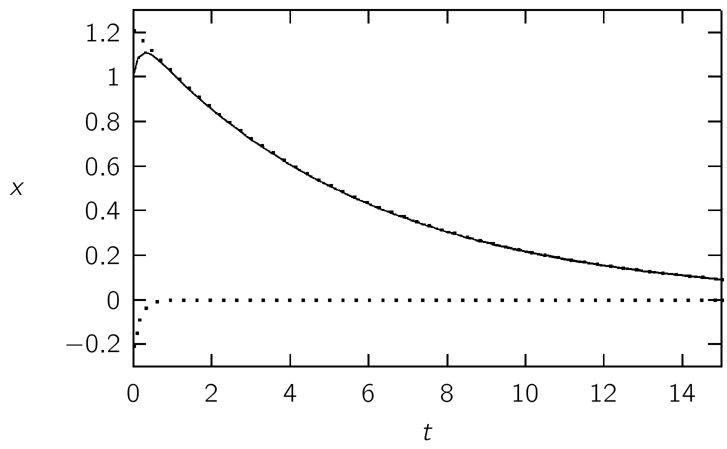


Abb. 3.7: Überdämpfte Schwingung und seine beiden exponentiellen Beiträge. Beachte, dass das Langzeitverhalten durch die langsame Abklingkonstante bestimmt wird.

Das Langzeitverhalten wird von der langsamen Abklingkonstante dominiert: $x(t) \overset{\text{große } t}{\approx} B \cdot \mathrm{e}^{-\lambda_- t}$

3.9.3 Aperiodischer Grenzfall

Der **aperiodische Grenzfall** befindet sich genau zwischen dem gedämpften und dem überdämpften Bereich. Es gilt also

$$\frac{\alpha^2}{4m^2} = \frac{c}{m} \Rightarrow \alpha = 2m\omega_0$$

Der aperiodische Grenzfall ist von besonderer Bedeutung für Optimierungsverfahren, aber auch besonders knifflig zu behandeln. Man benötigt hierbei einen Trick, der übrigens auf andere Fälle übertragbar ist.

Betrachten wir die komplexen Frequenzen Gl. 3.34 dann erhalten wir nur eine einzige Abklingkonstante, nämlich $\lambda = \alpha/(2m)$. Scheinbar existiert nur eine einzige Lösung. Wir benötigen aber genau zwei linear unabhängige Lösungen um die Anfangsbedingungen erfüllen zu können.

Um zu verstehen was hier geschieht nähern wir uns dem aperiodischen Grenzfall von der einen oder anderen Seite. Hier wählen den Zugang von der überdämpften Region aus und verwenden dehalb Gl. 3.43

$$x(t) = A\mathrm{e}^{-\lambda_+ t} + B\mathrm{e}^{-\lambda_- t} \tag{3.46}$$

wobei

$$\lambda_+ = \frac{\alpha}{2m} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - \frac{c}{m}} \tag{3.47}$$

$$\lambda_- = \frac{\alpha}{2m} - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - \frac{c}{m}} \tag{3.48}$$

Im richtigen Grenzübergang verschwindet $\lambda_+ - \lambda_-$, sodass wir eine Taylorentwicklung in dieser Größe vornehmen werden.

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cdot \mathrm{e}^{-\lambda_+ t} + B\mathrm{e}^{-\lambda_- t} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2} \cdot t} \left[A \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2} \cdot t} + B \cdot \mathrm{e}^{+\frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2} \cdot t} \right] \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung definieren wir zwei Größen

$$\bar{\lambda} \overset{\text{def}}{=} \frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2} \qquad \beta \overset{\text{def}}{=} \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2}$$

Der aperiodischen Grenzfall entspricht dem Grenzfall $\beta \to 0$.

Einsetzen und Taylor-Entwicklung liefert[25]:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{-\bar{\lambda}t}\left[A\mathrm{e}^{-\beta t} + B\mathrm{e}^{\beta t}\right] \\ &= \mathrm{e}^{-\bar{\lambda}t}\left[A(1-\beta t) + B(1+\beta t) + O(\beta t)^2\right] \\ &= \mathrm{e}^{-\bar{\lambda}t}\left[\underbrace{A+B}_{U} + \underbrace{(B-A)\beta}_{V} t + O(\beta^2)\right] \\ &= U\mathrm{e}^{-\bar{\lambda}t} + V t\mathrm{e}^{-\bar{\lambda}t} + O(\beta^2) \end{aligned}$$

Die Terme höherer Ordnung vernachlässigen wir, da sie gegenüber den anderen Termen mit $\beta \to 0$ verschwindend klein werden.

Etwas verwirrend mag sein, dass der Parameter V selber proportional zu β ist und daher verschwinden sollte. Tatsächlich wird V jedoch für jeden Wert von β vollständig von den Anfangswerten bestimmt. V ist also selber eine Funktion von β, die aber beim Übergang $\beta \to 0$ endlich bleibt.

Die allgemeine Lösung des aperiodischen Grenzfalls kann also in der Form

$$x(t) = U\mathrm{e}^{-\bar{\lambda}t} + V t\mathrm{e}^{-\bar{\lambda}t}$$

mit den freien Parametern U und V geschrieben werden.

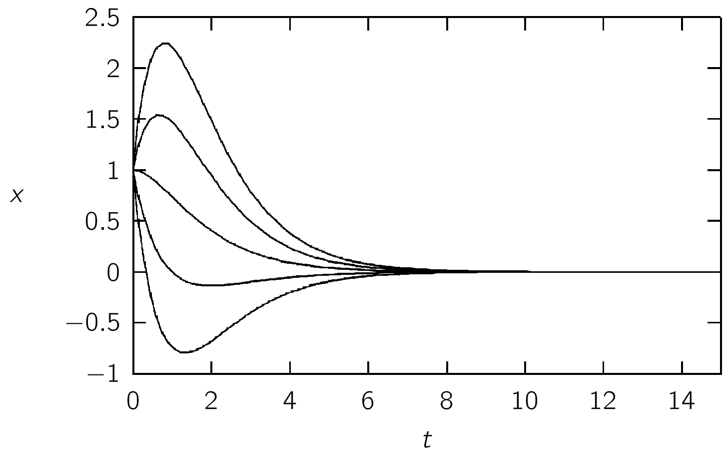


Abb. 3.8: Aperiodischer Grenzfall für unterschiedliche Anfangsgeschwindigkeiten. Beachte, dass die Bahnkurve maximal ein Extremum aufweist.

3.9.4 Konsequenzen für die Optimierung

Eine fast alltägliche Aufgabe, und nicht nur in der Physik, ist es, Größen zu optimieren. Wir denken an Fragen wie,

- Welches Gemisch von Substanzen beschreibt am besten mein gemessenes Spektrum?

[25] Das O steht für die vernachlässigten Terme: Für $O(\beta t)^2$ festes t und $\beta \to 0$

- Wie bestimme ich die Parameter eines Motors, um eine bestimmte Leistung mit dem geringsten Benzinverbrauch zu erhalten?
- Wie optimiere ich mein Aktienportfolio um den größten Gewinn bei einem bestimmten Risiko zu erwirtschaften?

Es gibt hierbei unterschiedliche Varianten: Kontinuierliche und diskrete Optimierung. Lokale und globale Optimierung.

Viele Optimierungsprobleme in der kontinuierlichen Optimierung lassen sich darauf zurückführen, das Minimum einer Funktion in einem hochdimensionalenm Raum zu bestimmen. Eines der Optimierungsverfahren ist es, die Funktion als potentielle Energie $V(\vec{r})$ aufzufassen, und die Bewegungsgleichungen eines Teilchens in diesem Potential zu simulieren, das zusätzlich eine Reibung erfährt, d.h.

$$m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}\vec{V} - \alpha\dot{\vec{r}}$$

Das Konvergenzverhalten wird durch das Verhalten in der Nähe des Minimums dominiert. In der Nähe des Minimums kann das Potential durch einen harmonischen Oszillator angenähert werden kann. Deshalb sind viele der Optimierungsverfahren an den harmonischen Oszillator angepasst.

Beim gedämpften harmonischen Oszillators haben wir gesehen, dass sich die **Konvergenzrate**[26] λ verbessert, bzw. dass sich die Abklinkzeit[27] τ kürzer, wird, wenn die Reibung erhöht wird. Deshalb neigt man intuitiv dazu, die Reibung zu erhöhen, um die Konvergenz zu beschleunigen. Das geht aber nur gut, solange man sich noch nicht im überdämpften Bereich befindet. Dann fällt die Konvergenzrate nämlich drastisch mit steigender Reibung ab. Das bedeutet, dass die Konvergenz mit ansteigender Reibung schlechter wird.

Das beste Konvergenzverhalten des harmonischen Oszillators erhält man also gerade im aperiodischen Grenzfall, welcher gedämpftes Verhalten von überdämpften Verhalten trennt.

Eine Abschätzung

In diesem Zusammenhang wollen wir als praktisches Beispiel ein Näherungsverfahren ausprobieren. Der Erfolg eines Physikers hat auch viel damit zu tun, ob er sich schnell einen Überblick über eine komplexe Situation verschaffen kann. Dazu ist es enorm hilfreich, einfache Abschätzungen vornehmen zu können.

Unser Ziel soll hier sein, das Verhalten der Bahn und die Konvergenzrate im überdämpften Fall abzuschätzen. Wir stellen uns nun vor, dass das Resultat noch nicht bekannt sei.

Ist die Reibung groß, dann bewegt sich das Teilchen nur langsam. Die Reibungskraft $-\alpha\dot{\vec{r}}$ ist im Gleichgewicht mit der Rückstellkraft des harmonischen Oszillators $F = -cx$. Da das Teilchen sich nur langsam bewegt und deshalb auch nicht stark beschleunigt ist die Tägheitskraft gegenüber den anderen Kräften vernachlässigbar. Diesen Gedanken formulieren wir nun als wesentliche Annahme unserer Abschätzung.

$$|m\ddot{\vec{x}}| << |-cx| \qquad \text{und} \qquad |m\ddot{\vec{x}}| << |-\alpha\dot{\vec{x}}| \tag{3.49}$$

Wie aber sind wir auf den Gedanken gekommen, diesen Grenzfall zu untersuchen? Hilfreich wäre zum Beispiel der Vergleich mit dem Modellsystem des freien Falls mit Dämpfung. Ist das System langsam, dann ist das Problem für ein gewisses Zeitintervall ähnlich dem freien Fall: die Kraft ist fast konstant. Im freien Fall mit Reibung stellt sich eine konstante Grenzgeschwindigkeit ein, was uns nahelegt dass vielleicht auch in unserem Fall die Beschleunigung klein ist.

[26] Als Konvergenzrate bezeichnen wir die Rate mit der sich die Bahn dem Minimum annähert. Eine Funktion $x(t) = x_0 e^{-\lambda t}$ hat eine Konvergenzrate λ. Bei Oszillationen betrachten wir das Verhalten der Umhüllenden. Bei einem mehrdimensionalen harmonischen Oszillator betrachten wir den langsamsten Abfall. Die Konvergenzrate ist die Dämpfungskonstante eines Optimierungsproblem.

[27] mit Abklingzeit bezeichnen wir die Zeit $T = \frac{1}{\lambda}$, nach der sich das Resultat um einen Faktor $1/e$ reduziert hat.

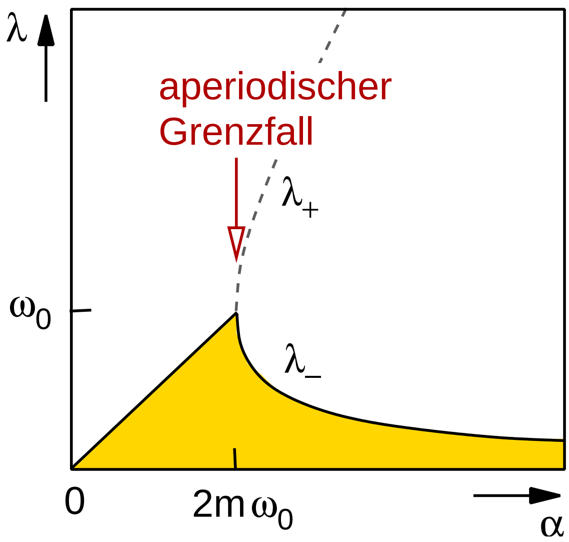


Abb. 3.9: Die Konvergenzrate λ als Funktion der Reibungskonstante α eines gedämpften harmonischen Oszillators. Eine Erhöhung der Reibungskonstante verbessert die Konvergenzrate nur im diesseits des aperiodischen Grenzfall. Im überdämpften Bereich, d.h. für $\alpha > 2m\omega_0$, wird die Konvergenzrate schlagartig schlechter.

Unter den Annahmen Gl. 3.49 erhalten wir eine einfachere Differentialgleichung, nämlich eine Ratengleichung

$$-cx - \alpha\dot{\vec{x}} = 0$$

die sich sofort lösen lässt.

$$x(t) = x(0)\mathrm{e}^{-\frac{c}{\alpha}t} \tag{3.50}$$

Wir erhalten also eine Konvergenzrate

$$\lambda = \frac{c}{\alpha} \tag{3.51}$$

Wir sehen also deutlich dass eine Erhöhung der Reibungskonstante α das Konvergenzverhalten verschlechtert.

Wir müssen noch überprüfen ob das Resultat Gl. 3.50 mit unserer Annahme Gl. 3.49 vereinbar ist.

Die erste Bedingung von Gl. 3.49 ist

$$|m\ddot{\vec{x}}| \stackrel{Gl.\ 3.50}{=} m\frac{c^2}{\alpha^2}x \stackrel{Gl.\ 3.49}{<<} cx \qquad \Leftarrow \qquad \alpha >> \sqrt{mc} = \left(\frac{\alpha_{crit}}{2}\right)$$

wobei α_{crit} der Reibungsfaktor für den aperiodischen Grenzfall ist. Diese Bedingung ist also damit gleichbedeutend, dass wir uns mit dem stark überdämpften Fall beschäftigen. Die zweite Bedingung von Gl. 3.49 ist

$$|m\ddot{\vec{x}}| \stackrel{Gl.\ 3.50}{=} m\frac{c^2}{\alpha^2}x \stackrel{Gl.\ 3.49}{<<} |\alpha\frac{c}{\alpha}x| = cx \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{mc} << \alpha$$

Sie ist also gleichbedeutend mit der ersten Bedingung. Wir haben also eine Lösung im stark überdämpften Grenzfall gefunden und sind damit am Ziel unserer Abschätzung.

Nun wollen wir kontrollieren, ob diese Näherungen tatsächlich vernünftig sind. In diesem Fall kennen wir ja das korrekte Resultat aus Gl. 3.34, das wir in die folgende Form bringen können.

$$\lambda = \frac{\alpha}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - \frac{c}{m}} = \frac{\alpha}{2m}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mc}{\alpha^2}}\right)$$
$$= \frac{\alpha}{2m}\left(1 \pm 1 - \frac{1}{2}\frac{4mc}{\alpha^2} + O\left(\left(\frac{4mc}{\alpha^2}\right)^2\right)\right)$$

Die Konvergenzrate erhalte wir von dem Lösungszweig mit der kleineren Rate. Wir erhalten also

$$\lambda = \frac{c}{\alpha} + O\left(\left(\frac{4mc}{\alpha^2}\right)^2\right)$$

was genau unserer Abschätzung Gl. 3.51 entspricht. Unser Verfahren war also vernünftug.

3.10 Getriebener harmonischer Oszillator

Es wird empfohlen, sich vor der Lektüre dieses Kapitels mit Fouriertransformationen im Anhang D.17 auf Seite 293 vertraut zu machen.

Beim getriebenen harmonischen Oszillator wird die Schwingung durch eine externe zeitabhängige Kraft angeregt.

Beispiele für einen getriebenen harmonischen Oszillator sind

- Resonanz von Bauteilen in einem Auto, Flugzeug, o.ä....

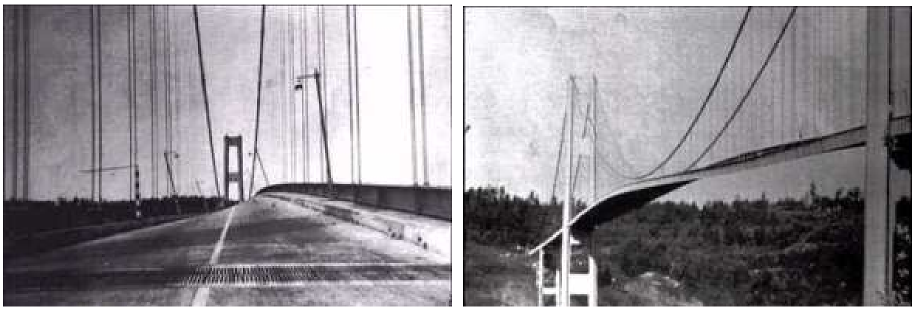


Abb. 3.10: Einsturz der Tacoma Narrows Bridge. Die Brücke wurde “Galloping Gertie” genannt, weil sie in leichtem Wind stark zu schwingen bekann. Angeblich wurde der tatsächliche, hier dargestellte Einsturz allerdings nicht durch Resonanz, sondern durch ein anderes Phänomen verursacht[3].

- Absorption von Licht: Das elektrische Feld einer Lichtwelle polarisiert ein Molekül (Atom). Die Oszillation verliert an Energie durch Kopplung an die Umgebung.

Die Bewegungsgleichung des getriebenen harmonischen Oszillators lautet

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha\dot{x} + f(t) \tag{3.52}$$

Dabei ist $f(t)$ eine zeitabhängige Kraft, die auf den Oszillator einwirkt.

Für die Lösung bietet sich eine Fouriertransformation der Variablen an.

Wir stellen die externe Kraft und die Auslenkung durch Fourierintegrale

$$f(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, f(\omega)e^{i\omega t} \qquad \text{und} \qquad x(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, x(\omega)e^{i\omega t} \tag{3.53}$$

dar. Aus der Forderung, dass die externe Kraft und die Auslenkung reell sind, folgen

$$f(-\omega) = f^*(\omega) \qquad \text{und} \qquad x(-\omega) = x^*(\omega)$$

Wir setzen den Ansatz Gl. 3.53, also die Fourierintegrale, in die Bewegungsgleichung Gl. 3.52 ein und erhalten[28]

$$\begin{aligned}
&-m\ddot{x}(t) - cx(t) - \alpha\dot{x}(t) + f(t) = 0 \\
\Rightarrow \quad & \int \frac{d\omega}{2\pi} \left[\Big(m\omega^2 - c - i\alpha\omega\Big)x(\omega) + f(\omega)\right]\mathrm{e}^{i\omega t} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \Big[0\Big]\mathrm{e}^{i\omega t} \\
\Rightarrow \quad & \Big(m\omega^2 - c - i\alpha\omega\Big)x(\omega) + f(\omega) = 0
\end{aligned}$$

Um vom zweiten zum letzten Schritt zu kommen, haben wir verwendet, dass Ebene Wellen $\mathrm{e}^{i\omega t}$ linear unabhängig sind. Das bedeutet, dass $\int d\omega\ \mathrm{e}^{i\omega t}c(\omega)$ nur dann für alle Zeiten t verschwindet, wenn $c(\omega)$ für alle Kreisfrequenzen verschwindet. Daher muss das Innere der Klammer im obigen Ausdruck für alle Wellenzahlen verschwinden, sodass wir zur dritten Zeile in der obigen Herleitung gelangen.

Damit erhalten wir

$$x(\omega) = \frac{1}{m}\left(\frac{-1}{\omega^2 - \frac{c}{m} - i\frac{\alpha}{m}\omega}\right) f(\omega)$$

Mit den Definitionen $\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{c}{m}}$ und Dämpfungskonstante $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha}{2m}$ erhalten wir eine einfachere Form

$$x(\omega) = \underbrace{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega}\right)}_{\chi:\ \text{dynamische Suszeptibilität}} f(\omega) \tag{3.54}$$

Hier führen wir den Begriff der dynamische Suszeptibilität ein. Für den harmonischen Oszillator hat sie de Form

DYNAMISCHE SUSZEPTIBILITÄT DES HARMONISCHEN OSZILLATORS

$$\chi(\omega) = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega}\right) \tag{3.55}$$

mit der Dämpfungskonstante $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ gemäss Gl. 3.42 und $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ nach Gl. 3.19.

Die **dynamische Suszeptibilität** vermittelt allgemein die Reaktion eines Systems auf eine Störung. Sie wird deshalb auch als Antwortfunktion bezeichnet Im Fall des harmonischen Oszillators ist die Kraft die Störung und die Auslenkung ist die Reaktion, oder Antwort, des harmonischen Oszillators auf die Störung.

$$x(\omega) = \chi(\omega)f(\omega) \tag{3.56}$$

Die dynamische Suszeptibilität stellt also ein allgemeines Konzept dar, welches unter anderem in der Elektrodynamik und der Festkörperphysik wieder auftaucht. Sie bildet generell die Grundlage der Theorie der Linearen Antwort (im Englischen Linear Response Theory genannt). Die Eigenschaften der dynamische Suszeptibilität haben auch in diesen Fällen große Ähnlichkeiten mit der des harmonischen Oszillators, weshalb wir sie hier im Detail untersuchen werden.

Im Folgenden wollen wir uns die Form der dynamischen Suszeptibilität erschließen und ihre physikalische Bedeutung analysieren. Zum Einen machen wir uns wieder mit der **Kurvendiskussion** vertraut. Auf der anderen Seite ist die dynamische Suzeptibilität eine Größe, die uns in der einen oder anderen Form ständig begegnen wird, sodass es lohnt, sich mit ihr etwas auseinanderzusetzen.

[28]Die Fouriertransformation ist bijektiv, was bedeutet dass zwei Funktionen *genau dann* identisch sind, wenn ihre Fouriertransformationen identisch sind.

3.10.1 Absolutbetrag der dynamische Suszeptibilität

Wir zerlegen die Suszeptibilität in Betrag $|\chi|$ und Phase $\phi(\omega)$.

$$\chi(\omega) = \underbrace{|\chi(\omega)|}_{\text{Amplitude}} \underbrace{e^{i\phi(\omega)}}_{\substack{\text{Phasenfaktor mit} \\ \phi(\omega) \text{ als Phase}}} \tag{3.57}$$

Der Betrag bestimmt die Amplitude der Schwingung $x(t)$ für eine Anregung $f(t)$. Die Phasenverschiebung beschreibt, wie stark die Auslenkung hinter der Kraft hinterherhinkt.

Kurvendiskussion

Der Betrag der dynamischen Suszeptibilität hat die Form

$$|\chi(\omega)| = \sqrt{\chi(\omega)\chi^*(\omega)} \overset{Gl.\ 3.55}{=} \frac{1}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}} \tag{3.58}$$

Wir wollen die charakteristischen Eigenschaften des Betrags der dynamischen Suszeptibilität, die in Abb. 3.12 dargestellt ist, genauer untersuchen.

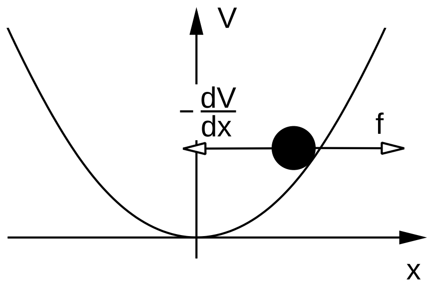
1. **Wert am Ursprung:** Am Ursprung erhalten wir

$$|\chi(0)| = \frac{1}{m\omega_0^2}$$

   Interessanterweise geht die Reibung nicht in den Wert bei $\omega = 0$ ein. Die Erklärung ist dass $\omega = 0$ den statischen Grenzfall beschreibt. Dort verschwindet aber die Geschwindigkeit und damit auch der Einfluss der Reibung.

   Die statische Suszeptibilität, also der statische Genzfall der dynamischen Suszeptibilität, lässt sich auch einfach aus der Bewegungsgleichung ableiten:

$$\underbrace{m\ddot{x}}_{=0} = -cx - \underbrace{\alpha\dot{x}}_{=0} + f \qquad \overset{x(t), f(t) = konstant}{\Rightarrow} \qquad x = \frac{1}{c} \cdot f = \frac{1}{m\omega_0^2} f$$



2. **Verhalten für große Werte:**

$$|\chi(\omega \to \infty)| \overset{Gl.\ 3.58}{\sim} \frac{1}{m\omega^2}$$

   Der Betrag der Suszeptibilität fällt also für hohe Frequenzen schnell ab. Dies bedeutet, dass der Oszillator zu träge ist, um schnellen Variationen der äußeren Kraft zu folgen.

3. **Position und Wert der Extrema:** Da $1/\sqrt{x}$ für $x > 0$ eine monoton fallende Funktion ist, ist das Maximum von $|\chi(\omega)|$ mit einem Minimum von $1/|\chi(\omega)|^2$ identisch.

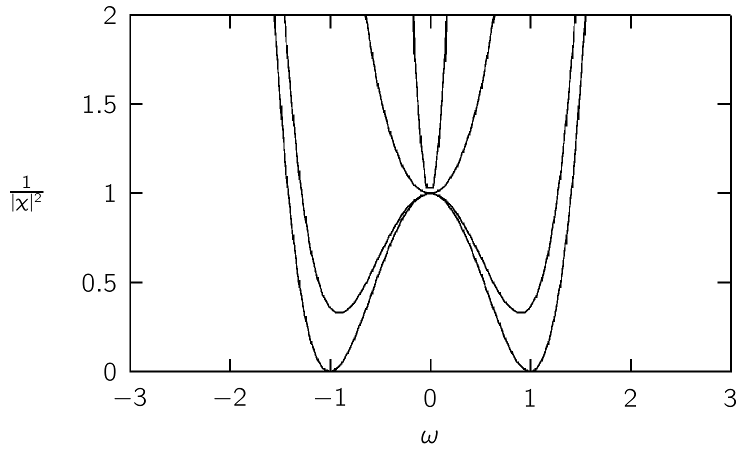


Abb. 3.11: Inverse des Absolutbetrags der dynamischen Suszeptibilität für unterschiedliche Werte der Reibung. Die Werte der Reibung entsprechen denen von Abb. 3.12

Wir suchen also die Minima von $y(\omega)\stackrel{\text{def}}{=}1/|m\chi(\omega)|^2$, weil dies eine einfachere Funktion als $|\chi(\omega)|$ ist. Dennoch enthält $y(\omega)$ die Information über die Position und die Art der Extrema. Die Funktion $1/|m\chi(\omega)|^2$ ist in Abb. 3.11 dargestellt. Wir bestimmen also den Ort der Extrema als Nullstelle der Ableitung und entscheiden anhand der Krümmung, ob ein Maximum oder ein Minimum vorliegt.

$$
\begin{aligned}
y(\omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|m\chi(\omega)|^2} \stackrel{Gl.\ 3.58}{=} (\omega^2-\omega_0^2)^2+4\lambda^2\omega^2 \\
\Rightarrow \frac{dy}{d\omega} &= 4(\omega^2-\omega_0^2)\omega+8\lambda^2\omega = 4\omega(\omega^2-\omega_0^2+2\lambda^2)
\end{aligned}
$$

Die Extrema, also die Nullstellen der Ableitung, befinden sich also bei

$$
\frac{dy}{d\omega}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega=0 \qquad \text{oder} \qquad \omega=\pm\sqrt{\omega_0^2-2\lambda^2}
$$

Im folgenden bezeichnen wir die Position der peripheren Extrema durch

$$
\omega_{max}\stackrel{\text{def}}{=}\sqrt{\omega_0^2-2\lambda^2} \tag{3.59}
$$

Interessant ist, dass die Extrema nicht bei der Kreisfrequenz $\bar\omega=\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$ des ungetriebenen harmonischen Oszillators liegt, die wir in Gl. 3.37 bestimmt hatten, sondern noch weiter zu tieferen Frequenzen verschoben sind. Die Extrema fallen bei einer Reibung von $\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0$ im Ursprung zusammen. Man hätte diese qualitative Änderung am aperiodischen Grenzfall, also für $\lambda=\omega_0$ erwartet. Dies ist aber nicht der Fall: Die Extrema vereinen sich bereits bei einer geringeren Reibung.

Nun bestimmen wir die zweiten Ableitungen von $y(\omega)$ um die Krümmung an den Extrema zu erhalten:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{d\omega^2} &= 4(\omega^2-\omega_0^2+2\lambda^2)+8\omega^2 \\
\Rightarrow \qquad \left.\frac{d^2y}{d\omega^2}\right|_{\omega=0} &= -4(\omega_0^2-2\lambda^2) \qquad \text{und} \\
\left.\frac{d^2y}{d\omega^2}\right|_{\omega=\pm\omega_{max}} &= 8\left(\omega_0^2-2\lambda^2\right)
\end{aligned} \tag{3.60}
$$

Dort wo die Extrema getrennt sind, hat $y(\omega)$ also ein zentrales Maximum und zwei periphere Minima. Das übersetzt sich in ein zentrales Minimum und zwei periphere Maxima für $|\chi(\omega)|$. Nachdem sich die Extrema vereint haben liegt nur ein einziges Maximum von $|\chi(\omega)|$ im Zentrum vor.

Die maximale Amplitude

$$|\chi(\pm\omega_{max})| = \frac{1}{m\sqrt{y(\omega_{max})}} = \frac{1}{m\sqrt{4\lambda^4 + 4\lambda^2\omega_0^2 - 8\lambda^4}} = \frac{1}{2m\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \tag{3.61}$$

wächst mit geringerer Reibung immer weiter an. Bei verschwindender Reibung entsteht eine Singularität. Dies ist die sogenannte **Resonanzkatastrophe**. Es wird immer mehr Energie in den harmonischen Oszillator hineingepumpt, ohne dass dieser sie wieder durch Dissipation abgeben kann. Die Auslenkung steigt ins Unendliche. Für ein reales System, wie zum Beispiel ein Fahrzeug, würde dies unweigerlich die Zerstörung des Systems verursachen.

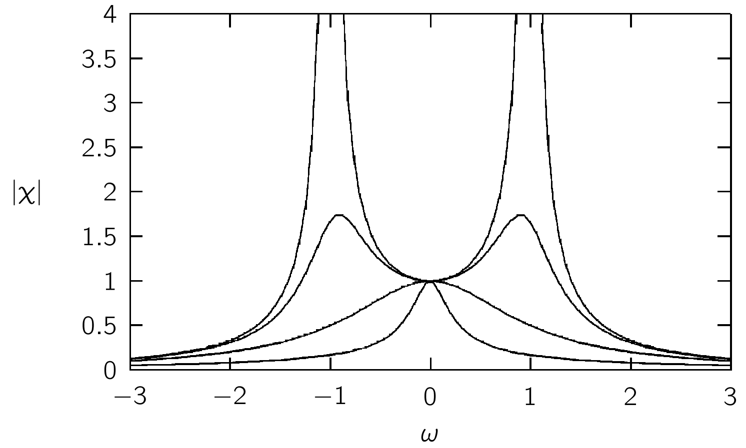


Abb. 3.12: Absolutbetrag der dynamischen Suszeptibilität für unterschiedliche Reibungskoeffizienten $\omega_0 = 1, \lambda = 0, 0.3\omega_0, \omega_0, 3\omega_0$. . (Der Faktor $1/m$ wurde weggelassen.) Ohne Reibung weist die dynamische Suszeptibilität Pole bei $\pm\omega_0$ auf. Eine endliche Reibung macht aus den Polen Maxima. Die Maxima weden zu geringeren Frequenzen verschoben. Im aperiodischen Grenzfall verschmelzen die beiden Maxima bei $\omega = 0$. Für hohe Frequenzen fällt der Betrag der dynamischen Suzeptibilität wie $1/\omega^2$ ab.

3.10.2 Linienbreite und Lebensdauer

Anhand von Absorptionsexperimenten lässt sich viel über ein Material erfahren. Stellen wir uns eine Probe vor, durch die infrarotes Licht scheint. Das Licht erzeugt ein oszillierendes elektrisches Feld, das Dipole im Material zum Schwingen anregt. Zum Beispiel könnten die Dipole aus unterschiedlich geladenen Ionen bestehen, die gegeneinander schwingen. Werden solche Schwingungen angeregt, entziehen Sie dem Licht Energie, sodass es abgeschwächt wird. Diese Absorption ist besonders effizient, wenn der schwingende Dipol in Resonanz mit der Frequenz des Lichts ist. Wenn wir das Licht hinter der Probe in Wellenlängen aufspalten, können wir etwas über die charakteristischen Frequenzen der Probe erfahren. Dies ist das Prinzip der Infrarot (I.R.)-Spektroskopie, die uns Aussagen zum Schwingungspektrum von Molekülen liefert. Ein Beispiel für ein Infrarotspektrum ist in Abb. 3.13 abgebildet.

Jedoch erfahren wir aus den Absorptionspektren nicht nur etwas über die charakteristischen Frequenzen, d.h. über die Position der Absorptionsbanden, sondern über die Linienbreite auch etwas über die Dämpfung der Schwingung. Dies sagt uns zum Beispiel, ob ein Atom starken Kontakt mit anderen Gruppen des Moleküls hat oder nicht.

In der Quantenmechanik lernen wir, dass das Konzept von Teilchen eng mit Schwingungen verknüpft ist. In diesem Fall entspricht der Zerfall einer Schwingung dem Zerfall eines Teilchens. Zum Beispiel kann ein Atomkern durch Abgabe eines Elektrons zerfallen. Aus der Energieschärfe der

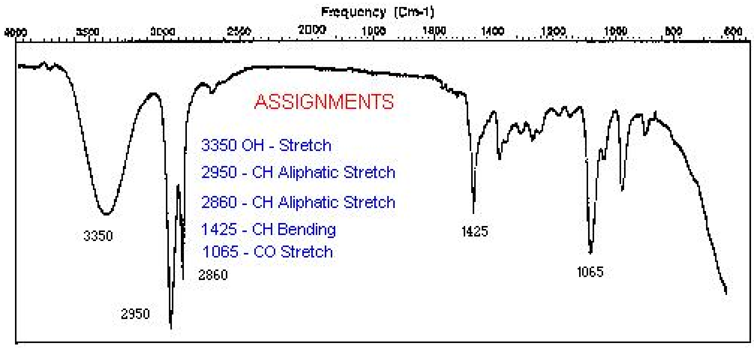


Abb. 3.13: Infrarotspektrum.Quelle: http://wwwchem.csustan.edu/Tutorials/INFRARED.HTM

Zerfallsprodukte lässt sich die Lebensdauer des Atomkerns bestimmen. Die Energie ist nämlich über das Korrespondenzprinzip $E = \hbar\omega$ der Quantenmechanik mit einer Frequenz verknüpft. Letzteres ist eine Aussage der Quantenmechanik und wird erst später verständlich. Die Naturkonstante $h = 2\pi\hbar$ ist das **Plancksche Wirkungsquantum**. Die Variable $\hbar$ wird auch als **reduzierte Planck-Konstante** oder **Dirac Konstante** bezeichnet.

Die **Lebensdauer** einer Schwingung oder eines Teilchens entspricht der exponentiellen Abklingkonstante einer gedämpften Schwingung und lässt sich anhand der Breite der Banden in der dynamischen Suszeptibilität, der **Linienbreite**, bestimmen.

Nun soll die Bedeutung der Breite der Maxima erörtert werden. Wir werden zeigen, dass die Dynamische Suszeptibilität durch eine Gaußfunktion

$$|\chi(\omega)| \approx |\chi(\omega_{max})|\mathrm{e}^{-c(\omega-\omega_{max})^2}$$

angenähert werden kann: Dafür entwickeln wir den Logarithmus des Betrags der dynamischen Suszeptibilität um sein Maximum $\omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$, das in Gl. 3.59 bestimmt wurde. Wir verwenden wieder die Funktion

$$y(\omega) = \frac{1}{|m\chi(\omega)|^2}$$

deren zweite Ableitungen am Maximum bereits bekannt sind.

Wir drücken also die Ableitungen von $\ln[|\chi(\omega)|]$, die wir für die Taylorentwicklung benötigen, durch die der Funktion $y(\omega)$ aus. [29]

$$\begin{aligned}
\ln\left[|\chi(\omega)|\right] &= \ln\left[\frac{1}{m\sqrt{y(\omega)}}\right] = -\frac{1}{2}\ln\left[m^2 y(\omega)\right] \\
\frac{d\ln\left[|\chi(\omega)|\right]}{d\omega} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{m^2 y(\omega)}m^2\frac{dy}{d\omega} \\
\frac{d^2\ln\left[|\chi(\omega)|\right]}{d\omega^2} &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{y(\omega)^2}\left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2 + \frac{1}{y(\omega)}\frac{d^2y}{d\omega^2}\right)
\end{aligned}$$

[29] Achtung! Wir bilden hier den Logarithmus einer dimensionsbehafteten Größe: Die Suszeptibilität hat die Einheit Zeit zum Quadrat. Bilden wir die Taylorreihe des Logarithmus, erhalten wir Terme mit unterschiedlicher Dimension, was physikalisch keinen Sinn macht. Wir müssen also zunächst eine dimensionslose Größe bilden, indem wir einen Faktor, der die Einheit enthält, anspalten. Dieser Faktor muss am Ende der Berechnung wieder berücksichtigt werden. In der Praxis muss man nichts beachten, außer wenn eine solche Größe im Endresultat stehen bleibt.`Editor: Formuliere das besser!`

Die Ableitungen von $y(\omega)$ haben wir bereits in Gln. 3.61,3.60 bestimmt

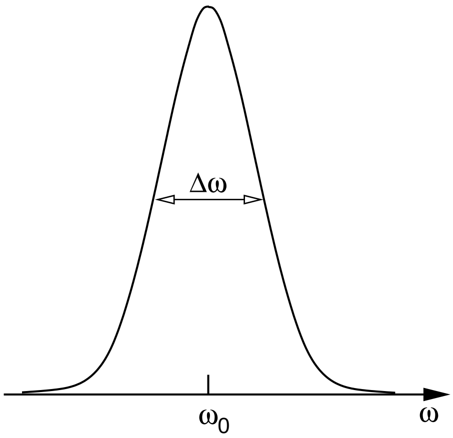
$$\begin{aligned} y(\omega_{max})| &\overset{Gl.\ 3.61}{=} 4\lambda^2(\omega_0^2-\lambda^2) \\ \left.\frac{dy}{d\omega}\right|_{\omega=\pm\omega_{max}} &= 0 \\ \left.\frac{d^2y}{d\omega^2}\right|_{\omega=\pm\omega_{max}} &\overset{Gl.\ 3.60}{=} 8\left(\omega_0^2-2\lambda^2\right) \end{aligned}$$

Wir erhalten also für die Taylorentwicklung zur zweiten Ordnung

$$\ln\left[|\chi(\omega)\right] = -\frac{1}{2}\ln\left[m^2 4\lambda^2(\omega_0^2-\lambda^2)\right] + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\frac{8(\omega_0^2-2\lambda^2)}{4\lambda^2(\omega_0^2-\lambda^2)}\right)(\omega-\omega_{max})^2 + O(\omega-\omega_{max})^3$$

Wenn wir nun die Exponentialfunktion dieser Entwicklung nehmen erhalten wir eine Gaußfunktion.

$$|\chi(\omega)| \approx \frac{1}{2m\lambda\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}}\exp\left(-\frac{\omega_0^2-2\lambda^2}{2\lambda^2(\omega_0^2-\lambda^2)}(\omega-\omega_{max})^2\right) \tag{3.62}$$



Die Breite der Gaußfunktion kann durch ihre Halbwertsbreite charakterisiert werden. Die **Halbwertsbreite** oder **Linienbreite** $\Delta\omega$ ist der Abstand der beiden Frequenzen, bei denen die Suszeptibilität auf den halben Wert des Maximums abgefallen ist[4]. Manchmal wird auch die Halbwertsbreite auch als die Hälfte der gerade definierten Größe angenommen.[4] Für eine Gaußfunktion der Form

$$g(x) = \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{x_c}\right)^2}$$

erhalten wir die Halbwertsbreite Δx durch

$$\mathrm{e}^{-\left(\frac{\Delta x}{2x_c}\right)^2} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad -\left(\frac{\Delta x}{2x_c}\right)^2 = \ln\left[\frac{1}{2}\right] = -\ln[2]$$

HALBWERTSBREITE EINER GAUßFUNKTION

Die Halbwertsbreite Δx einer Gaussfunktion $\mathrm{e}^{-(x/x_c)^2}$ ist

$$\Delta x = 2\sqrt{\ln[2]}\, x_c \approx 1.66511\, x_c \tag{3.63}$$

Die Halbwertsbreite der dynamischen Suszeptibilität ist

$$\Delta\omega \overset{Gln.\ 3.62,3.63}{=} 2\sqrt{\ln(2)}\sqrt{\frac{2\lambda^2(\omega_0^2-\lambda^2)}{\omega_0^2-2\lambda^2}} = \sqrt{8\ln(2)}\lambda + O(\frac{\lambda}{\omega_0})^2 \approx 2.35\lambda$$

Die Halbwertsbreite der dynamischen Suszeptibilität ist

$$\Delta\omega = 2\sqrt{\ln(2)}\sqrt{\frac{2\lambda^2(\omega_0^2-\lambda^2)}{\omega_0^2-2\lambda^2}} = \sqrt{8\ln(2)}\lambda + O(\frac{\lambda}{\omega_0})^2 \approx 2.35\lambda$$

HALBWERTSBREITE DER DYNAMISCHEN SUSZEPTIBILITÄT

$$\Delta\omega \approx 2.35\lambda \tag{3.64}$$

Der Ausdruck ist gültig für kleine Reibungen, bzw scharfe Banden

Damit haben wir einen direkten Zusammenhang zwischen der experimentell zugänglichen Linienbreite im Absorptionsspektrum und der **Abklingzeit** oder **Lebensdauer** $\tau = \frac{1}{\lambda}$ gewonnen, die uns viel über die Kurzzeitdynamik des Systems verrät.

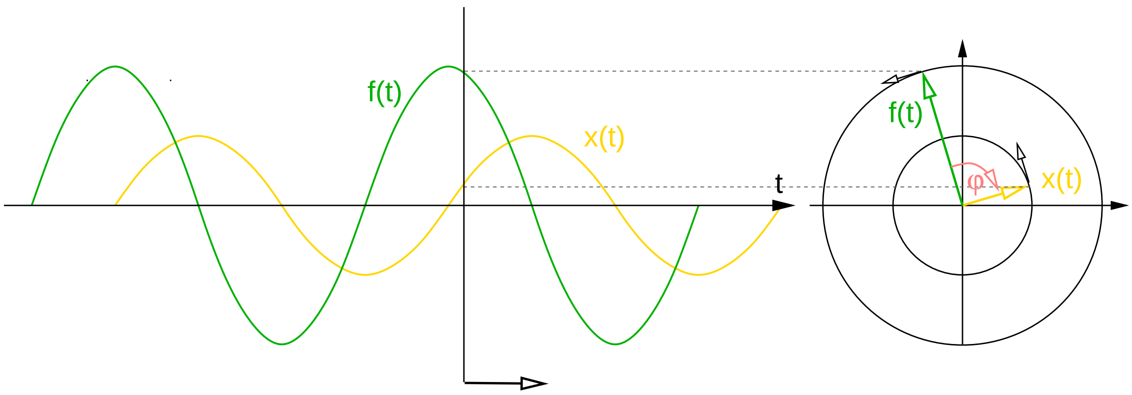
Zum Beispiel kann man am Infrarotspektrum in Abb. 3.13 ablesen, dass die OH-Streckschwingung bei 3350 cm^{-1} eine Lebensdauer von etwa 0.1-0.2 ps hat. Zum Vergleich dauert eine Periode dieser Schwingung etwa 0.01 ps. Die Breite der OH-Schwingung ist deutlich größer als die der CH-Streckschwingung bei 2950 cm^{-1}, was darauf hinweist, dass die OH-Gruppe viel stärker mit der Umgebung beeinflusst wird. Dies kann zum Beispiel als Existenz von Wasserstoffbrücken zur OH-Gruppe gedeutet werden.

3.10.3 Phase der dynamischen Suszeptibilität

Bisher haben wir den Absolutbetrag der dynamischen Suszeptibilität betrachtet. Dieser Anteil liefert die Amplitude der Schwingung als Funktion der Amplitude der externen Kraft und seiner Frequenz. Die dynamische Suszeptibilität ist aber eine komplexe Funktion, die sich nach Gl. 3.57 als

$$\chi(\omega) = |\chi(\omega)|e^{i\phi(\omega)}$$

darstellen lässt. Die Phase $\phi(\omega)$ sagt uns, um wieviel die Auslenkung $x(t)$ der Triebkraft $f(t)$ hinterherhinkt.



Die Phase erhält man wegen $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$ aus Realteil und Imaginärteil der dynamischen Suszeptibilität.

$$\tan(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \frac{|\chi|\sin(\phi)}{|\chi|\cos(\phi)} = \frac{\mathrm{Im}(\chi)}{\mathrm{Re}(\chi)} \tag{3.65}$$

Wir müssen also die dynamische Suszeptibilität Gl. 3.55 in Real und Imaginärteil zerlegen. Dies wird erreicht, indem wir Zähler und Nenner mit dem komplex Konjugierten des Nenners multiplizieren, wodurch der Nenner reell wird.

$$\chi(\omega) \overset{Gl.\ 3.55}{=} \frac{1}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\lambda\omega} = \frac{1}{m}\frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\lambda\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2} \tag{3.66}$$

Die Phasenverschiebung entspricht dem Winkel in der Gaußschen Zahlenebene[30]

$$\tan(\phi(\omega)) \overset{Gl.\ 3.65}{=} \frac{\mathrm{Im}\{\chi(\omega)\}}{\mathrm{Re}\{\chi(\omega)\}} \overset{Gl.\ 3.66}{=} \frac{-2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2\lambda\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Die Phasenverschiebung ist für unterschiedliche Reibungen in Abb. 3.14 dargestellt.

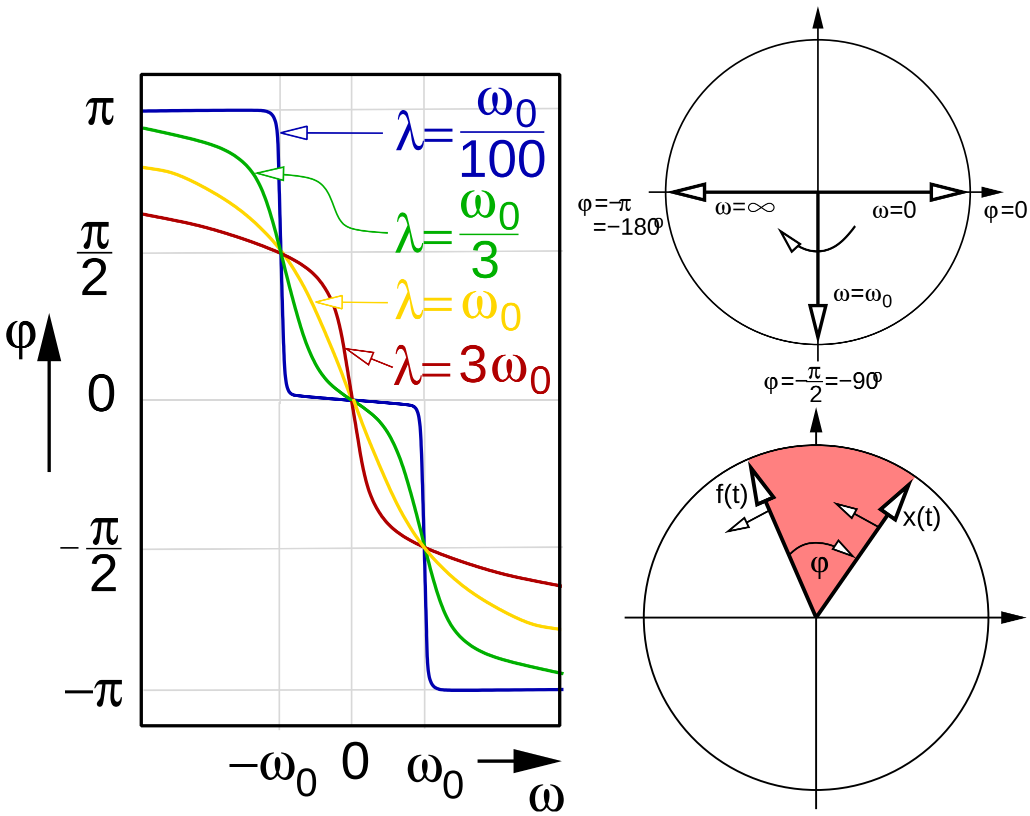


Abb. 3.14: Phasenverschiebung. Die Phase ist als Funktion der Freqenz für verschiedene Reibungen gezeichnet. Die Antwort $x(t)$ äuft der Ursache $f(t)$ hinterher. Dies gilt auch fuer negative negative Frequenzen, bei denen die Phasenverschiebung positive ist. Bei der Resonanzfrequenz ist die Phasenverschiebung gerade 90°, was zu einem optimalen Energieübertrag führt. Rechts oben ist die Phasenverschiebung als Winkel in der komplexen Ebene dargestellt. Rechts unten wird demonstiert wie die Antwort der Ursache folgt.

- Wir sehen, dass die Auslenkung weit unterhalb der Resonanzfrequenz ω_0 etwa parallel mit der Triebkraft oszilliert. Die Phasenverschiebung für $\omega = 0$ verschwindet. Dies ist der quasistationäre Fall, bei dem die Auslenkung der Kraft fast sofort folgen kann.
- Bei der Resonanzfrequenz, d.h. bei $\omega = \omega_0$, folgt die Auslenkung der Kraft mit einer Phasenverschiebung von $\pi/2 = 90°$.
- Weit oberhalb der Resonanzfrequenz, d.h. $\omega >> \omega_0$, steigt die Phasenverschiebung bis auf $\pi = 180°$ an.
- Bei kleiner Reibung fällt die Phasenverschiebung abrupt bei der Resonanzfrequenz von 0° auf −180° ab. Mit ansteigender Reibung verschmiert sich der Übergang. Beim aperiodischen

[30] In der Gaußsche Zahlenebene entspricht jeder Punkt einer komplexen Zahl. Dabei wird der Realteil nach rechts und der Imaginärteil nach oben aufgezeichnet. Der Abstand vom Ursprung ist dann der Absolutbetrag und der Winkel zur "x"-Achse die Phase der komplexen Zahl.

Grenzfall und im Kriechfall spielt die Resonanzfrequenz keine besondere Rolle mehr, und die Phase fällt kontinuierlich mit steigender Frequenz ab.

- Beachte, dass der Graph periodisch in der ϕ Richtung fortgesetzt werden kann, da eine Phasenverschiebung um $2\pi = 360°$ keine physikalische Konsequenz hat.
- Beachte, dass der Graph inversionssymmetrisch gegenüber $(\omega, \phi) \rightarrow (-\omega, -\phi)$ ist.

3.11 Greensche Funktionen

3.11.1 Einleitung

Es wird empfohlen, sich vor der Lektüre dieses Kapitels mit der Diracschen Deltafunktion und der Heavisidefunktion vertraut zu machen, die in Anhang D.19 auf Seite 303 beschrieben sind.[31]

Die Methode der **Greensfunktionen** ist eine weitverbreitete Methode zur Lösung inhomogener Differentialgleichungen. Wir werden sehen, dass die Greenschen Funktionen eng mit der dynamischen Suszeptibilität verknüpft ist.

Aus der Elektrostatik kennen wir zum Beispiel die **Poisson Gleichung**

$$\vec{\nabla}^2\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r})$$

Dabei ist $\Phi(\vec{r})$ das elektrostatische Potential, das von einer Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ erzeugt wird. ϵ_0 ist die Dielektrizitätskonstante des Vakuums. Als Lösung kennen wir den Integralausdruck

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r'}|}}_{G(\vec{r},\vec{r'})} \rho(\vec{r'})$$

Dabei wurde die Greensfunktion

$$G(\vec{r},\vec{r'}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r'}|}$$

verwendet. Die Greensfunktion für dieses Problem ist gerade das Potential einer Punktladung. Man erhält die Lösung der Poisson Gleichung einfach als gewichtetes Integral der Greenschen Funktion über die Inhomogenität.

Die Greensfunktionen spielen in der Quantenfeldtheorie und in der Statistischen Mechanik eine besondere Rolle.

3.12 Lösung des getriebenen harmonischen Oszillators mittels Greensfunktionen

Wir wollen die Methode der Greensfunktionen am Beispiel des getriebenen harmonischen Oszillators demonstrieren. Die inhomogene Differentialgleichung des getriebenen harmonischen Oszillators mit Reibung ist

$$m\ddot{x}(t) = -cx(t) - \alpha\dot{x}(t) + f(t) \tag{3.67}$$

Die Idee ist die folgende: Wir betrachten zunächst die zeitabhängige Auslenkung $x(t)$ als Folge eines **Kraftstoßes** bei $t = t_0$, also $f(t) = \delta(t - t_0)$. Dabei ist $\delta(x)$ die Diracsche Deltafunktion.

[31] Oliver Heaviside, english electrical engineer, mathematician, physicist. May 18, 1850-Feb.3, 1925.

KRAFTSTOß

Ein **Kraftstoß** enspricht einem "Schlag" bei dem in infinitesimal kurzer Zeit ein endlicher Impuls übertragen wird.

$$\vec{F}(t) = \vec{P}\delta(t - t_0)$$

Dabei ist $\vec{F}(t)$ die Kraft die während dem Kraftstoß auf das Objekt einwirkt und $\vec{P}$ ist der dabei übertragene Impuls.

Die aus dem Kraftstoß resultierende Auslenkung $x(t)$ ist die Antwortfunktion auf den Kraftstoß bei $t = t_0$ und wir bezeichnen sie mit $g(t, t_0)$. Diese Antwortfunktion ist gerade die Greensfunktion. Ist die Greensche Funktion für das Problem bekannt, kann jede beliebige Inhomogenität, also die externe Kraft, in viele kleine Kraftstöße zerlegt und die Antwort auf diese Kraftstöße überlagert werden.

Die Greensfunktion erfüllt also die Differentialgleichung

$$m\ddot{g}(t, t_0) = -cg(t, t_0) - \alpha\dot{g}(t, t_0) + \delta(t - t_0) \tag{3.68}$$

wobei die Zeitableitungen auf das erste Argument der Greensfunktion $g(t, t_0)$ wirken. Die Randbedingungen der Greensfunktion sind so gewählt, dass $g(t, t_0) = 0$ für $t < t_0$, was widerspiegelt, dass die Auslenkung vor dem Kraftstoß verschwindet.

Eine allgemeine zeitabhängige Kraft (Inhomogenität) $f(t)$ kann aus Kraftstößen aufgebaut werden,

$$f(t) = \int dt'\delta(t - t')f(t')$$

die entsprechend der momentan wirkenden Kraft gewichtet werden.

Wegen dem Superpositionsprinzip[32] kann die Antwort der Auslenkung auf eine beliebige Kraft $f(t)$ aus den Antwortfunktionen $g(t, t_0)$ der einzelnen Kraftstöße aufgebaut werden.

GREENSFUNKTION UND DIE ANTWORT AUF EINE STÖRUNG

Die Auslenkung $x(t)$ ist die Antwort auf eine Störung, nämlich die Fraft $f(t)$. Störung und Antwort werden durch die Greensfunktion $g(t, t')$ vermittelt.

$$x(t) = \int dt' g(t, t')f(t') \tag{3.69}$$

wodurch wir die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung bei Kenntnis der Greensfunktion direkt durch Integration erhalten.

Wir beweisen dies, indem wir Gl. 3.69 als Ansatz in die Bewegungsgleichung Gl. 3.67 einsetzen.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + cx + \alpha\dot{x} &\overset{Gl.\ 3.69}{=} \int dt' \ \left[m\ddot{g}(t, t') + cg(t, t') + \alpha\dot{g}(t, t')\right] f(t') \\ &\overset{Gl.\ 3.68}{=} \int dt' \ \delta(t - t')f(t') = f(t) \qquad q.e.d. \end{aligned}$$

Gl. 3.68 legt die Greensfunktion nicht eindeutig fest. Je nach Anfangebedingungen können wir unterschiedliche Greensfunktionen definieren. Nun bestimmen wir diejenige Greensfunktion, welche

[32] Das Superpositionsprinzip sagt dass man die Lösung linearer Differentialgleichungen überlagern darf. Die Überlagerung ist dann eine neue Lösung der Differentialgleichung. Das Superpositionsprinzip gilt ausschließlich bei linearen Differentialgleichungen.

durch die Differentialgleichung Gl. 3.68 und die Anfangsbedingung

$$g(-\infty, t_0) = \dot{g}(-\infty, t_0) = 0$$

definiert ist. Dies ist die sogenannte **retardierte Greensfunktion**, weil die mit dieser Greensfunktion durch Gl. 3.69 bestimmte Antwort immer auf die Ursache folgt.

Als Ansatz wählen wir $g = 0$ für $t < t_0$ und für $t > t_0$ die bekannte allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

$$g(t, t_0) = \begin{cases} A\, \mathrm{e}^{i\omega_1(t-t_0)} + B\, \mathrm{e}^{i\omega_2(t-t_0)} & \text{für} \quad t > t_0 \\ 0 & \text{für} \quad t < t_0 \end{cases} \tag{3.70}$$

wobei $\omega_{1/2}$ die beiden komplexen Lösungen aus Gl. 3.34 für die Frequenz des harmonischen Oszillators mit Reibung sind sind.

Wir müssen nun noch die Koeffizienten A und B bestimmen. Wegen der Deltafunktion als Inhomogenität ist die Bestimmung der Koeffizienten nicht ganz trivial. Deswegen zeigen wir hier die entsprechende Methode: Das Prinzip soll zunächst an einem einfachen Beispiel gezeigt werden, bei dem der Einfachheit halber Kraftkonstante und Reibung auf Null gesetzt werden. Die Gleichung für die Greensfunktion Gl. 3.68 hat dann die Form

$$m\ddot{g} = \delta(t - t_0)$$

Wir integrieren zwei mal und erhalten unter Berücksichtigung der Integrationskonstanten C und D,

$$\begin{aligned} m\dot{g} &= C + \theta(t - t_0) \\ mg(t, t_0) &= D + Ct + (t - t_0)\theta(t - t_0) \end{aligned}$$

Dabei ist $\theta(t)$ die Heavisidefunktion.[33]

Die Integrationskonstanten verschwinden beide wegen der Randbedingung, dass die Greensfunktion für $t < t_0$ verschwinden muss. Damit erhalten wir für unser einfaches Beispiel

$$g(t, t_0) = \frac{1}{m}(t - t_0)\vartheta(t - t_0)$$

Wichtig ist, dass die Lösung stetig ist, aber einen Sprung in der ersten Ableitung besitzt, den man durch Integration der Bewegungsgleichung über t_0 bestimmen kann. Der Grund liegt darin, dass die zweite Ableitung einen Deltafunktionsanteil besitzt, der sich nach einer Integration in eine Stufe in der ersten Ableitung übersetzt.

Nun wenden wir dasselbe Prinzip, leicht variiert, auf unser Problem, den gedämpften harmonischen Oszillator, an: Wir gehen von der Differentialgleichung Gl. 3.68 für die Greensfunktion aus und integrieren sie zweimal bezüglich t:

$$\begin{aligned} m\ddot{g}(t, t_0) &\overset{Gl.\ 3.68}{=} -cg(t, t_0) - \alpha\dot{g}(t, t_0) + \delta(t - t_0) \\ m\dot{g}(t, t_0) &= C - c\left[\int_{-\infty}^{t} dt'\, g(t', t_0)\right] - \alpha g(t, t_0) + \vartheta(t - t_0) \\ mg(t, t_0) &= D + Ct - c\int_{-\infty}^{t} dt'' \left[\int_{-\infty}^{t''} dt'\, g(t', t_0)\right] - \alpha\left[\int_{-\infty}^{t} dt'\, g(t', t_0)\right] \\ &\quad + (t - t_0)\vartheta(t - t_0) \end{aligned}$$

[33] Die Heavisidefunktion ist durch

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Wiederum verlangen wir, dass die Greensfunktion vor dem Kraftstoß verschwinden soll. Deshalb tragen die Integrale für $t < t_0$ nichts bei und außerdem verschwinden die Integrationskonstanten C und D. Schließlich lassen wir t von rechts gegen t_0 gehen. Aus den letzten beiden Gleichungen erhalten wir die Bedingungen[34]

$$\lim_{t\to t_0^+} \dot{g}(t,t_0) = \frac{1}{m}; \qquad \lim_{t\to t_0^+} g(t,t_0) = 0 \tag{3.71}$$

Bei der Herleitung haben wir zuerst die zweite Gleichung von Gl. 3.71, die Stetigkeitsbedingung, bestimmt und bei der Herleitung der ersten Gleichung verwendet.

Mit Hilfe dieser Bedingungen lassen sich die Koeffizienten A, B in Gl. 3.70 bestimmen.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to t_0^+} \dot{g}(t,t_0) &= \lim_{t\to t_0^+} \left[iA\omega_1 \mathrm{e}^{i\omega_1(t-t_0)} + iB\omega_2 \mathrm{e}^{i\omega_2(t-t_0)} \right] \\
&= i(A\omega_1 + B\omega_2) \stackrel{!}{=} \frac{1}{m} \\
\lim_{t\to t_0^+} g(t,t_0) &= \lim_{t\to t_0^+} \left[A\mathrm{e}^{i\omega_1(t-t_0)} + B\mathrm{e}^{i\omega_2(t-t_0)} \right] \\
&= A + B \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Wir lösen auf und erhalten

$$A = \frac{-i}{m(\omega_1-\omega_2)} \qquad \text{und} \qquad B = \frac{i}{m(\omega_1-\omega_2)}$$

Damit erhalten wir die endgültige Form der Greensfunktion

GREENSFUNKTION DES GEDÄMPFTEN HARMONISCHEN OSZILLATORS

$$g(t,t_0) \stackrel{Gl.\ 3.70}{=} \begin{cases} \frac{1}{im(\omega_1-\omega_2)} \left[\mathrm{e}^{i\omega_1(t-t_0)} - \mathrm{e}^{i\omega_2(t-t_0)} \right] & \text{für } t > t_0 \\ 0 & \text{für } t < t_0 \end{cases} \tag{3.72}$$

Dabei sind $\omega_{1/2}$ durch Gl. 3.34 auf S. 43 gegeben.

Wir erhalten also

- im gedämpften und ungedämpften Fall mit $\omega_1 = \bar{\omega} + i\lambda$ und $\omega_2 = -\bar{\omega} + i\lambda$ die Greensfunktion[35]

$$g(t,t_0) = \frac{1}{m\bar{\omega}} \begin{cases} \sin(\bar{\omega}(t-t_0))\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)} & \text{für } t > t_0 \\ 0 & \text{für } t < t_0 \end{cases}$$

  und die Bahnkurve

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, g(t,t') f(t') \\
&= \int_{-\infty}^{t} dt'\, \frac{1}{m\omega} \sin\omega(t-t')\mathrm{e}^{-\lambda(t-t')} f(t')
\end{aligned}$$

  Achtung: Bei einer Greenschen Funktion, die nicht abklingt, ist das Integral nicht definiert. In diesem Fall führt man eine infinitesimale Dämpfung ein und bildet anschließend den Grenzfall verschwindender Dämpfung.

[34] Das Symbol t_0^+ bezeichnet einen Wert der infinitesimal größer als t_0 ist. In diesem Fall wird damit der rechtsseitige Grenzwert bei t_0 bezeichnet.

[35] $(\omega_1 - \omega_2) = 2\bar{\omega}$ und $\mathrm{e}^{i\bar{\omega}t} - \mathrm{e}^{-i\bar{\omega}t} = 2i\sin(\bar{\omega}t)$.

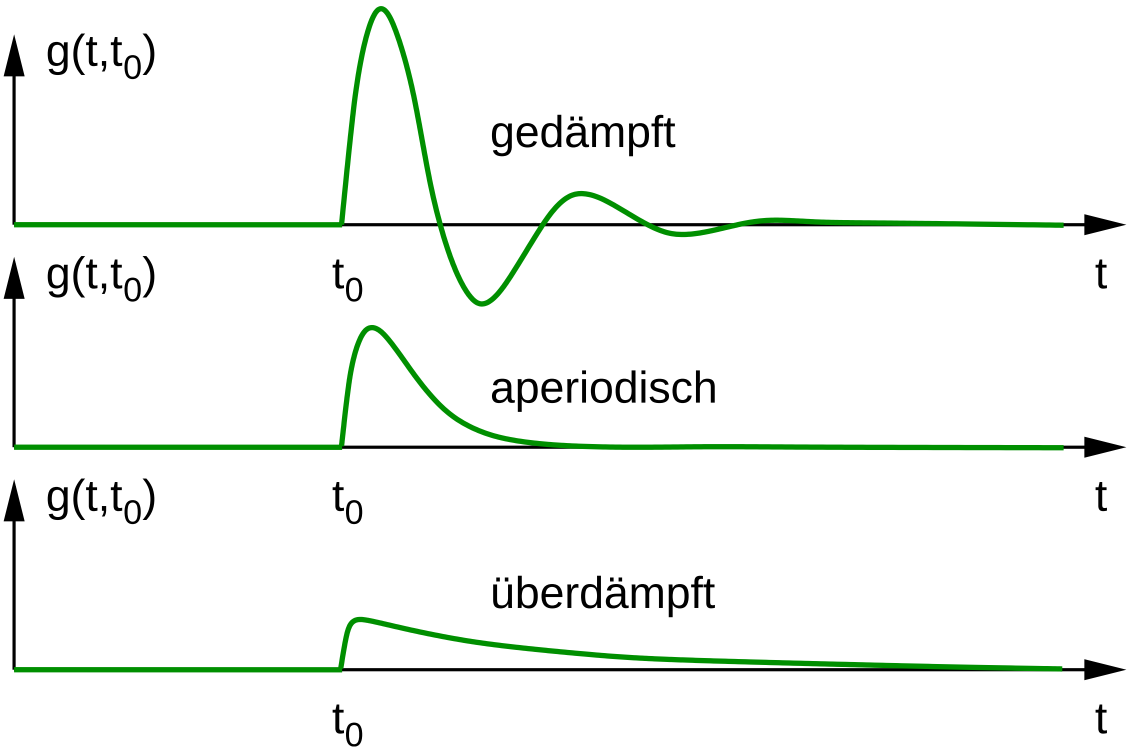


Abb. 3.15: Greensfunktionen für den gedämpften harmonischen Oszillator im gedämpften, aperiodischen und überdämpften Fall.

- im überdämpften Grenzfall mit $\omega_1 = i\lambda_+$ and $\omega_2 = i\lambda_-$

$$g(t, t_0) = \frac{1}{m(\lambda_+ - \lambda_-)} \begin{cases} \left[e^{-\lambda_-(t-t_0)} - e^{-\lambda_+(t-t_0)}\right] & \text{für } t > t_0 \\ 0 & \text{für } t < t_0 \end{cases}$$

  und die Bahnkurve

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \; g(t, t') f(t') \\ &= \int_{-\infty}^{t} dt' \; \frac{1}{m(\lambda_+ - \lambda_-)} \left[e^{-\lambda_-(t-t')} - e^{-\lambda_+(t-t')}\right] f(t') \end{aligned}$$

3.13 Zusammenhang zwischen Greensfunktion und dynamischer Suszeptibilität

Die Dynamische Suszeptibilität ist gerade die Fouriertransformierte der Greensfunktion. Deshalb werden beide auch Antwortfunktionen genannt. Hier soll dieser Zusammenhang zwischen Greensfunktion und Suszeptibilität deutlich gemacht werden.

Wir beginnen mit der allgemeinen Form der Greensfunktion von Gl. 3.72

$$g(t, t_0) = \frac{-i\theta(t - t_0)}{m(\omega_1 - \omega_2)} \left[e^{i\omega_1(t-t_0)} - e^{i\omega_2(t-t_0)}\right]$$

und bilden die Fouriertransformierte bezüglich der ersten Zeitkoordinate t

$$\begin{aligned}
g(\omega, t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\ \mathrm{e}^{-i\omega t} g(t, t_0) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt\ \mathrm{e}^{-i\omega t} \frac{-i\theta(t-t_0)}{m(\omega_1-\omega_2)} \left[\mathrm{e}^{i\omega_1(t-t_0)} - \mathrm{e}^{i\omega_2(t-t_0)}\right] \\
&= \frac{-i\mathrm{e}^{-i\omega t_0}}{m(\omega_1-\omega_2)} \int_{t_0}^{\infty} dt\ \mathrm{e}^{-i\omega(t-t_0)} \left[\mathrm{e}^{i\omega_1(t-t_0)} - \mathrm{e}^{i\omega_2(t-t_0)}\right] \\
&= \frac{-i\mathrm{e}^{-i\omega t_0}}{m(\omega_1-\omega_2)} \int_{0}^{\infty} dt\ \left[\mathrm{e}^{i(\omega_1-\omega)t} - \mathrm{e}^{i(\omega_2-\omega)t}\right] \\
&\overset{\mathrm{Im}[\omega_i]>0}{=} \frac{-i\mathrm{e}^{-i\omega t_0}}{m(\omega_1-\omega_2)} \left[\frac{-1}{i(\omega_1-\omega)} - \frac{-1}{i(\omega_2-\omega)}\right] \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-i\omega t_0}}{m(\omega_1-\omega_2)} \frac{\omega_2-\omega_1}{(\omega_1-\omega)(\omega_2-\omega)} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-i\omega t_0}}{m} \frac{-1}{\omega^2+\omega_1\omega_2-(\omega_1+\omega_2)\omega}
\end{aligned}$$

Nun ersetzen wir die beiden Eigenfrequenzen mittels Gl. 3.34 S. 43

$$\omega_1 = +\sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2} + i\frac{\alpha}{2m} = \bar{\omega} + i\lambda$$
$$\omega_2 = -\sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2} + i\frac{\alpha}{2m} = -\bar{\omega} + i\lambda$$

wobei auch $\bar{\omega}$, wie im Kriechfall, imaginär sein darf. Damit erhalten wir

$$\omega_1\omega_2 = (\bar{\omega}+i\lambda)(-\bar{\omega}+i\lambda) = -\bar{\omega}^2 - \lambda^2 = -\omega_0^2$$
$$\omega_1+\omega_2 = (\bar{\omega}+i\lambda) + (-\bar{\omega}+i\lambda) = 2i\lambda$$

Wir erhalten

$$g(\omega, t_0) = \frac{\mathrm{e}^{-i\omega t_0}}{m} \frac{-1}{\omega^2+\omega_1\omega_2-(\omega_1+\omega_2)\omega} = \frac{\mathrm{e}^{-i\omega t_0}}{m} \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+2i\lambda\omega}$$

Im letzten Term erkennen wir, für $t_0 = 0$, gerade die dynamische Suszeptibilität χ aus Gl. 3.55 auf S. 52. Die dynamische Suszeptibilität ist also gerade die Fourier transformierte der Greensfunktion.

Es gilt also

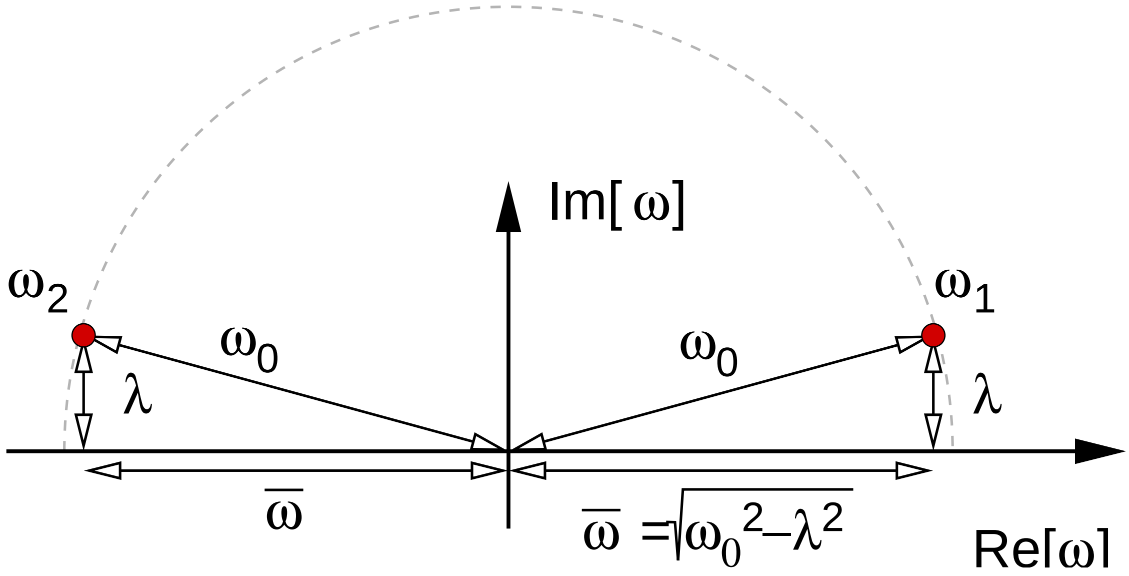
ZUSAMMENHANG ZWISCHEN GREENSFUNKTION UND DYNAMISCHER SUSZEPTIBILITÄT

$$g(\omega, t_0) = \chi(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t_0}$$

3.14 Pole der Greensfunktion

Die Greensfunktion hat zwei Pole in der komplexen ω-Ebene, die gerade an den Positionen der Eigenfrequenzen liegen.

$$g(\omega, t_0) = \frac{\mathrm{e}^{-i\omega t_0}}{m(\omega_1-\omega_2)} \left(\frac{1}{\omega-\omega_1} - \frac{1}{\omega-\omega_2}\right)$$



3.15 Zusammenfassung

Mathematische Wiederholung:

- Umwandlung Matrix-Vektor Notation und Komponentenschreibweise.
- Matrixdiagonalisierung
- Funktionen von Matrizen
- Fouriertransformation
- Komplexe Zahlen
- gewöhnliche Differentialgleichungen (Exponentialansatz, konstante Koeffizienten, homogen, inhomogen, Anfangsbedingungen
- Ebenengleichung
- Kurvendiskussion
- Heaviside und Deltafuntion

Alle Matrizenoperationen wie Matrixdiagonalisierung,Inversion oder die Auswertung von Funktionen von Matrizen sollten anhand von 2×2 Matrizen explizit vorgeführt werden können.

Verlet Algorithmus zur numerischen Lösung von geöhnlichen Differentialgleichungen Prinzip Differentialquotient, Zeitschritt, Stabilität.

Modellsysteme

- Freies Teilchen $m\ddot{\vec{r}} = 0$
- Freier Fall $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_0$
- Freier Fall mit Reibung $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_0 - \alpha\dot{\vec{r}}$
- Harmonischer Oszillator $\boldsymbol{m}\ddot{\vec{r}} = -\boldsymbol{c}x$
- Harmonischer Oszillator mit Reibung $\boldsymbol{m}\ddot{\vec{r}} = -\boldsymbol{c}x - \alpha\dot{\vec{r}}$

Harmonischer Oszillator

- Dynamische Matrix
- Lösungsweg beim Vieldimensionalen harmonischen Oszillator
- Form der Loesung des Vieldimensionalen harmonischen Oszillator (Schwingungsmoden)

Dynamische Matrix, dynamische Suszeptibilität, Linienbreite, Lebensdauer, Greensche Funktion, Kraftstoß

Chapter 4

Wirkungsprinzip (4h)

4.1 Einleitung

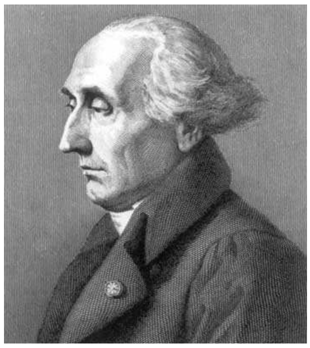


Abb. 4.1: Joseph Louis Lagrange, 1736-1813

Bisher haben wir uns mit der Lösung individueller Teilchenbahnen beschäftigt. Häufig interessieren die individuellen Teilchenbahnen weniger als übergeordnete Aspekte der Dynamik. Stellen wir uns ein Material vor, das aus Myriaden von Atomen besteht. Es ist aussichtslos, die Anfangsbedingungen der Atomdynamik an das Experiment anzupassen oder diese Bewegungsgleichungen zu lösen. Solche Systeme sind zudem im Allgemeinen chaotisch, was bedeutet, dass der kleinste Fehler in den Anfangsbedingungen in kürzester Zeit enorm anwächst. Allerdings haben diese Materialien dennoch Eigenschaften, die nicht wesentlich von den Anfangsbedingungen abhängen. Häufig sind gerade diese Eigenschaften von Interesse, weil nur sie auch reproduzierbar sind.

Für eine solch übergeordnete Beschreibung der Dynamik hat sich das Wirkungsprinizip als außerordentlich nützlich erwiesen, das wir in diesem Kapitel vorstellen werden.

Die Grundlage des Wirkungsprinzips wurde 1747 von Maupertuis gelegt als er das folgende Postulat aufstellte: *"Die Natur wählt unter allen möglichen Bewegungen diejenige aus, die ihr Ziel mit dem kleinsten Aufwand von Aktion (Wirkung) erreicht"* Für die **menschliche** Natur wäre dies eine naheliegende Vermutung.

Das Wirkungsprinzip bildet die Grundlage der modernen Beschreibung der Physik. Es lässt sich sowohl in der klassischen Physik als auch in der Quantentheorie einsetzen. Während Newton seine Gleichungen anhand von Beobachtungen abgeleitet hat, sind viele Probleme für eine solche Vorgehensweise zu komplex. Deshalb geht man in der Elementarteilchenphysik von beobachteten oder postulierten Symmetrien aus und sucht sich danach mögliche Bewegungsgleichungen, die mit diesen Symmetrien vereinbar sind. Diese werden anschließend anhand des Experiments verifiziert oder ausgeschlossen.

Das Wirkungsprinzip eignet sich auch für Koordinatentransformationen. Diese sind zur Vereinfachung von Bewegungsgleichungen nützlich. Sie stellen außerdem den Zusammenhang mit Symmetrien her.

Die Berücksichtigung von Zwangsbedingungen wird durch das Wirkungsprinzip deutlich vereinfacht. Zwangsbedingungen spielen zum Beispiel bei der Bewegung eines Zuges, die immer parallel zu Schienen verlaufen muss, eine Rolle. Ähnlich besteht ein Motor aus vielen Teilen, von denen sich jedes nur entlang einer genau vorgegbenen Bahn bewegen darf, damit die Motorkraft gezielt in den Vortrieb umgewandelt wird. Durch diese Zwangsbedingungen wird aus einer linearen Bewegung des Kolbens eine Drehbewegung der Räder und aus der Bewegung der Räder wieder eine lineare Vorwärtsbewegung des Autos.

In Simulationen werden allerhand Tricks verwendet, deren Auswirkungen genau verstanden sein müssen. Dabei ist das Wirkungsprinzip ausgesprochen nützlich, um die Bewegungsgleichungen zu formulieren und um das Verhalten der resultierenden Bewegungsformen zu verstehen.

Das Wirkungsprinzip ist durch seine elegante Einfachheit besonders faszinierend. Im Prinzip kann die Dynamik aller elementaren Teilchen und Wechselwirkungen mit Hilfe des Wirkungsprinzips durch nur eine einzige Funktion definiert werden.

Während das Wirkungsprinzip für einfache Probleme wie eine unnötige Komplizierung erscheint, so entfaltet sich der Wert des Wirkungsprinzips bei komplizierteren Problemen.

Ich fasse zusammen. Die Vorteile des Wirkungsprinzips sind

- Eleganz
- Koordinatentransformationen
- Symmetrien und Erhaltungsgrößen
- Zwangsbedingungen
- Eine einzige Funktion statt vieler Differentialgleichungen
- Grundlage der Quantenmechanik
- Bestimmung von Bewegungsgleichungen anhand von Symmetrien

4.2 Hamiltonsches Prinzip

Es wird empfohlen, sich vor der weiteren Lektüre dieses Kapitels mit dem Prinzip von Funktionalen in Anhang D.18 auf Seite 299 vertraut zu machen.

Das **Hamiltonsche Prinzip**[1] wird als Prinzip der kleinsten Wirkung[2] bezeichnet. Jedem nur erdenklichen Pfad $\vec{x}(t)$ zwischen zwei Punkten wird eine Wirkung $\mathcal{S}$ zugeordnet. Ein Teilchen "wählt" sich genau den Pfad mit der kleinsten Wirkung.

Dazu definieren wir zunächst das **Wirkungsfunktional**, das jedem **Pfad** der zur Zeit t_1 mit den Koordinaten $\vec{x}_1$ beginnt und zur Zeit t_2 bei den Koordinaten $\vec{x}_2$ endet, einen Wert, die Wirkung S, zuordnet. Ein Pfad ist dabei eine beliebige stetige Funktion $\vec{x}(t)$ der Koordinaten von der Zeit. Es gibt keiner anforderung an seine Differenzierbarkeit. Wir beschreiben hier die Koordinaten durch das Symbol[3] $\vec{x}$ um zu verdeutlichen, dass es sich hier nicht notwendigerweise um räumliche Koordinaten handeln muss. Mann nennt $\vec{x}$ auch verallgemeinerte Koordinaten.

Definition 4.1 *WIRKUNGSFUNKTIONAL* [a]

$$S\big[\vec{x}(t)\big] = \int_{t_1,\vec{x}_1}^{t_2,\vec{x}_2} dt\; \mathcal{L}(\vec{x},\vec{v},t) \qquad \text{wobei} \qquad \vec{v} \stackrel{def}{=} \frac{d\vec{x}}{dt} \tag{4.1}$$

Die Einheit der Wirkung ist Energie mal Zeit. Sie hat also dieselbe Einheit wie ein Drehimpuls.

[a] ZUR NOTATION: DER AUSDRUCK $T_I, \vec{X}_I$ BESCHREIBT NICHT ZWEI BEDINGUNGEN: DIE WERTE $\vec{X}_I, \vec{X}_F$ SIND NICHT DIE INTEGRATIONSGRENZEN, SONDERN BESTIMMEN DIE RANDBEDINGUNGEN: $\vec{X}(T_I) = \vec{X}_I$

Die Funktion $\mathcal{L}(\vec{x},\vec{v},t)$ heißt **Lagrangefunktion**. [4] Der Lagrangefunktion kommt im Folgenden eine zentrale Rolle zu.

[1] William R. Hamilton. 1805-1865 Irischer Mathematiker, Physiker, Astronom.
[2] Korrekt heißt es das Prinzip extremalster Wirkung.
[3] In Textbüchern wird hier üblicherweise das Symbol $\vec{q}$ statt $\vec{x}$ gewählt.
[4] Joseph Louis Lagrange, 1736-1813 Italienischer Mathematiker und Astronom. Begründer der analytischen Mechanik

Die Wirkung kann grob gesprochen als Aufwand betrachtet werden, der nötig ist, um in dem gegebenen Zeitintervall von einer Anfangsposition $\vec{x}_i$ zu einer Endposition $\vec{x}_f$ zu gelangen. Deshalb bezeichne ich das Wirkungsprinzip gerne auch als das Prinzip der maximalen Faulheit.

Das Wirkungsprinzip, auch Hamiltonsches Prinzip genannt, sagt nun, dass von allen Pfaden derjenige mit einer extremalen Wirkung verwirklicht wird.

HAMILTONSCHES PRINZIP

Von allen stetigen Pfaden $\vec{x}(t)$ mit $\vec{x}(t_i) = \vec{x}_i$ und $\vec{x}(t_f) = \vec{x}_f$ wird derjenige realisiert, für den die Wirkung ein lokales Extremum aufweist.
Für den physikalischen Pfad, die Bahnkurve, verschwindet also die Variation der Wirkung

$$\delta S\big[\vec{x}(t)\big] = 0$$

bzw. ihre Funktionalableitung[a]

$$\frac{\delta S}{\delta x_j(t)} = 0$$

Der Index j ist hier der Komponentenindex des Vektors $\vec{x}$ und bezieht sich nicht auf Anfangs, bzw. Endpunkt

[a]Die Begriffe Variation und Funktionalableitung werden später noch genauer erklärt.

Prinzipiell ist das Wesentliche nun dargelegt. Nun folgen eigentlich nur noch mathematische Folgerungen, wenn auch nicht ganz einfache.

4.2.1 Beispiele für Lagrangefunktionen

Teilchen im Potential

Die meisten Probleme der Mechanik lassen sich durch die Lagrangefunktion beschreiben, die als "kinetische Energie minus potentieller Energie" dargestellt werden kann. Für ein Einteilchensystem bedeutet dies

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{1}{2} m\vec{v}^{\,2} - V(\vec{r}, t) \tag{4.2}$$

Dabei ist $V(\vec{r}, t)$ das Potential und $\vec{v}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\vec{r}}(t)$ die Geschwindigkeit.

Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

Es gibt aber auch Probleme, die nicht in dieses Muster "Lagrangefunktion gleich kinetische weniger potentieller Energie" fallen, wie zum Beispiel ein **geladenes Teilchen** im Magnetfeld, welches durch die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{1}{2} m\vec{v}^{\,2} - q\Phi(\vec{r}, t) + q\vec{v}\vec{A}(\vec{r}, t) \tag{4.3}$$

beschrieben wird. Dabei ist q die Ladung des Teilchens, $\Phi(\vec{r}, t)$ das elektrische Potential und $\vec{A}(\vec{r}, t)$ das **Vektorpotential**, das wir im nächsten Band von ΦSX kennen lernen werden. **Elektrostatisches Potential** und Vektorpotential hängen über

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t)\\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}, t) - \partial_t \vec{A}(\vec{r}, t)\end{aligned}$$

mit dem **elektrischen Feld** $\vec{E}$ und dem Magnetfeld $\vec{B}$ zusammen.

4.2.2 Extremalbedingung und Funktionalableitung

Wir wollen uns hier den Begriff der Funktionalableitung und die Bedeutung des Extremalprinzips für Funktionale anhand der Analogie von Funktionalen zu Funktionen verdeutlichen.

1. Die Ableitung einer Funktion f eines Skalars x erhalten wir aus der folgenden Konstruktion:
$$f(x+dx) = f(x) + \frac{df}{dx}dx + O(dx^2) \Leftrightarrow df = \frac{df}{dx}dx$$
$$\Leftrightarrow \frac{df}{dx} = \lim_{dx\to 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$
Um die Position x_0 eines Minimums der Funktion $f(x)$ eines Skalars x zu bestimmen, suchen wir die Punkte, an denen die Ableitung der Funktion verschwindet.
$$f(x) = \min \Rightarrow \frac{df}{dx} = 0 \rightsquigarrow x_0$$
Beachte, dass aus dem Verschwinden der Ableitung nicht eindeutig auf ein Minimum geschlossen werden kann, sondern dass auch ein Sattelpunkt oder ein Maximum vorliegen könnte.

2. Die partielle Ableitung einer Funktion $f(\vec{x})$ eines Vektors $\vec{x}$ erhalten wir aus der folgenden Konstruktion:
$$f(\vec{x}+d\vec{x}) = f(\vec{x}) + d\vec{x}\vec{\nabla}f + O(|d\vec{x}|^2) = f(x) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i + O(|d\vec{x}|^2)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\vec{x}+\lambda\vec{e}_i) - f(\vec{x})}{\lambda}$$
Dabei ist $\vec{e}_i$ der Einheitsvektor, der in Richtung der i-ten Koordinatenachse zeigt. Die Komponenten von $\vec{e}_i$ sind gerade das Kronecker-δ, i.e. $(\vec{e}_i)_j = \delta_{i,j}$.
Um die Position $\vec{x}_0$ eines Minimums der Funktion $f(\vec{x})$ eines Vektors $\vec{x}$ zu bestimmen, suchen wir die Punkte, an denen alle partiellen Ableitungen der Funktion verschwinden.
$$f(\vec{x}) = \min \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \rightsquigarrow \vec{x}_0$$
Beachte, dass die partiellen Ableitungen am Extremum für alle i verschwinden müssen.

3. Der wesentliche Unterschied zwischen einem Funktional $F[x(t)]$ und einer Funktion $f(\vec{x}) = f(\{x_i\})$ ist, dass der Komponentenindex i des Vektors $\vec{x}$ durch einen kontinuierlichen Index t ersetzt wird. Dadurch wird aus dem Vektor $\vec{x}$ eine Funktion $x(t)$ und aus der Funktion $f(\vec{x})$ ein Funktional $F[x(t)]$.
Die Funktionalableitung eines Funktionals $F[x(t)]$ erhalten wir aus der folgenden Konstruktion:
$$F[x(t)+\delta x(t)] = F[x(t)] + \int dt\, \frac{\delta F}{\delta x(t)}\delta x(t) + O(\delta x^2)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\delta F}{\delta x(t_0)} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{F[x(t)+\lambda\delta(t-t_0)] - F[x(t)]}{\lambda}$$
wobei $\delta(t-t_0)$ die Diracsche Deltafunktion ist.
Um die Bahn $[\vec{x}_0(t)]$ zu bestimmen, für die das Funktional $F[x(t)]$ einer Funktion $\vec{x}(t)$ minimal wird, suchen wir die Funktionen, an denen alle Funktionalableitungen des Funktionals verschwinden.
$$F[\vec{x}(t)] = \min \Rightarrow \frac{\delta F}{\delta \vec{x}(t)} = 0 \rightsquigarrow [\vec{x}_0(t)]$$
Beachte, dass die Funktionalableitungen am Extremum für alle t verschwinden müssen. Das Minimum ist nun die Funktion $\vec{x}_0(t)$.
Der wesentliche Unterschied zur Minimalbedingung für eine Funktion eines Vektors ist, dass die Vektorindizes kontinuierlich geworden sind $i \to t$.

4.2.3 Euler-Lagrange-Gleichungen

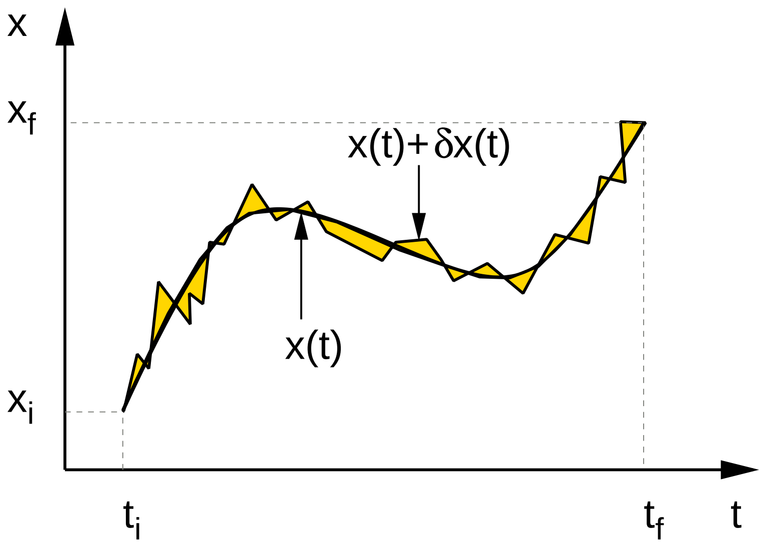


Abb. 4.2: Variation des Weges.

Wir gehen nun von einem Pfad $x(t)$ aus und untersuchen die Änderung δS der Wirkung, wenn wir den Pfad ein wenig verändern. Der geänderte Pfad ist $x(t)+\delta x(t)$. Da nur solche Pfade in Betracht kommen, welche die Randbedingungen $x(t_i) = x_i$ und $x(t_f) = x_f$ erfüllen, muss die Variation $\delta x(t)$ am Anfang und am Ende verschwinden.

$$S\big[x(t)+\delta x(t)\big] = \int_{t_i,x_i}^{t_f,x_f} dt\, \mathcal{L}\Big(x(t)+\delta x(t), \underbrace{\dot{x}(t)+\delta\dot{x}(t)}_{v(t)+\delta v(t)}, t\Big)$$

Wir entwickeln die Lagrangefunktion in eine Taylor-Reihe[5]:

$$= \int_{t_1,x_1}^{t_2,x_2} dt\, \left\{\mathcal{L}(x(t),\dot{x}(t),t) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\delta x(t) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}\delta\dot{x}(t) + O(\delta x,\delta\dot{x})^2\right\} \tag{4.4}$$

Der Term

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}$$

ist die Ableitung der Lagrangefunktion $\mathcal{L}(x,v,t)$ nach dem zweiten Argument, das die Geschwindigkeit des Pfades aufnimmt. Dies Ableitung wird gewöhnlich als

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}$$

geschrieben. Da diese Schreibweise zu Beginn etwas verwirrend ist, werde ich sie zunächst vermeiden und sie erst später einsetzen, nachdem wir uns etwas an die Ausdrücke gewöhnt haben.. Die Ableitungen der Lagrangefunktion werden jeweils für die Argumente $x(t)$, $v=\dot{x}(t)$, t gebildet.

Der erste Term aus Beziehung Gl. 4.4 wird integriert und ergibt unter Verwendung der Definition der Wirkung Gl. **??**:

$$= S\big[x(t)\big] + \int_{t_i}^{t_f} dt\, \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\delta x(t) + \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}\left(\frac{d}{dt}\delta x(t)\right)}_{A}\right\} + O(\delta x(t))^2$$

[5]Beachte, dass mit dem Pfad nur $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ variiert wird, nicht aber t

Partielle Integration[6] des mit A bezeichneten Terms liefert

$$= S\big[x(t)\big] + \int_{t_i}^{t_f} dt\, \delta x(t) \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \right) \right\} + \int_{t_i}^{t_f} dt\, \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \delta x \right\} + O(\delta x(t))$$

$$= S\big[x(t)\big] + \int_{t_i}^{t_f} dt\, \delta x(t) \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \right) \right\} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}\bigg|_{x_f, v_f, t_f} \underbrace{\delta x(t_f)}_{=0} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}\bigg|_{x_i, v_i, t_i} \underbrace{\delta x(t_i)}_{=0} + O(\delta x(t))$$

Zusammengefasst erhalten wir also

$$S\Big[x(t) + \delta x(t)\Big] = S\Big[x(t)\Big] + \int_{t_i}^{t_f} dt\, \underbrace{\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \right) \right\}}_{\text{Funktionalableitung: } \frac{\delta S}{\delta x(t)}} \delta x(t) + O\big(\delta x(t)\big)^2$$

Betrachtet man obigen Term, so erkennt man, dass der erste Teil des Terms $S\,[x(t)]$ die Wirkung des Pfades $x(t)$ darstellt. Der zweite Term ist die erste Variation der Wirkung um $x(t)$.

Den Vorfaktor $\frac{\delta S}{\delta x(t)}$ vor dem linearen Term nennt man **Funktionalableitung**, d.h.

$$S[x(t) + \delta x(t)] = S[x(t)] + \int dt\, \frac{\delta S}{\delta x(t)} \delta x(t) + O(\delta x(t))^2$$

Di Funktionalableitung unserer Wirkung hat also die Form

$$\frac{\delta S}{\delta x(t)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\bigg|_{x(t), v=\dot{x}(t), t} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}\bigg|_{x(t), v=\dot{x}(t), t}$$

Soll nun die Gesamtwirkung minimal sein, muss der Integrand für alle $\delta x(t)$ Null werden. Dies ist nur dann der Fall, wenn die Funktionalableitung der Wirkung im Intervall $]t_1, t_2[$ verschwindet.

Damit erhalten wir als Bedingung für das Hamiltonsche Prinzip die

EULER-LAGRANGE-GLEICHUNG

$$\frac{\delta S}{\delta x(t)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \right) = 0 \qquad \text{with} \qquad v = \dot{x} \tag{4.5}$$

Bemerkung: Im Folgenden wird häufig für die Euler-Lagrange Gleichung die Abkürzung ELG verwendet.

4.2.4 Äquivalenz von Hamiltonschem Prinzip und Newtonschen Gleichungen

Die Newtonschen Gleichungen folgen direkt aus dem Wirkungsprinzip. Wir zeigen dies am Beispiel der Lagrangefunktion Gl. 4.2

$$\mathcal{L}(x, v, t) = \frac{1}{2} m v^2 - V(x)$$

Einsetzen in die Euler-Lagrange-Gleichungen führt auf

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} m v = 0$$

was uns, nach Ersetzen von $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$ und $v = \dot{x}$, die bekannte Newtonsche Bewegungsgleichung liefert.

$$m\ddot{x} = F$$

[6] siehe Anhang D.11.2.

4.3 Eindeutigkeit der Lagrangefunktion

Die Frage, ob die Lagrangefunktion, die zu einer gegebenen Bewegungsgleichung gehört, eindeutig ist, wird später bei den kanonischen Transformationen in Kapitel 11.3 eine wichtige Rolle spielen. Editor: Siehe nach ob der Verweis korrekt ist.

Das Funktional

$$S'[x(t)] = \int_{t_1,x_1}^{t_2,x_2} dt \left\{ \mathcal{L}(x,\dot{x},t) + \frac{d}{dt}\Lambda(x,t) \right\}$$

ist variationell für denselben Pfad wie

$$S[x(t)] = \int_{t_1,x_1}^{t_2,x_2} \mathcal{L}(x,\dot{x},t)\, dt,$$

denn

$$S'[x(t)] = S[x(t)] + \Lambda(x_2,t_2) - \Lambda(x_1,t_1).$$

Da der Pfad an den Anfangs- und Endpunkten wegen den Randbedingungen nicht variiert werden darf, trägt Λ nicht zu einer solchen Variation bei.

Deshalb kann zu jeder Lagrangefunktion eine Funktion der Art

$$\frac{d}{dt}\Lambda(x,t) = \frac{\partial\Lambda}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

addiert werden, ohne dass sich der physikalische Pfad $x_0(t)$ ändert. Λ ist also nicht "beobachtbar".

Abb. 4.3: Leonhard Euler, 1707-1783 (von Emanuel Handmann 1753)

4.3.1 Exkurs: Veranschaulichung des Wirkungsprinzips

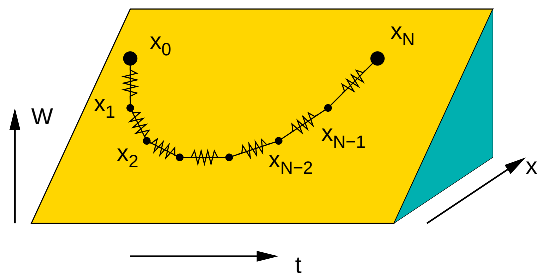
Um sich das Wirkungsprinzip zu veranschaulichen, scheint mir die folgende Analogie nützlich, die am Beispiel des freien Falls dargestellt wird. Die Wirkung für ein Teilchen in einem Potential $V(x)$ hat die Form.

$$S[x(t)] = \int dt \left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 - V(x) \right)$$

Wir diskretisieren die Wirkung in der Zeit. Die diskreten Zeitpunkte sind $t_i = t_0 + \Delta \cdot i$, wobei i von 0 bis N läuft. Die entsprechenden Positionen bezeichnen wir mit $x_i = x(t_i)$.

$$\begin{aligned} S[x(t)] &= \sum_{i=0}^{N-1} \Delta \frac{1}{2} m \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta} \right)^2 - \sum_{i=0}^{N} \Delta V(x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m}{\Delta}}_{c} (x_{i+1} - x_i)^2 + \sum_{i=0}^{N} \underbrace{(-\Delta V(x_i))}_{W(x_i)} \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} c\, (x_{i+1} - x_i)^2 + \sum_{i=0}^{N} W(x_i) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck entspricht der potentiellen Energie eines Systems von Teilchen, die das Potential $W(x) = -V(x)\Delta$ erfahren und die durch Federn mit der Kraftkonstante $c = \frac{m}{\Delta}$ miteinander verbunden sind.[7]



Die Abbildung demonstriert das Prinzip an einem einfachen Fall, nämlich $V(x) = -gx$. Dies ist der freie Fall, wobei die x-Achse entgegen der üblichen Konvention zum Erdmittelpunkt hin zeigt. Die Wahl des Vorzeichens mag im Vergleich zum freien Fall etwas verwirrend sein, und wurde nur der einfacheren Darstellbarkeit halber gewählt.

Nun können wir das Minimum dieser potentiellen Energie unter der Randbedingung suchen, dass x_0 und x_N einen vorgegebenen Wert besitzen. Das System wird im Potential $W(x)$ durchhängen um $W(x_i)$ zu minimieren. Dabei spannen sich aber die Federn, was deren Energie erhöht. Im Gleichgewicht, das heißt im Minimum der Energie, heben sich die Kräfte der Federn und die des Potentials gerade auf.

Ist das Potential konstant, wie in der obigen Abbildung erhalten eine Parabelkurve, genau wie im freien Fall, der durch die entsprechende Wirkung dargestellt wird.

In dieser Analogie wurde die kinetische Energie durch die Federspannung ersetzt. Anstelle einer zeitabhängigen Bahn eines einzigen Teilchens, betrachten wir in dieser Analogie ein rein statisches Modell vieler Teilchen.

4.4 Zwangsbedingungen

4.4.1 Einleitung

Es sollen im Folgenden Systeme betrachtet werden, in denen bestimmte Größen durch die Konstruktion oder sonstige Bedingungen fest vorgegeben sind.

Hier einige Beispiele:

- Das **Fadenpendel**: Es wirkt eine zusätzliche Kraft (Zwangskraft) auf das Gewicht bei $\vec{r}(t)$, so dass der Abstand vom Aufhängepunkt bei $\vec{r}_0$ konstant bleibt, d.h.

$$|\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = l$$

- Der Motor: Bis auf einen einzigen Freiheitsgrad sind alle Bewegungen durch Zwangskräfte eingeschränkt.

[7] Die folgende Abbildung ist kein exaktes Abbild der obigen Gleichung, weil die Länge einer Feder in diesem Modell den Wert

$$\begin{aligned}\sqrt{\Delta x^2 + \Delta^2 + (\Delta W)^2} &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta^2 + (\Delta x)^2 \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 + O(\Delta x^3)} \\ &= \Delta \sqrt{1 + \frac{1}{\Delta^2}\left[1 + \left(\frac{dW}{dx}\right)^2\right] \Delta x^2 + O(\Delta x^3)} \\ &= \Delta + \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{dW}{dx}\right)^2\right] \Delta x^2 + O(\Delta x^3)\end{aligned}$$

Um das Bild mit unserer Gleichung in Einklang zu bringen, muss also die Kettenlänge und die vertikale Variation von $W(x)$ klein sein. Ein besseres Modell wäre eine Kette, die senkrecht nach unten hängt und deren Anfang und Ende sich nur durch den vertikalen Abstand unterscheiden. Die Gravitationskraft würde dann das Potential repräsentieren.

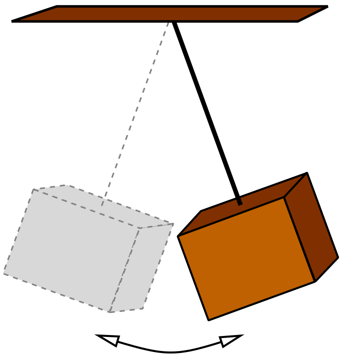


Abb. 4.4: Pendel

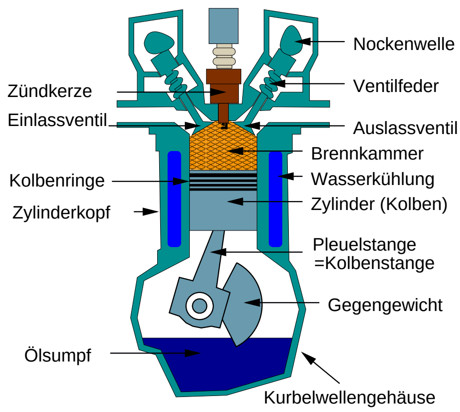


Abb. 4.5: Klassischer Kolbenmotor

- Die Brücke: Eine Brücke muss in gewissen Grenzen beweglich sein, um den Windkräften standhalten zu können. Dadurch werden die Maximalkräfte gleichmäßig auf alle Komponenten verteilt. Die Bewegung einer Brücke durch die Windkraft ist durch Zwangskräfte eingeschränkt. Wenn eine Zwangskraft über eine kritische Schranke ansteigt, die durch die Stabilität seiner Komponenten gegeben ist, stürzt die Brücke zusammen.

Die oben beschriebenen Zwangsbedingungen fallen in die Klasse holonomer Zwangsbedingungen:

Definition 4.2 *HOLONOME ZWANGSBEDINGUNGEN*
Eine holonome Zwangsbedingung kann durch eine Gleichung

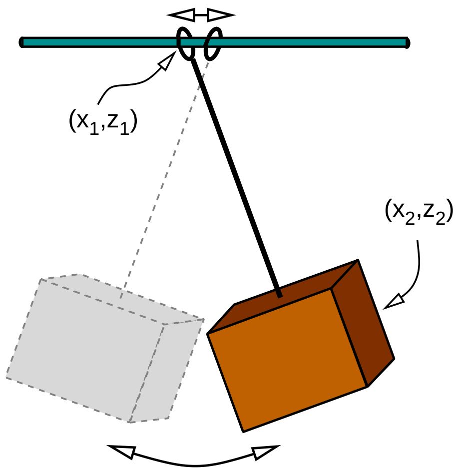
$$G(\vec{x}, t) = 0 \tag{4.6}$$

ausgedrückt werden.
Man unterscheidet hierbei die holonom-skleronomen Zwangsbedingungen, bei denen die Zeitabhängigkeit von G verschwindet, und die holonom-rheonomen Zwangbedingungen, bei denen die Zeitabhängigkeit nicht verschwindet.

Wir werden uns im Folgenden auf holonome Zwangsbedingungen beschränken. Nicht-holonome Zwangsbedingungen enthalten zum Beispiel eine Ungleichbeziehung anstelle der Gleichheit in Gl. 4.6. Ein weiteres Beispiel ist eine Zwangsbedingung, die sich nicht durch ein totales Differential darstellen lässt. Sie hätte die Form $\sum_i f_i(\vec{x}, t) dx_i + f_0 dt = 0$, wobei die Funktionen f_i sich nicht als Gradientenfeld einer Funktion $G(\vec{x}, t)$ darstellen lassen. Ein Beispiel für eine solche Bewegung wäre ein

Schlittschuh, der nur in Richtung der Kufe gleiten kann.

Beispiel: Zweidimensionales Pendel mit gleitender Aufhängung als Beispiel einer holonomen Zwangsbedingung.



$$G_1(x_1, z_1, x_2, z_2) = z_1$$
$$G_2(x_1, z_1, x_2, z_2) = (x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - \ell^2$$

4.4.2 Lösung mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren

Es wird empfohlen, sich vor der Lektüre dieses Kapitels mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren in Anhang D.20 auf Seite 305 vertraut zu machen

Im Folgenden verallgemeinern wir die **Methode der Lagrange-Multiplikatoren** auf Funktionale. Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren ist im Anhang D.20 auf Seite 305 beschrieben. Entsprechend der Methode der Lagrange-Multiplikatoren erweitern wir das Wirkungsfunktional um die Zwangsbedingung $G_\alpha(x(t)) \equiv 0$:

$$S\Big[x_i(t), \lambda(t)\Big] = \int_{t_1,x_1}^{t_2,x_2} dt \, \underbrace{\Big\{\mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i, t) + \sum_\alpha \lambda_\alpha(t) G_\alpha(x_i, t)\Big\}}_{\bar{\mathcal{L}}}$$

Wir fassen die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ mit dem Zwangsbedingung in der erweiterten Lagrangefunktion $\bar{\mathcal{L}}$ zusammen

$$\bar{\mathcal{L}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L} + \sum_\alpha \lambda_\alpha G_\alpha$$

Anschließend verfahren wir nach den folgenden Schritten. **Es ist sinnvoll, sich diese Schritte gleich am darauf folgenden Beispiel des Fadenpendels zu verdeutlichen.**

1. **Aufstellen der Euler-Lagrange-Gleichung:** Nun bilden wir wie bekannt die Euler-Lagrange-Gleichungen mit der erweiterten Wirkung $\bar{\mathcal{L}}$

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial v_i}\right) - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial x_i} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \underbrace{\sum_\alpha \lambda_\alpha(t)\frac{\partial G_\alpha}{\partial x_i}}_{\text{Zwangskraft}} = 0 \qquad (4.7)$$

2. **Zweite Ableitung der Zwangsbedingungen nach der Zeit**
   Aus $G_\alpha(x(t), t) \equiv 0$ folgt$\frac{d^2 G_\alpha}{dt^2} = 0$. Dadurch erzeugt man zusätzliche Gleichungen, welche zweite Ableitungen des Pfades enthalten. Dies erlaubt es später, die Lagrange-Multiplikatoren zu eliminieren.

$$
\begin{aligned}
0 \overset{!}{=} \frac{d^2}{dt^2} G_\alpha(x,t) &= \frac{d}{dt}\left[\sum_i \frac{\partial G_\alpha}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial G_\alpha}{\partial t}\right] \\
&= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial x_i \partial x_j}\dot{x}_i\dot{x}_j + \sum_i \frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial t \partial x_i}\dot{x}_i + \sum_i \frac{\partial G_\alpha}{\partial x_i}\ddot{x}_i \\
&\quad + \sum_i \frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial t \partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial t^2} \\
\Rightarrow 0 = \sum_i \frac{\partial G_\alpha}{\partial x_i}\ddot{x}_i &+ \sum_{i,j} \frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial x_i \partial x_j}\dot{x}_i\dot{x}_j + 2\sum_i \frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial t \partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

3. **Einsetzen der Beschleunigungen in die Zwangsbedingung und Auflösen nach den Lagrange-Multiplikatoren:**

   Die Euler-Lagrange-Gleichungen Gl. 4.7 werden nach den Beschleunigungen aufgelöst. Man erhält also $\ddot{x}_i$ als Funktionen von $\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \{\lambda_\alpha\}, t$. Im Allgemeinen hängt jeder Ausdruck für die Beschleunigungen von allen Lagrange-Multiplikatoren ab.

$$\text{Gl. } 4.7 \rightsquigarrow \ddot{x}_i(x_i, \dot{x}_i, \lambda_\alpha, t)$$

   Nun setzt man die Beschleunigungen $\ddot{x}_i(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \{\lambda_\alpha)\}, t)$ in Gl. 4.8 ein. Die Beschleunigungen tauchen nun nicht mehr in Gl. 4.8 auf. Stattdessen gehen jedoch jetzt die Lagrange-Multiplikatoren in die Gleichung ein. Man erhält auf diese Weise ein Gleichungssystem für die Lagrange-Multiplikatoren. Es gibt genau so viele Gleichungen wie Zwangsbedingungen. Deshalb bestimmt dieses Gleichungssystem die Lagrange Multiplikatoren im Allgemeinen eindeutig[8].

   Durch Auflösen erhält man die Lagrange-Multiplikatoren als Funktion der Koordinaten und Geschwindigkeiten, d.h. $\lambda_\alpha(x_i, \dot{x}_i, t)$

$$\text{Gl. } 4.8 \text{ mit } \quad \ddot{x}_i(x_i, \dot{x}_i, \lambda_\alpha, t) \rightsquigarrow \lambda_\alpha(x_i, \dot{x}_i, t)$$

4. **Einsetzen der Lagrange-Multiplikatoren in die Euler-Lagrange-Gleichungen:**
   Als nächstes setzen wir die Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_\alpha(x_i, \dot{x}_i, t)$ in die Euler-Lagrange-Gleichungen Gl. 4.7 ein. Dies führt auf Bewegungsgleichungen, die jetzt nicht mehr explizit von den Lagrange-Multiplikatoren abhängen.

   Löst man die Bewegungsgleichungen, wird die Zwangsbedingung jedoch noch nicht automatisch erfüllt. Das liegt daran, dass wir mit Gl. 4.8 nur die Bedingung, dass die zweite Zeitableitung der Zwangsbedingung verschwindet, also $\frac{dG^2}{dt^2} = 0$, berücksichtigt haben, aber nicht die Zwangsbedingung selbst. Deshalb kann der Wert der Zwangsbedingung immer noch linear von der Zeit abhängen. Es gilt also $G_\alpha(t) = G_\alpha(\vec{x}(t)) = A_\alpha + B_\alpha t$, was direkt aus aus $\frac{d^2 G}{dt^2} = 0$ folgt. Damit die Zwangsbedingungen für einen Pfad erfüllt bleiben, müssen die Anfangsbedingungen so gewählt werden, dass die Bedingungen

$$
\begin{aligned}
0 &= A_\alpha = G_\alpha(\vec{x}(t_0), t_0) \\
0 &= B_\alpha = \left.\frac{dG_\alpha}{dt}\right|_{t_0} = \sum_i \frac{\partial G_\alpha(x(t_0), t_0)}{\partial x_i}\dot{x}_i(t_0) + \frac{\partial G_\alpha(x(t_0), t_0)}{\partial t}
\end{aligned}
$$

   erfüllt sind.

[8] Da das Gleichungssystem nichtlinear ist, kann es im Prinzip auch mehrere diskrete Lösungen für den Satz der Lagrange-Parameter geben. Wenn einige dieser Gleichungen linear abhängig sind, ist das System unterbestimmt. In diesem Fall ist auch eine kontinuierliche Schar von Lösungen möglich.

Beispiel: Fadenpendel

Wir werden diese Methode, die Zwangsbedingungen zu erfüllen, anhand eines einfachen Beispiels, des Fadenpendels, darstellen:

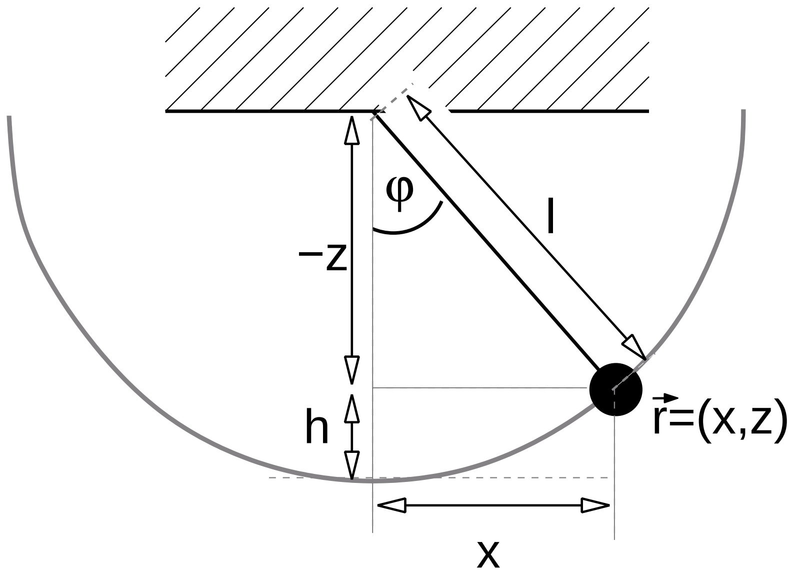


Abb. 4.6: Pendel

Die Lagrangefunktion ohne Zwangsbedingung lautet

$$\mathcal{L}(x,z,v_x,v_z) = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 - mgz \tag{4.9}$$

Sie beschreibt die Bewegung eines Teilchens der Masse m im Schwerefeld der Erde. Die Bewegung ist bereits auf die xz-Ebene eingeschränkt. Die potentielle Energie im Schwerefeld der Erde ist

$$V(x,z) = mgz$$

wobei g die Fallbeschleunigung ist. Die Kraft ergibt sich als Gradient des Potentials, der potentiellen Energie, also $\vec{F} = -\vec{\nabla}\vec{V} = -mg\vec{e}_z$, wobei $\vec{e}_z$ der Einheitsvektor ist der vertikal nach oben, also in z-Richtung zeigt. [9]

Die Zwangsbedingung wird durch den Faden ausgeübt, der sicherstellt dass der Abstand des Gewichts vom Aufhängepunkt konstant gleich l bleibt. Die Zwangsbedingung ist also

$$G(x,z) = x^2 + z^2 - l^2 \tag{4.10}$$

Die Lagrangefunktion mit Zwangsbedingung ist dann $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \lambda G$.

$$\bar{\mathcal{L}}(x,z,v_x,v_z,\lambda) = \underbrace{\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 - mgz}_{\mathcal{L}(x,z,v_x,v_z)} + \lambda\underbrace{(x^2+z^2-l^2)}_{G(x,z)} \tag{4.11}$$

gegeben. Sie beschreibt die Bewegung eines Pendels. Siehe Abb. 4.7.

[9] Um das Auftauchen des Einheitsvektors zu begrünnden, betrachtet man die Gleichung am Besten Komponentenweise.

$$F_x = -\partial_x V(x,y,z) = 0 \qquad F_y = -\partial_y V(x,y,z) = 0 \qquad F_z = -\partial_z V(x,y,z) = -mg$$

Es gilt also $\vec{F} = -mg(0,0,1) = -mg\vec{e}_z$

1. **Aufstellen der Euler-Lagrange-Gleichung:**

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial v_x}\right) - \frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial x} \overset{Gl.\ 4.11}{=} m\ddot{x} - 2\lambda x \\
\Rightarrow \qquad \ddot{x} &= \frac{2\lambda}{m}x \qquad (4.12)\\
0 &= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial v_z}\right) - \frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial z} \overset{Gl.\ 4.11}{=} m\ddot{z} + mg - 2\lambda z \\
\Rightarrow \qquad \ddot{z} &= -g + \frac{2\lambda}{m}z \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

2. **Zweite Ableitung der Zwangsbedingungen nach der Zeit**

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2G}{dt^2} \overset{Gl.\ 4.10}{=} \frac{d^2}{dt^2}\left(x(t)^2 + z(t)^2 - l^2\right) = \frac{d}{dt}\left(2x\dot{x} + 2z\dot{z}\right) \\
&= 2\dot{x}^2 + 2\dot{z}^2 + 2x\ddot{x} + 2z\ddot{z} = 2\left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2 + x\ddot{x} + z\ddot{z}\right) \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

3. **Einsetzen der Beschleunigungen in die Zwangsbedingung und Auflösen nach den Lagrange-Multiplikatoren:**

   Wir setzen Gl. 4.12 und Gl. 4.13 in obige Gl. 4.14 ein und erhalten dadurch einen Ausdruck für den Lagrange-Multiplikator λ

$$
\begin{aligned}
0 &= \dot{x}^2 + \dot{z}^2 + 2\frac{\lambda}{m}x^2 + 2\frac{\lambda}{m}z^2 - gz \\
\Rightarrow \lambda(x, z, \dot{x}, \dot{z}) &= -\left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2 - gz\right) \cdot \frac{1}{\frac{2}{m}(x^2 + z^2)} \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

4. **Einsetzen des Lagrange-Multiplikators in die Euler-Lagrange-Gleichungen:**

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &\overset{Gl.\ 4.12}{=} 2\lambda x \overset{Gl.\ 4.15}{=} -m\left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{z}^2 - gz}{x^2 + z^2}\right)x \\
m\ddot{z} &\overset{Gl.\ 4.13}{=} -mg + 2\lambda z \overset{Gl.\ 4.15}{=} -mg - m\left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{z}^2 - gz}{x^2 + z^2}\right)z
\end{aligned}
$$

   Man erkennt bereits, dass die Bewegung in diesem Beispiel unabhängig von der Masse ist.

5. **Lösen der Differentialgleichung**

   Wir erhalten ein nichtlineares Gleichungssystem [10]

$$
\ddot{\vec{r}} = -\vec{g} - \vec{r}\,\frac{(\dot{\vec{r}})^2 - \vec{g}\vec{r}}{\vec{r}^2} \qquad (4.16)
$$

[10] Wir können überprüfen, ob die Zwangsbedingung erhalten bleibt, wenn die Anfangsbedingungen, Ort und Geschwindigkeit, mit der Zwangsbedingung kompatibel sind. Dies bedeutet, dass $d^2G/dt^2 = 0$.

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2G}{dt^2} &= \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}^2 - \ell^2) = 2\dot{\vec{r}}^2 + 2\vec{r}\ddot{\vec{r}} \\
&\overset{Gl.\ 4.16}{=} 2\dot{\vec{r}}^2 + 2\vec{r}\left\{-\vec{g} - \vec{r}\,\frac{(\dot{\vec{r}})^2 - \vec{g}\vec{r}}{\vec{r}^2}\right\} \\
&= 2\dot{\vec{r}}^2 - 2\vec{r}\vec{g} - 2(\dot{\vec{r}})^2 + 2\vec{g}\vec{r} = 0
\end{aligned}
$$

mit

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix},$$

dessen Lösung im Allgemeinen numerische Methoden erfordert. Zum Beispiel könnte man das Gleichungssystem mit Hilfe des Verlet-Algorithmus lösen, oder man könnte die Gleichung Fourier-transformieren und das resultierende algebraische Gleichungssystem für die Fourierkoeffizienten lösen.

Um das Gleichungssystem Gl. 4.16 qualitativ zu verstehen, betrachten wir kleine Auslenkungen um einen stationären Punkt. Dies bedeutet, dass $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \delta\vec{r}(t)$. Wenn man sich auf hinreichend kleine Auslenkungen beschränkt, kann man nichtlineare Beiträge in $\delta\vec{r}$ vernahlässigen. Diese linearisierte Differentialgleichung ist eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, die sich mit Standardverfahren lösen lässt. Dieses Verfahren entspricht dem der **lokalen Stabilitätsanalyse** und ist eine weitverbreitete Methode, die man häufig anwendet bevor man sich komplizierteren Methoden zuwendet. Wir werden diese Methode Kapitel 7.4.2, im Zusammenhang mit der Bewegung eines Kreisels, nochmals verwenden.

Um das Problem Gl. 4.16 zu vereinfachen, multiplizieren wir die Bewegungsgleichung mit $\vec{r}^2$ und erhalten

$$(\vec{r}^2)\ddot{\vec{r}} = -\vec{g}(\vec{r}^2) - \vec{r}(\dot{\vec{r}}^2) + \vec{r}(\vec{g}\vec{r}) \tag{4.17}$$

Nun bestimmen wir die Bedingungen stationären Punkte $\vec{r}_0$, indem wir Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gleich Null setzen, also $\dot{r} = \ddot{r} = 0$.

$$0 = -\vec{g}(\vec{r}_0^2) + \vec{r}_0(\vec{g}\vec{r}_0)$$

Wir erkennen, dass $\vec{r}_0$ parallel zu $\vec{g}$ ist. Also gilt $\vec{r}_0 = (0, z_0)$. Da nun $\vec{r}_0$ und $\vec{g}$ parallel sind, wird aus der Vektorgleichung eine skalare Gleichung für die z-Komponenten, die dann trivial erfüllt ist. Außer der Parallelität $\vec{r}_0 \parallel \vec{g}$ erhält man also keine weitere Bedingung. Als stationäre Punkte kommen also alle Punkte mit $x = 0$ in Frage. Dies erscheint zunächst unsinnig, weil viele dieser stationären Punkte die Zwangsbedingung verletzen. Letztere muss aber erst durch die Anfangsbedingungen endgültig festgelegt.

Als nächstes wollen wir die Dynamik in unmittelbarer Nähe der stationären Punkte untersuchen. Dazu ersetzen wir $\vec{r}(t)$ durch $\vec{r}_0 + \delta\vec{r}$ und vernachlässigen alle nichtlinearen Terme ind δr. Wir nutzen dabei

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}} &= \delta\dot{\vec{r}} \\
\ddot{\vec{r}} &= \delta\ddot{\vec{r}} \\
\vec{r}^2 &= \vec{r}_0^2 + 2\vec{r}_0\delta\vec{r} + O(\delta\vec{r}^2) \\
\dot{\vec{r}}^2 &= O(\delta\vec{r}^2)
\end{aligned}$$

und erhalten aus Gl. 4.17

$$\begin{aligned}
(\vec{r}_0^2)\delta\ddot{\vec{r}} &= -\vec{g}\Big(\vec{r}_0^2 + 2\vec{r}_0\delta\vec{r} + O(\delta\vec{r}^2)\Big) - \vec{r}\Big(O(\delta\vec{r}^2)\Big) + (\vec{r}_0 + \delta\vec{r})\Big(\vec{g}(\vec{r}_0 + \delta\vec{r})\Big) \\
&= -\vec{g}\vec{r}_0^2 - 2\vec{g}(\vec{r}_0\delta\vec{r}) + \vec{r}_0(\vec{g}\vec{r}_0) + \vec{r}_0(\vec{g}\delta\vec{r}) + \delta\vec{r}(\vec{g}\vec{r}_0) + O(\delta\vec{r}^2) \\
&= -2\vec{g}(\vec{r}_0\delta\vec{r}) + \vec{r}_0(\vec{g}\delta\vec{r}) + \delta\vec{r}(\vec{g}\vec{r}_0) + O(\delta\vec{r}^2) \\
z_0^2\begin{pmatrix} \delta\ddot{x} \\ \delta\ddot{z} \end{pmatrix} &= -2gz_0\delta z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z_0 g\delta z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + gz_0\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta z \end{pmatrix} + O(\delta\vec{r}^2) \\
&= gz_0\begin{pmatrix} \delta x \\ 0 \end{pmatrix} + O(\delta\vec{r}^2)
\end{aligned}$$

Wir erhalten also in erster Ordnung

$$\delta\ddot{x} = \frac{g}{z_0}\delta x \qquad \text{und} \qquad \delta\ddot{z} = 0$$

Nun müssen die Anfangsbedingungen in Übereinstimmung mit den Zwangsbedingungen festgelegt werden. Dies erreicht man durch

$$z_0 = -l \quad , \quad \delta z(t=0) \quad \text{und} \quad \delta\dot{z}(t=0)$$

Wir erhalten also den bekannten harmonischen Oszillator

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x$$

der mit Frequenz $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ schwingt. Es gilt also

$$x(t) \approx A\ \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}\ t - \phi_0)$$
$$z(t) \approx -l$$

Dabei ist A die Amplitude der Schwingung und ϕ_0 beschreibt die anfängliche Auslenkung.

4.4.3 Lösung durch Variablentransformation

Hier wird ein alternativer Zugang zu Zwangsbedingungen beschrieben. Wenn man eine geeignete Variablentransformation finden kann, ist dieser Zugang im Allgemeinen einfacher. Für komplexere Probleme und für Computersimulationen ist der oben beschriebene Zugang jedoch erfolgversprechender.

Hier wird ein zweiter Vorteil des Wirkungsprinzips gezeigt. Eine Variablentransformation ist deutlich einfacher in der Wirkung durchzuführen als in den Bewegungsgleichungen.

Bei der hier beschriebenen Methode wählt man sich einen Satz neuer Koordinaten derart, dass eine Zwangsbedingung durch Festhalten einer der neuen Koordinaten erfüllt ist. Durch Einsetzen der Zwangsbedingung kann man diese neuen Koordinaten aus der Lagrangefunktion eliminieren. Man erhält damit eine neue Lagrangefunktion in einem niederdimensionalen Raum.

Betrachten wir zunächst den allgemeinen Fall:

Sei ein physikalisches Problem durch eine Lagrangefunktion $\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}, t)$, und eine Zwangsbedingung gegeben, die durch $G(\vec{x}(t)) = 0$ darstellbar ist. $G(\vec{x})$ sein eine entsprechende Funktion.

Außerdem benötigen wir eine Koordinatentransformation $\vec{x} \to \vec{x}'(\vec{x})$ auf neue Koordinaten $\vec{x}'$ so dass eine dieser Variablen gerade durch die Zwangsbedingung gegeben ist. Es gelte also

$$x'_1 = G(\vec{x}) \qquad \text{und} \qquad x'_i = x'_i(\vec{x}) \qquad \text{für } i > 1 \tag{4.18}$$

Nun bestimmen wir ein neues Wirkungsfunktional $S'[\vec{x}'(t)]$ für die neuen Koordinaten $\vec{x}'$ derart, dass die Wirkung für denselben Pfad unverändert bleibt, egal ob er in alten oder neuen Variablen ausgedrückt wird. Wir bestimmen S' also so, dass

$$S'[\vec{x}'(t)] = S[\vec{x}(t)] \tag{4.19}$$

gilt. Dafür reicht es aus, die Lagrangefunktion entsprechend zu transformieren. Die neue Lagrangefunktion $\mathcal{L}'$ erfüllt also

$$\mathcal{L}'(\vec{x}', \vec{v}', t) = \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}, t) \tag{4.20}$$

wobei

$$
\begin{aligned}
v'_i(t) &= \frac{d}{dt}\Big[\vec{x'}_i(\vec{x}(t))\Big] = \sum_j \dot{x}_j(t)\frac{\partial x'_i(\vec{x}(t))}{\partial x_j} = \sum_j v_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \\
\Rightarrow v'_i &= \sum_j v_j \frac{dx'_i}{dx_j} = \vec{v}\vec{\nabla}x'_i
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

Der Clou bei der Sache ist, dass der physikalische Pfad als Extremum der Wirkung gegeben ist. In den neuen Koordinaten erhalten wir die Euler-Lagrange Gleichungen einfach durch das Wirkungsprinzip mit der neuen Wirkung.

$$
\delta\vec{S}'[x'(t)] = 0\;, \tag{4.22}
$$

was uns die Euler-Lagrange Gleichungen liefert.

$$
\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial v'_i} = 0 \tag{4.23}
$$

Die Zwangsbedingung wird nun einfach erfüllt, indem man die entsprechende Koordinate $x'_N(t)$ festhält, und dessen Geschwindigkeit $v'_N(t)$ auf Null setzt. Die Pfade im Wirkungsintegral werden also nur noch so variiert, dass die Zwangsbedingung erfüllt bleibt.

Ein Wort zur Notation: Üblicherweise würde man für die neue Lagrangefunktion kein neues Symbol einführen, wie ich das hier getan habe. Stattdessen würde man die Wirkung und die Lagrangefunktion durch die Symbole der Argumente unterscheiden. Schreibt man also $\mathcal{L}(x', v', t)$, ist damit eigentlich $\mathcal{L}'(x', v', t)$ gemeint. Diese Denkweise rührt daher, dass beide dieselbe physikalische Größe beschreiben, auch wenn sich die funktionale Abhängigkeit von den jeweiligen Koordinaten unterscheidet. Diese Notation ist unter Physikern weit verbreitet und wird in der Darstellungstheorie der Quantenmechanik verfestigt. Auch ich werde zunehmend zu dieser Schreibweise wechseln.

Beispiel: Fadenpendel

Wir wollen die Methode, Zwangsbedingungen mit Hilfe von Variablentransformationen zu erfüllen, wieder am Beispiel des Fadenpendels demonstrieren.

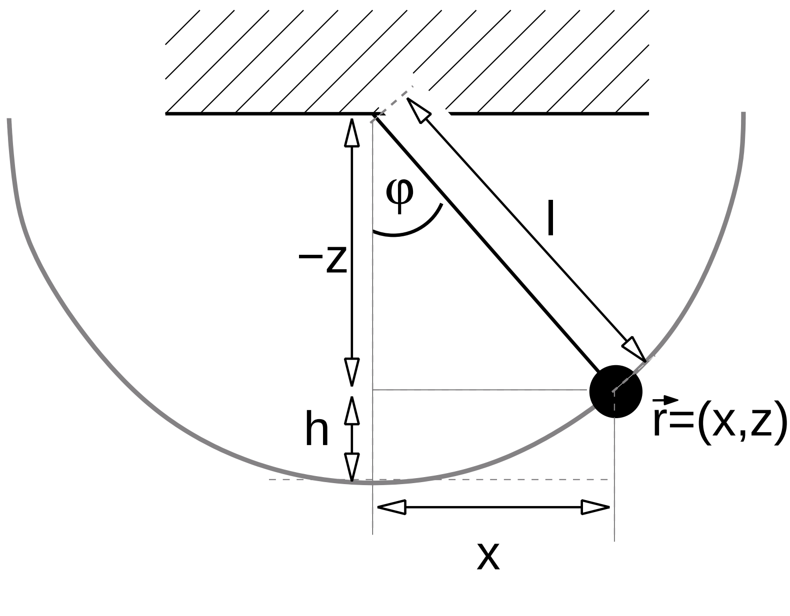


Abb. 4.7: Pendel

Die Position des Gewichts relativ zur Position der Aufhängung sei wiederum $\vec{r} = (x, z)$. Der Faden habe wieder die Länge l.

$$|\vec{r}|^2 - l^2 = 0$$

Nun führen wir Polarkoordinaten r, φ für die Position des Pendels ein

$$\begin{array}{lll} r = \sqrt{x^2 + z^2} & x = r \sin\varphi & \dot{x} = \dot{r} \sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \varphi = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} & z = r\cos\varphi & \dot{z} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \end{array}$$

Die Zwangsbedingung kann später erfüllt werden, indem wir die Koordinate r gleich l setzen.

Nun transformieren wir die Koordinaten in der Lagrangefunktion Gl. 4.9.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \dot{x}, z, \dot{z}) &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz \\ &= \frac{m}{2}\left[\left(\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi\right)^2 + \left(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi\right)^2\right] - mgr\cos\varphi \\ &= \frac{m}{2}\Big[\dot{r}^2\overbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}^{=1} + \overbrace{2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi - 2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi}^{=0} \\ &\quad + r^2\dot{\varphi}^2\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1}\Big] - mgr\cos\varphi \\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{mr^2}{2}\dot{\varphi}^2 - mgr\cos(\varphi) = \mathcal{L}'(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) \end{aligned}$$

In der neuen Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}'(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{mr^2}{2}\dot{\varphi}^2 - mgr\cos(\varphi)$$

setzen wir jetzt die Zwangsbedingung ein, d.h. $r = l$ und $\dot{r} = 0$. Damit erhalten wir

$$\mathcal{L}'(l, 0, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 - mgl\cos(\varphi)$$

Die Bewegungsgleichung für φ erhält man als Euler-Lagrange-Gleichung.

$$0 = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\varphi} = ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi$$

Es gilt also:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin(\varphi)$$

Diese Gleichung ist wieder nichtlinear und nicht ohne weiteres[11] analytisch zu lösen. Näherungsweise können wir die Gleichung jedoch um $\varphi = 0$ linearisieren.

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi + O(\varphi^2)$$

was uns auf die selbe Näherungslösung führt, die wie bereits mit der Methode der Lagrange Multiplikatoren erhalten haben, nämlich

$$\varphi(t) = \frac{1}{l}A\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t - \varphi_0)$$

[11] Ein Verfahren hierfür wird in Kapitel 6.5 vorgestellt.

4.5 Bedeutung der Wirkung als Phasendrehung

Bisher war das Wirkungsprinzip nur ein mathematisches Werkzeug, mit dem man einige Probleme in der Mechanik vereinfachen kann. Die Wirkung hat jedoch eine tiefergehende Bedeutung, die sich erst aus der Quantenmechanik ergibt. Den Zusammenhang macht insbesondere die Feynmannsche Pfadintegralformulierung deutlich[12]

Abb. 4.8: Richard Feynman

Man stellt sich vor, dass ein Teilchen alle möglichen Pfade zwischen zwei Punkten durchläuft. Entlang seinem Pfad trägt es allerdings eine Phase $e^{\frac{i}{\hbar}S[\vec{r}(t)]}$. Die Intensität am Endpunkt ergibt sich aus der Überlagerung der Amplituden aller möglichen Pfade. Dort wo die Intensität am höchsten ist, finde ich das Teilchen mit größter Wahrscheinlichkeit.

Nur dort wo viele der möglichen Pfade des Teilchens dieselbe Phase beitragen, wird die Intensität nennenswert sein. Das trifft also genau dort zu wo die Phase, also die Wirkung, bezüglich einer Variation des Pfades stationär ist. Dieses Argument liefert ganz natürlich das Extremalprinzip für die Wirkung in der klassischen Physik.

Ist das Plancksche Wirkungsquantum $\hbar$, der Parameter, welcher im obigen Ausdruck für die Phase auftritt, klein, erhalten wir den klassischen Grenzfall: Eine kleine Variation der Wirkung führt zu einer dramatischen Änderung der Phase. Deshalb findet man im klassischen Grenzfall die Teilchen nur dort, wo das Wirkungsprinzip exakt erfüllt ist.

Das Prinzip der Feynmannschen Pfadintegrale stammt aus der Optik und geht zurück auf das Huygenssche Prinzip[13]: Huygens Prinzip stellte den Übergang von der Strahloptik zur Wellenoptik dar. Er argumentierte, dass jeder Punkt auf einer Wellenfront, wiederum als Quelle von Sekundärwellen betrachtet werden kann und dass die Tangente der Sekundärwellen wiederum die zukünftige Position der Wellenfront definieren.

Man kann sich nun auch vorstellen, dass von einer Quelle Lichtstrahlen in alle Richtungen ausgehen, und kurz darauf an einem beliebigen Punkt absorbiert werden. Von dort werden sie wieder ausgesendet, um anschließend wieder an einem anderen Ort absorbiert zu werden. Addiert man die Beiträge für einen gegebenen Endpunkt auf, erhält man eine Summe aller möglichen Pfade, also ein Pfadintegral. Bei jeder Absorption und Emission, die als virtuelle Ereignisse gedacht werden sollten, bleibt nicht nur die Amplitude sondern auch die Phase erhalten. Um die gesamte Phasenverschiebung eines Pfades zu erhalten, benötigt man also die Wirkung zwischen den Endpunkten.

Abb. 4.9: Christiaan Huygens, 1629-1695

[12] Richard Feynman, 1918-1988, US Amerikanischer Physiker, Nobelpreis in Physik 1965 für seine Beiträge zur Quantenelektrodynamik.

[13] Christiaan Huygens, 1629-1695, Holländischer Astronom, Mathematiker und Physiker. Begründete die Wellenoptik, und war damit in der Lage die Genaugikeit von optischen Linsen deutlich zu verbessern. Wesentliche Beiträge zur Uhrenkonstruktion.

Chapter 5

Symmetrien des Raum-Zeit-Kontinuums (3h)

5.1 Einleitung

- Symmetrien sind leicht beobachtbar: Unsere Sinne nehmen vor allem Symmetrien war.
- Symmetrien sind globale Eigenschaften eines Systems.
- Symmetrien vereinfachen die Lösung von Problemen: Aus ihnen lassen sich Erhaltungsgrößen ableiten.
- Symmetrien sind mit Phasenübergängen verknüpft (Statistische Mechanik):
  - Schmelzen
  - Verdampfen
  - Ferromagnetismus
  - Supraleitung

Vorweg eine philosophische Bemerkung:

1. Man kann die Bewegungssgleichungen empirisch (durch Vergleich mit dem Experiment) aufstellen und anschließend die Symmetrien ableiten (Newtonsche Axiome).
2. Man kann die Symmetrien postulieren und davon mögliche Bewegungsgleichung ableiten. (In der Elementarteilchenphysik üblich.)

Beide Vorgehensweisen sind äquivalent, weil Bewegungen ohne Raum-Zeit sowie Raum-Zeit ohne Gegenstände nicht denkbar sind. Beide Hergänge basieren letztendlich auf Beobachtung.

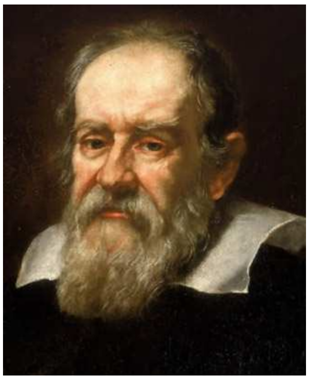


Abb. 5.1: Galileo Galilei, 1564-1642. (von Justus Sustermans, 1636)

5.2 Vektoren

Wir sind es gewohnt, einen Vektor im 3-dimensionalen Raum mit einem Zahlentripel zu identifizieren. Der Zusammenhang ist aber kein direkter. Dies wird deutlich, sobald wir das Koordinatensystem wechseln. Ein und derselbe Vektor wird dann, je nach Koordinatensystem, durch zwei unterschiedliche Zahlentripel dargestellt. Es ist deshalb wichtig, zwischen dem Vektor und seinen Koordinaten, nämlich dem Zahlentripel, zu unterscheiden. Um im folgenden Kapitel Doppeldeutigkeiten zu vermeiden, will ich hier auf Vektoren im Detail eingehen. Transformationen zwischen unterschiedlichen Bezugssystemen sind ein weiteres wichtiges Thema dieses Kapitels. Genau wie Funktionen Abbildungen von Zahlen auf einander darstellen, sind Transformationen Abbildungen von Vektoren aufeinander. Hauptsächlich beschäftigen wir uns hier mit linearen Transformationen, welche eine besonders einfache Unterklasse von Transformationen bilden, die eng mit dem Begriffen Matrix oder Tensor verknüpft ist.

Transformationen spielen nicht nur in der klassischen Mechanik, sondern auch in der Quantenmechanik eine bedeutende Rolle, auch wenn es sich dann nicht um räumliche Koordinatentransformationen handelt. In der Quantenmechanik eine eigende Schreibweise entwickelt, die **Bracketschreibweise** von Dirac. Die Sichtweise von Vektoren, die wir hier entwickeln ist analog zur Bracketschreibweise und soll auf letzere vorbereiten.

Es soll hier nicht unser Ziel sein, einen axiomatischen Aufbau der Vektorrechnung zu erhalten. Stattdessen wollen wir auf das “Wesen” von Vektoren eingehen. Dies entspricht der Vorstellung von Vektoren, wie ich sie in der Praxis verwende. Da wir hier keinen Wert auf die allgemeinste Darstellung legen, beschränke ich mich hier auf den dreidimensionalen Raum und, zumeist, auf kartesische Koordinatensysteme, die man sich am ehesten vorstellen kann.

Wir betrachten einen Vektor $\vec{u}$ als einen Pfeil mit zwei Eigenschaften, einer Länge und einer Richtung. Ganz bewusst verzichten wir dabei zunächst auf eine Darstellung durch Zahlentripel. Der Einfachheit halber stellen wir uns den Pfeil als konkretes räumliches Objekt, wie einen Holzstab mit einer Spitze, vor.

Definition 5.1 *VEKTOR*
Ein Vektor ist ein Objekt mit genau zwei Eigenschaften: Länge und Richtung

Die Länge eines Vektors ist nicht notwendigerweise eine räumliche Distanz. Zum Beispiel ist eine Kraft auch ein Vektor mit Länge und Richtung. Die Länge wird aber in einer Krafteinheit gemessen.

Außerdem hat ein Vektor keine definierte Position im Raum. Man kann den Vektor im Raum parallel verschieben, ohne seine Identität zu verändern. Betrachten wir zum Beispiel die Geschwindigkeit, so denken wir uns diese als einem Objekt zugeordnet, das sich an einem bestimmten Ort befindet. Allerdings sind Ort und Geschwindigkeit unabhängige Größen. Wenn ich zum Beispiel sage, dass Kevin mit hundert Sachen nach Süden fährt, kennt Ihr seine Geschwindigkeit, aber nicht ob er gerade losgefahren ist oder bald an der Cote d'Azur ankommt.

Die Länge des Vektors $\vec{u}$ erhalten wir aus einer Operation, die wir den Betrag des Vektors nennen.

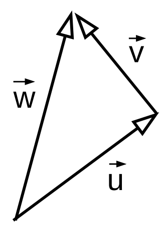
$$\text{Länge} = |\vec{u}|$$

Die Richtung eines Vektors hat nur eine Bedeutung, wenn wir sie mit der eines anderen Vektors vergleichen. Deshalb gibt es eine weitere, binäre, Operation, $\angle$ die uns den Winkel liefert, der von zwei Vektoren eingeschlossenen wird.

$$\text{Winkel} = \angle(\vec{u}, \vec{v})$$

Der Leser mag einwenden, dass die Richtung mehr ist, als nur die Winkel zu anderen Vektoren. Ohne andere Vektoren zu Hilfe zu nehmen, mag er in eine Richtung deuten und behaupten, dass besagter Vektor in diese Richtung zeigt. Implizit hat er allerdings einen Vektor ins Spiel gebracht, nämlich den zeigenden Arm, was das Argument entkräftet.

Nun führen wir die Addition ein. Die Addition von zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ entspricht dem Aneinandersetzen von Pfeilen. Dabei wird der Anfang des zweiten Pfeils an die Spitze des Ersten gesetzt. Das Resultat wird einem neuen Pfeil $\vec{w}$ gleichgesetzt, der vom Anfangspunkt des ersten Pfeils bis zur Spitze des letzen Pfeils zeigt.



$$\text{Addition:} \qquad \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

Aus der Addition leiten wir die Multiplikation mit einem Skalar ab, quasi als Kurzschreibweise analog zu

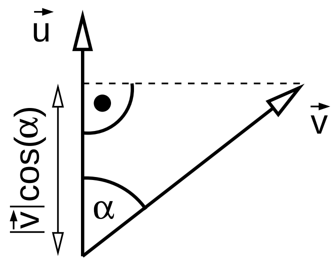
$$\text{Multiplikation mit einem Skalar:} \qquad \vec{w} = \vec{u} + \vec{u} \qquad \Rightarrow \vec{w} = 2\vec{u}$$

Die Multiplikation mit einem Skalar kann entsprechend auf nicht-ganze Zahlen verallgemeinert werden. Die Multiplikation mit einer positiven Zahl skaliert die Länge des Vektors, behält aber seine Richtung bei. Ist die Zahl negativ, dann bewirkt der Faktor -1 eine zusätzliche Umkehrung der Richtung.

Aus Abstand und Winkel bilden wir das **Skalarprodukt**. Dazu benötigen wir den Winkel zwischen den Vektoren, der durch die Richtungen gegeben ist, und die Längen der Vektoren.

SKALARPRODUKT

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\angle(\vec{u}, \vec{v}))$$



Das Skalarprodukt eines Vektors $\vec{u}$ mit einem Einheitsvektor $\vec{e}$, d.h. $|\vec{e}| = 1$, ist die Projektion von $\vec{u}$ auf die Richtung des Einheitsvektors. Das Skalarprodukt wird auch **Punktprodukt** genannt. Der Punkt wird allerdings im Allgemeinen nicht geschrieben.

Das Skalarprodukt wurde so definiert, dass die üblichen Eigenschaften eines Produkts gelten.

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v})\, \vec{w} &= \vec{u}\vec{w} + \vec{v}\vec{w} \qquad \text{Distributivgesetz} \\ (c\vec{u})\, \vec{v} &= c\, (\vec{u}\vec{v}) \qquad \text{Assoziativgesetz bzgl. Multiplikation mit einem Skalar} \\ \vec{u}\vec{v} &= \vec{v}\vec{u} \qquad \text{Kommutativität} \end{aligned}$$

Allerdings gilt kein Assoziativgesetz bezüglich des Produkts

$$\vec{u}\, (\vec{v}\vec{w}) \neq (\vec{u}\vec{v})\, \vec{w}$$

SKALARPRODUKT UND EIGENSCHAFTEN VON VEKTOREN

Das Skalarprodukt erlaubt es, sowohl Länge als auch den Winkel darzustellen.

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\vec{u}}$$
$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos\left(\frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)$$

Das Skalarprodukt wird daher als die fundamentale Größe einer mathematischen Beschreibung von Vektoren betrachtet. Länge und Winkel werden nun als abgeleitete Größen betrachtet.

5.3 Koordinatensysteme

Bisher sind wir ohne Koordinaten ausgekommen. Wo aber sind die Zahlentripel geblieben? Um zu den Koordinaten zu gelangen, müssen wir ein Koordinatensystem einführen.

Wir wählen drei beliebige Vektoren, die senkrecht aufeinander stehen, und die Länge eins haben. Ich bezeichne sie als $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ und nenne sie **Basisvektoren**. Da sie senkrecht aufeinander stehen, verschwindet ihr Skalarprodukt.

$$\vec{e}_i\vec{e}_j = \delta_{i,j} \tag{5.1}$$

Die Matrix mit den Elementen $g_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{e}_i\vec{e}_j$, die aus den Skalarprodukten der Basisvektoren gebildet wird, nennt man den **metrischen Tensor**. Wir werden später sehen, dass er nicht immer die einfache Form $g_{i,j} = \delta_{i,j}$ haben muss.

Jeder Vektor $\vec{u}$ kann mit Hilfe der Basisvektoren als

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3 = \sum_j \vec{e}_j u_j \tag{5.2}$$

dargestellt werden. Wir nennen die drei Zahlen u_1, u_2 und u_3 die Komponenten des Vektors, bzw. seine **Koordinaten** . Man kann die Komponenten des Vektors durch geeignete Skalarprodukte ermitteln.

$$\vec{e}_i\vec{u} = \vec{e}_i \underbrace{\sum_j u_j\vec{e}_j}_{\vec{u}} = \sum_j u_j \underbrace{\vec{e}_i\vec{e}_j}_{\delta_{i,j}} = u_i \tag{5.3}$$

Die Komponenten des Vektors werden häufig mit dem Vektor gleichgesetzt. Sie beschreiben den Vektor jedoch nur dann eindeutig, wenn wir auch die Basis festgelegt haben.

KOORDINATEN EINES VEKTORS

In einem orthonormalen Basissystem, d.h. mit $\vec{e}_i\vec{e}_j = \delta_{i,j}$, gelten die folgenden Beziehnungen zwischen Vektor und seinen Komponenten.

$$u_i \stackrel{\text{Gl. 5.3}}{=} \vec{e}_i\vec{u} \tag{5.4}$$

$$\vec{u} \stackrel{\text{Gl. 5.2}}{=} \sum_j \vec{e}_j u_j \tag{5.5}$$

Beim Koordinatensystem spielt die Reihenfolge der drei Basisvektoren eine Rolle. Wir verwenden im Allgemeinen ein **rechtshändiges Koordinatensystem**. Um zu überprüfen, ob ein rechtshändiges Koordinatensystem vorliegt[1], richten wir den Daumen der rechten Hand entlang dem ersten Basisvektor aus, und den Zeigefinger entlang dem Zweiten. Zeigt der dritte Basisvektor in Richtung des abgestreckten Mittelfingers, ist das Koordinatensystem rechtshändig. Zeigt er in die entgegengesetzte Richtung, ist es linkshändig. Bei einem linkshändigen Koordinatensystem zeigt der Mittelfinger in Richtung des dritten Basisvektors, wenn wir die selbe Konstruktion mit der linken Hand durchführen. Rechts- und linkshändige Koordinatensysteme verhalten sich wie Spiegelbilder zueinander.

Die Position eines Objekts lässt sich nicht direkt durch einen Vektor beschreiben, sondern nur die relative Position von zwei Raumpunkten. Deshalb führen wir zusätzlich zu den Basisvektoren einen **Ursprung** ein, also einen beliebig gewählten Punkt im Raum. Alle anderen Punkte im Raum können nun relativ zu diesem Ursprung mit Hilfe von Vektoren ausgedrückt werden. Den Ursprung bezeichen wir mit $\vec{\mathcal{O}}$. Wir geben Raumpunkten $\vec{P}$ das Vektorsymbol, obwohl sie genau genommen keine sind, da sie ja bei einer Verschiebung ihre Identität ändern. Wir können sie aber immer mit einem Vektor $\vec{r} = \vec{P} - \vec{\mathcal{O}}$ identifizieren.

Ein Punkt $\vec{P}$ im Raum ist mit Hilfe des Ursprungs durch

$$\vec{P} = \vec{\mathcal{O}} + \vec{r}$$

dargestellt. Damit lässt sich ein Punkt im Raum durch die drei Komponenten des Vektors $\vec{r}$ beschreiben.

[1] Mathematisch überprüfen wir ob $\vec{e}_1(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)$ größer oder kleine als Null ist. Ist es positiv ist das Koordinatensystem rechtshändig.

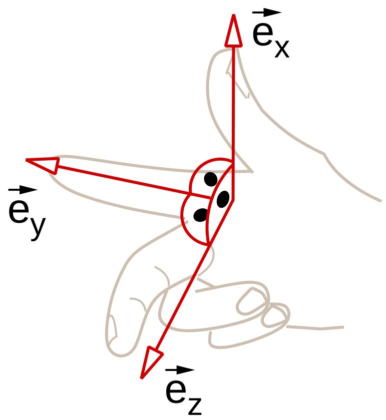


Abb. 5.2: Rechte-Hand Regel für rechtshändige Koordinatensysteme

KOORDINATENSYSTEM

Die Basis, auch Koordinatensystem genannt, ist durch einen Ursprung $\vec{\mathcal{O}}$ und die drei Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ definiert. Die Basisvektoren seien **orthonormal**, das heißt, sowohl orthogonal, als auch auf die Länge eins normiert.
Diese Definition kann erweitert werden: Es gibt auch schiefwinklige Koordinatensysteme, bei denen die Basisvektoren nicht orthogonal sind, und es gibt sogar krummlinige Koordinatensysteme, bei denen die Basisvektoren selber von der Position im Raum abhängen. Diese spielen zum Beispiel in der Allgemeinen Relativitätstheorie eine wichtige Rolle.

Ein Vektor ist nur dann eindeutig durch ein n-Tupel von Zahlen definiert, wenn auch die Basis, das Koordinatensystem, angegeben ist.

5.4 Schiefwinklige Koordinatensysteme, Ko- und Kontravariante Schreibweise

Bisher haben wir bei der Wahl der Koordinatenachsen darauf geachtet, dass die Vektoren $\vec{e}_i$ senkrecht aufeinander stehen, was durch Gl. 5.1 dargestellt ist.

Manchmal ist es notwendig, mit schiefwinkligen Koordinatensystemen zu arbeiten, und dies ist durchaus möglich. Hierfür eignet sich die **ko- und kontravariante Schreibweise**. Die ko- und kontravariante Schreibweise wird für uns eine besondere Bedeutung in der Relatitivitätstheorie erhalten. Eine wichtige Rolle spielt die Schreibweise auch in der Elastizitätstheorie, weshalb sie häufig in den Ingenieurwissenschaften Anwendung findet.

Bei **schiefwinkligen Koordinatensystemen** muss man zwei Arten der Koordinaten unterscheiden. Die Koordinaten kamen durch zwei Gleichungen ins Spiel, nämlich Gl. 5.5 und Gl. 5.4. In einem schiefwinkligen Koordinatensystem muss man die Koordinaten in den beiden Gleichungen unterscheiden. In der ko- und kontravarianten Schreibweise unterscheidet man diese Koordinaten, indem man die einen, kovarianten Koordinaten mit dem Index unten bezeichnet. Die anderen, kontravariaten Koordinaten tragen im Gegensatz dazu ihren Index oben.

KO- UND KONTRAVARIANTE KOORDINATEN

Damit erhalten wir zwei Gleichungen, nämlich die Gleichung für die **kontravarianten Koordinaten** u^i

$$\vec{r} = \sum_i \vec{e}_i u^i \tag{5.6}$$

und jene für die **kovarianten Koordinaten** u_i

$$\vec{e}_i \vec{r} = u_i \tag{5.7}$$

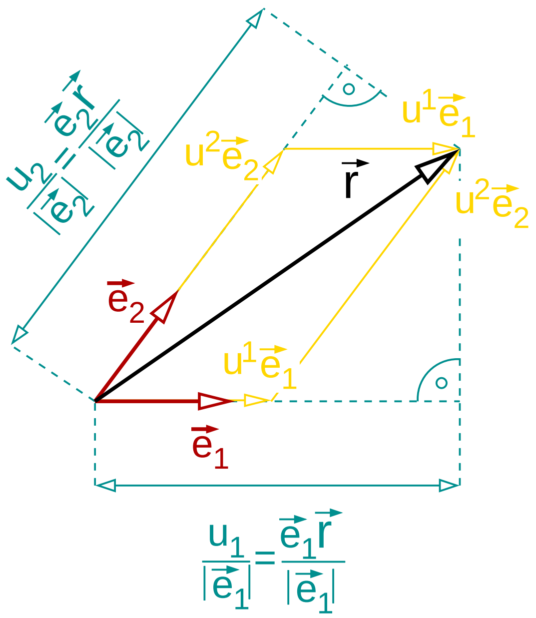


Abb. 5.3: Demonstration der ko- und kontravarianten Koordinaten in einem schiefwinkligen Koordinatensystem. Der Vektor $\vec{r}$ ist als $\vec{r} = \vec{e}_1 u^1 + \vec{e}_2 u^2$ durch seine Komponenten (u^1, u^2) bestimmt.

Im Allgemeinen sind die Zahlenwerte der Koordinaten unterschiedlich, also $u_i \neq u^i$. Man kann aber die ko- und kontravarianten Koordinaten ineinander umformen. Um die entsprechende Regel zu erhalten betrachten wir die folgende Herleitung:

$$u_i \stackrel{Gl. 5.7}{=} \vec{e}_i \vec{r} \stackrel{Gl. 5.6}{=} \vec{e}_i \sum_j \vec{e}_j u^i = \sum_j \underbrace{\vec{e}_i \vec{e}_j}_{=g_{i,j}} u^i = \sum_j g_{i,j} u^i \tag{5.8}$$

Dies führt uns in natürlicher Weise auf die Definition des kovarianten **metrischen Tensors**

$$g_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{e}_i \vec{e}_j \tag{5.9}$$

Der metrische Tensor sagt uns einerseits, ob das Koordinatensystem schiefwinklig ist. Aus $\sqrt{g_{i,i}}$ erhalten wir die Längen der Basisvektoren und durch $\arccos(\frac{g_{i,j}}{\sqrt{g_{i,i} g_{j,j}}}$ erhalten wir die Winkel zwischen zwei Koordinatenachsen.

Die zweite Funktion des metrischen Tensors ist, dass er uns erlaubt, einen obenstehenden, kontravarianten, Index "herunterzuziehen" und zu einem kovarianten zu machen.

Gerne hätten wir auch ein Werkzeug, um einen Index von unten nach oben ziehen zu können. Dazu würden wir einen rein kontravarianten metrischen Tensor benötigen, der beide Indizes oben hat, also $g^{i,j}$, mit der Eigenschaft.

$$u^i = \sum_j g^{i,j} u_i \tag{5.10}$$

Um einen Ausdruck für den rein kontravarianten metrischen Tensor zu erhalten setzen wir Gl. 5.8 in die Definitionsgleichung Gl. 5.10 ein.

$$u^i \overset{\text{Gl. 5.10}}{=} \sum_j g^{i,j} u_j \overset{\text{Gl. 5.8}}{=} \sum_{j,k} g^{i,j} g_{j,k} u^k \tag{5.11}$$

Diese Gleichung muss für jedes Zahlentripel u^i erfüllt sein, woraus folgt, dass der kontravariante metrische Tensor zum kovarianten invers ist

$$\sum_k g^{i,k} g_{k,j} = \delta_{i,j} \tag{5.12}$$

Leider durchbricht diese Gleichung eine schöne Regel, die sich inzwischen herauskristallisiert hat, nämlich, dass ein kovarianter Index links vom Gleichheitszeichen einen ebensolchen kontravarianten Index rechts davon erzwingt. Wir können das wie folgt korrigieren: Dazu betrachten wir die linke Seite von Gl. 5.12 einmal anders. Hier wird doch der rechte Index von $g^{k,j}$ heruntergezogen, was die Definition eines gemischt ko- und kontravarianten metrischen Tensors nahelegt. Es gilt also

$$g^i{}_j \overset{\text{def}}{=} \sum_k g^{i,k} g_{k,j} = \delta_{i,j} \tag{5.13}$$

Das Kronecker Deltasymbol wird also durch den gemischt ko-und kontravarianten metrischen Tensor abgelöst. Der gemischt ko-und kontravarianten metrischen Tensor ist also generell eine Einheitsmatrix.

Definition 5.2 *METRISCHER TENSOR*
Um alle Formen des metrischen Tensors zu erhalten, benötigen wir die Definition der kovarianten Form des metrischen Tensors

$$g_{i,j} \overset{Gl. 5.9}{=} \vec{e}_i \vec{e}_j$$

und die Eigenschaft dass der gemischt ko- und konravariante metrische Tensor eine Einheitrsmatrix ist.

$$g_i{}^j = g^i{}_j \overset{Gl. 5.13}{=} \delta_{i,j}$$

Die metrischen Tensoren erlauben es, ko- und kontravariante Koordinaten ineinander umzuwandeln

$$u_i = \sum_j g_{i,j} u^j \qquad und \qquad u^i = \sum_j g^{i,j} u_j$$

Der metrische Tensor definiert das Skalarprodukt in der Komponentenschreibweise, was wie folgt gezeigt werden kann.

$$\vec{u}\vec{v} = \left(\sum_i \vec{e}_i u^i\right)\left(\sum_j \vec{e}_j v^j\right) = \sum_{i,j} u^i \underbrace{\vec{e}_i \vec{e}_j}_{g_{i,j}} v^j = \sum_i u^i \sum_j g_{i,j} v^j = \sum_i u^i v_i$$

5.5 Aktive Transformationen

Wir können nun Vektoren aufeinander abbilden. Zum Beispiel entsteht durch eine Drehung eines Vektors $\vec{u}$ um eine Achse ein neuer Vektor $\vec{u'} = \boldsymbol{T}\vec{u}$. Wir nennen eine solche Abbildungsvorschrift $\boldsymbol{T}$ **Transformation** und kennzeichnen sie durch ein fettes Symbol, ähnlich wie wir einen Vektor duch einen Pfeil kennzeichnen. Eine Transformation ist im Grunde genommen eine Funktion eines Vektors $\vec{u'} = \vec{f}(\vec{u})$.

Insbesondere betrachten wir hier **lineare Abbildungen**. Die Begriffe Transformation und Abbildung sind gleichbedeutend. Für eine lineare Transformation gilt

$$\boldsymbol{T}\left(a\vec{u} + b\vec{v}\right) = a\left(\boldsymbol{T}\vec{u}\right) + b\left(\boldsymbol{T}\vec{v}\right)$$

Dabei bezeichnet $\boldsymbol{T}\vec{u}$ den Vektor, der entsteht, wenn der Vektor $\vec{u}$ mit der Transformation $\boldsymbol{T}$ abgebildet wird.

Betrachten wir nun die Wirkung der Transformation auf die Koordinaten eines Vektors. Ist ein Vektor $\vec{u}$ durch die Koordinaten (u_1, u_2, u_3) gegeben, d.h. $\vec{u} = \sum_i \vec{e}_i u_i$, dann erhält man die Koordinaten des transformierten Vektors $\vec{u'} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{T}\vec{u}$ wie folgt

$$\begin{aligned} u'_i &\stackrel{Gl.\ 5.4}{=} \vec{e}_i \vec{u'} = \vec{e}_i \boldsymbol{T}\vec{u} \stackrel{Gl.\ 5.5}{=} \vec{e}_i \boldsymbol{T} \left(\sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j u_j \right) = \sum_{j=1}^{3} \left(\vec{e}_i \boldsymbol{T} \vec{e}_j\right) u_j \\ &\stackrel{Gl.\ 5.15}{=} \sum_{j=1}^{3} T_{i,j} u_j \end{aligned} \tag{5.14}$$

Wir nennen die Gleichung 5.14 die Komponentendarstellung der Gleichung $\vec{u}' = \boldsymbol{T}\vec{u}$. Wir haben dabei die **Matrixelemente** der Transformation

$$T_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{e}_i \boldsymbol{T} \vec{e}_j \tag{5.15}$$

eingeführt. Genau wie ein Vektor in einem Koordinatensystem durch drei Koordinaten dargestellt werden kann, so kann eine lineare Transformation durch seine Matrixelemente dargestellt werden.

Wenden wir eine Transformation auf ein Objekt an, dann transformieren sich alle seine vektoriellen Größen in gleicher Weise. Zu dieser Regel gibt es jedoch Ausnahmen:

- Bei Transformationen von Raumpunkten müssen wir zusätzlich beachten, dass wir ein Objekt im Raum verschieben können. Eine reine Verschiebung würde jedoch andere vektorielle Eigenschaften wie zum Beispiel ein elektrostatisches Dipolmoment unverändert lassen. Eine Verschiebung ist genau genommen keine lineare Operation[5]. Eine Verschiebung eines Raumpunktes $\vec{r}$ stellt sich wie folgt dar:

  $$\vec{r'} = \vec{r} + \vec{a}$$

  Ergänzt man die linearen Transformationen durch Verschiebungen, dann nennt man diese Klasse von Transformationen

  $$\vec{u}' = \boldsymbol{T}\vec{u} + \vec{a}$$

  die **affinen Abbildungen**.

- Bei Spiegelungen gibt es Vektoren, die ihr Vorzeichen im Vergleich zu anderen Vektoren umkehren. Dazu gehört zum Beispiel der Drehimpuls. Vektoren, die sich bei Spiegelungen wie eine Drehachse verhalten, nennt man **Pseudovektoren**

Wir können die affinen Transformationen wie folgt klassifizieren. Bis auf die Verschiebungen sind alle diese Transformationen gleichzeitig linear. Die Operationen sind in Abb. 5.5 auf S. 96 graphisch dargestellt.

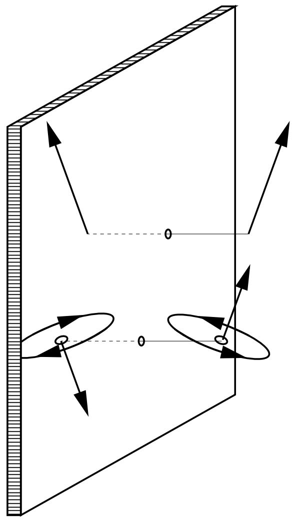


Abb. 5.4: Verhalten eines polaren Vektors (oben), der eine Richtung beschreibt, und eines axialen oder Pseudovektors (unten), der einen Drehsinn beschreibt bei einer Spiegelung. Da sich der Drehsinn bei einer Spiegelung umkehrt, wechselt der Pseudovektor bei einer Spiegelung, zusätzlich zur Richtungsspiegelung, sein Vorzeichen.

- **Verschiebungen**

$$\vec{r'} = \vec{r} + \vec{a}$$

- **Dehnungen**

$$\boldsymbol{T} \hat{=} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Drehungen**

$$\boldsymbol{T} \hat{=} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

- **Scherungen**

$$\boldsymbol{T} \hat{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

- **Spiegelungen**

$$\boldsymbol{T} \hat{=} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.5.1 Transformation von Funktionen

Besondere Vorsicht ist bei der Transformation von Funktionen geboten.

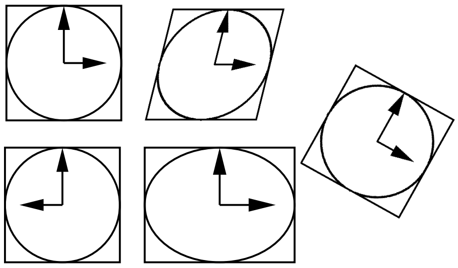


Abb. 5.5: Lineare Transformationen: Links oben: Ausgangsobjekt; Mitte oben: Scherung in der Horizontalen; Rechts: Drehung; Mitte unten: Skalierung in der Horizontalen; Links unten: Spiegelung um die Vertikale.

Als Beispiel betrachten wir die Veränderung des elektrostatische Potentials $\Phi(\vec{r})$, wenn die Positionen der Ladungen, welche das Potential erzeugen, transformiert werden.

Die Abbildung, welche wir betrachten, transformiert Raumpunkte $\vec{R}$ entsprechend

$$\vec{R}' = \boldsymbol{T}\vec{R} + \vec{a}$$

Das elektrische Potential $\Phi'(\vec{r})$, das durch Anwenden der Transformation hervorgeht, lautet

$$\Phi'(\vec{r}) = \Phi\left(\boldsymbol{T}^{-1}(\vec{r} - \vec{a})\right) \tag{5.16}$$

und nicht $\Phi'(r) = \Phi(\boldsymbol{T}\vec{r} + \vec{a})$, was häufig angenommen wird. Wir müssen also die inverse Transformation auf das Argument der ursprünglichen Funktion anwenden.

Definition 5.3 *INVERSE ABBILDUNG*
Eine Abbildung $\boldsymbol{T}^{-1}$ mit der Eigenschaft

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1} = \mathbf{1} \tag{5.17}$$

heißt die **Inverse** [a] *zu $\boldsymbol{T}$. Dabei ist $\mathbf{1}$ die* **Identität**, *welche jeden Vektor auf sich selbst abbildet. Beachte, dass T^{-1}_{ij} als Matrixelement von $\boldsymbol{T}^{-1}$ zu lesen ist und nicht als das Inverse $1/T_{ij}$ des Matrixelements.*

[a] Mathematisch unterscheidet man die linkshändige und rechtshändige Inverse, bei denen nur jeweils eine der obigen Gleichungen, Gl. 5.17, erfüllt ist. Für quadratische Matrizen ist die linksseitige Inverse immer identisch mit der rechtsseitigen, weshalb der Unterschied im Allgemeinen nicht ausgesprochen wird. Den Unterschied erkennt man allerdings sofort, wenn man nicht-quadratische Matrizen betrachtet.

Die Erklärung für die Transformationsvorschrift Gl. 5.16 ergibt sich aus der Bedingung

$$\Phi'(\vec{r}') = \Phi(\vec{r})$$

die sagt, dass die transformierte Funktion am transformierten Ort mit der ursprünglichen Funktion am ursprünglichen Ort übereinstimmen soll.

Nun drücken wir $\vec{r}$ durch $\vec{r}'$ aus

$$\vec{r}' = \boldsymbol{T}\vec{r} + \vec{a} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r} = \boldsymbol{T}^{-1}(\vec{r}' - \vec{a}) \tag{5.18}$$

und erhalten

$$\Phi'(\vec{r}') = \Phi(\vec{r}) = \Phi\underbrace{\left(\boldsymbol{T}^{-1}(\vec{r}' - \vec{a})\right)}_{\vec{r}}$$

Schließlich benennen wir das Argument $\vec{r}'$ in $\vec{r}$ um und erhalten das obige Resultat aus Gl. 5.16.

$$\Phi'(\vec{r}) = \Phi\left(\boldsymbol{T}^{-1}(\vec{r} - \vec{a})\right)$$

5.5.2 Darstellung

Hier stellen wir noch eine nützliche Rechentechnik vor, um die Koordinatendarstellung eines Vektorausdrucks zu erhalten. Dazu benötigen wir zunächst den Begriff des **dyadischen Produkts** $\vec{u} \otimes \vec{v}$ von zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Definition 5.4 *DYADISCHES PRODUKT*
Das dyadische Produkt $\vec{u} \otimes \vec{v}$ von zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist eine lineare Transformation für Vektoren.

$$(\vec{u} \otimes \vec{v})\,\vec{r} \stackrel{def}{=} \vec{u}\,(\vec{v} \cdot \vec{r}) \tag{5.19}$$

Wenden wir ein dyadisches Produkt $\vec{u} \otimes \vec{v}$ auf einen Vektor $\vec{r}$ an, dann erhalten wir einen Vektor, der in Richtung des linken Vektors $\vec{u}$ zeigt, und dessen Länge sich aus der Projektion von $\vec{r}$ auf den rechten Vektor $\vec{v}$ und der Längen der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ergibt. Die Matrixelemente des dyadischen Produkts sind

$$(\vec{u} \otimes \vec{v})_{i,j} = \vec{e}_i\,(\vec{u} \otimes \vec{v})\,\vec{e}_j = \underbrace{\vec{e}_i\vec{u}}_{u_i}\,\underbrace{(\vec{v}\vec{e}_j)}_{v_j} = u_i v_j$$

$$(\vec{u} \otimes \vec{v}) = \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{pmatrix}$$

Die Elemente des linken Vektors des dyadischen Produkts werden also in jede Spalte eingetragen und die des rechten Vektors in jede Zeile. Anschließend werden die Komponenten multipliziert.
Beachte, dass das dyadische Produkt nicht kommutativ ist. Im Allgemeinen gilt

$$\vec{u} \otimes \vec{v} \neq \vec{v} \otimes \vec{u}$$

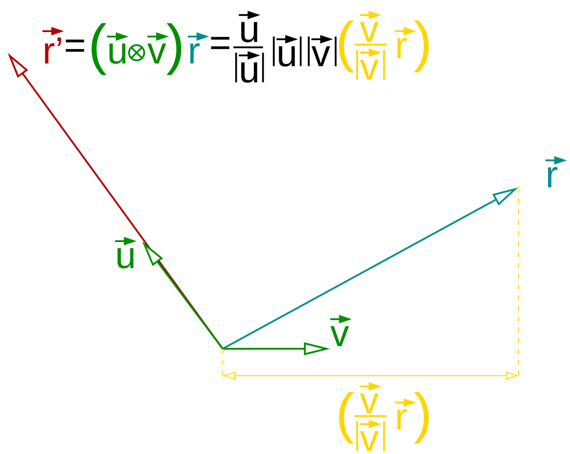


Abb. 5.6: Dyadisches Produkt als Vektorabbildung. $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\vec{r}$ ist die Projektion des Vektors $\vec{r}$ auf die Richtung von $\vec{v}$. Das Resultat ist parallel zur Richtung von $\vec{u}$, also proportional zu $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$. Das Resyltat ist auch proportional zu den Längen von u und v.

Definition 5.5 *PROJEKTION*
Das dyadische Produkt spielt eine wichtige Rolle im Projektionsoperator. Betrachte einen normierten Vektor $\vec{e}$, sodass $|\vec{e}| = 1$. Der Projektionsoperator

$$\vec{e} \otimes \vec{e}$$

liefert, angewandt auf einen beliebigen Vektor $\vec{r}$, einen Vektor, der in Richtung von $\vec{e}$ zeigt, und dessen Länge der Projektion von $\vec{r}$ auf die Richtung von $\vec{e}$ entspricht. Die Operation

$$\mathbf{1} - \vec{e} \otimes \vec{e}$$

projeziert einen Vektor in eine Ebene, dessen Normalenvektor $\vec{e}$ ist. Der resultierende Vektor steht senkrecht auf $\vec{e}$.

Eine wichtige Eigenschaft einer orthonormalen Basis ist die Darstellung der **Identität**, der Operation, die nichts tut.

$$\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i \tag{5.20}$$

Diese Gleichung lässt sich verifizieren, indem wir den Operator auf der rechten Seite auf einen beliebigen Vektor anwenden.

$$\mathbf{1}\vec{r} = \left(\sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i \right) \vec{r} \overset{Gl.\ 5.19}{=} \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \left(\vec{e}_i \vec{r} \right) = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i r_i = \vec{r}$$

Nun ist es ein Leichtes, einen Vektorausdruck in seinen Komponenten darzustellen:

KOMPONENTENZERLEGUNG EINES VEKTORAUSDRUCKS

Wir führen zwischen zwei abstrakten Symbolen, Vektoren oder Transformationen, eine Identität der Form Gl. 5.20 ein und multiplizieren von links mit einem beliebigen Basisvektor $\vec{e}_k$

Nehmen wir folgendes einfaches Beispiel:

$$\begin{aligned}
\vec{u}' &= \boldsymbol{T}\vec{u} \\
\Rightarrow \vec{e}_k \vec{u}' &= \vec{e}_k \boldsymbol{T} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i \right)}_{\mathbf{1}} \vec{u} \\
\Rightarrow \underbrace{\vec{e}_k \vec{u}'}_{u'_k} &= \sum_{i=1}^{3} \underbrace{(\vec{e}_k \boldsymbol{T} \vec{e}_i)}_{T_{k,i}} \underbrace{(\vec{e}_i \vec{u})}_{u_i} \\
\Rightarrow u'_k &= \sum_{i=1}^{3} T_{k,i} u_i
\end{aligned}$$

Dies ist die gewünschte Komponentendarstellung des obigen Ausdrucks in der Basis $\{\vec{e}_i\}$. Dieses einfache Kochrezept lässt sich auf beliebige Vektorausdrücke anwenden.

H!

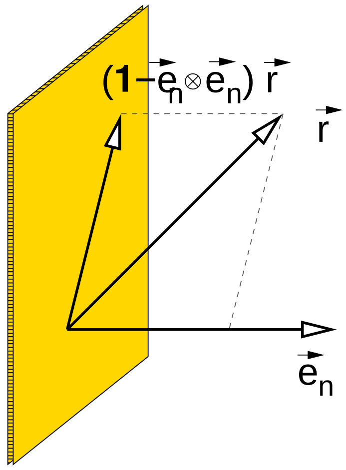


Abb. 5.7: Projektion auf eine Ebene mit Hilfe des normalisierten Normalenvektor der Ebene $\vec{e}_n$. (Ein Normalenvektor ist als ein auf der Ebene senkrecht stehender Vektor definiert.)

Definition 5.6 *TRANSPOSITION*
Hier haben wir die **Transponierte $\boldsymbol{T}^\top$** *der Transformation* $\boldsymbol{T}$ *eingeführt. Die Transponierte einer Transformation ist durch seine Rolle im Skalarprodukt definiert.*

$$\vec{u}\,\boldsymbol{T}\vec{v} = \vec{v}\,\boldsymbol{T}^\top\vec{u} \tag{5.21}$$

In Koordinatendarstellung spiegelt die Transposition die Matrixelemente über die Hauptdiagonale

$$T^\top_{i,j} = \vec{e}_i\boldsymbol{T}^\top\vec{e}_j \stackrel{Gl.\ 5.21}{=} \vec{e}_j\boldsymbol{T}\vec{e}_i = T_{j,i}$$

$$\boldsymbol{T} \hat{=} \begin{pmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & T_{1,3} \\ T_{2,1} & T_{2,2} & T_{2,3} \\ T_{3,1} & T_{3,2} & T_{3,3} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{T}^\top \hat{=} \begin{pmatrix} T_{1,1} & T_{2,1} & T_{3,1} \\ T_{1,2} & T_{2,2} & T_{3,2} \\ T_{1,3} & T_{2,3} & T_{3,3} \end{pmatrix}$$

Zwei nützliche Rechenregeln für die Transposition sind

- *Regel 1:*

$$(\boldsymbol{A}\vec{u})\,\vec{v} = \vec{u}\left(\boldsymbol{A}^\top\vec{v}\right) \tag{5.22}$$

Diese Regel ergibt sich aus der Kommutativität des Skalarprodukts und der Konvention, dass die Operation auf den rechts stehenden Vektor wirkt, wenn keine Klammern gesetzt sind.

$$(\boldsymbol{A}\vec{u})\,\vec{v} = \vec{v}\,(\boldsymbol{A}\vec{u}) = \vec{v}\boldsymbol{A}\vec{u} \stackrel{Gl.\ 5.21}{=} \vec{u}\boldsymbol{A}^\top\vec{v} = \vec{u}\left(\boldsymbol{A}^\top\vec{v}\right)$$

- *Regel 2:*

$$(\boldsymbol{AB})^\top = \boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top \tag{5.23}$$

Dies lässt sich leicht in der Koordinatendarstellung zeigen

$$(\boldsymbol{AB})^\top_{i,j} = \sum_k A_{j,k}B_{k,i} = \sum_k B_{k,i}A_{j,k} = \sum_k B^\top_{i,k}A^\top_{k,j} = \left(\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top\right)_{i,j}$$

5.6 Drehungen

Im Folgenden spielen **Drehungen** eine besondere Rolle für uns. Drehungen sind zusammen mit Spiegelungen und Verschiebungen die einzigen Transformationen, die alle Abstände unverändert lassen. Wenn wir davon ausgehen, dass die Eigenschaften eines Objekts nur von den Relativabständen seiner Teile abhängt[2], können wir erwarten, dass sich die Eigenschaften eines Objekts bei einer Drehung nicht verändern. Deshalb spielen Drehungen eine enorme Rolle bei Symmetriebetrachtungen.

Wir werden hier die mathematische Form von Drehungen bzw. Spiegelungen alleine aus der Bedingung herleiten, dass Abstände zwischen beliebigen Vektoren unverändert bleiben. Diese Ableitung wird uns dem eigentlichen "Wesen" einer Drehung näher bringen. Sie wird uns später, bei der Relativitätstheorie, in abstrakterer Form wieder begegnen, weshalb wir sie hier in einiger Tiefe behandeln wollen. Wir klammern die Verschiebungen in der folgenden Diskussion aus, da das Resultat für sie offensichtlich ist.

Die Bedingung, dass Abstände bei einer Transformation $\boldsymbol{U}$ erhalten bleiben, ist

$$|\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \qquad \text{wobei} \qquad \vec{r}'_i = \boldsymbol{U}\vec{r}_i$$

Wir bezeichnen den Distanzvektor mit einem Symbol

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ \vec{d}' &= \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1 \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die Bedingung

$$|\vec{d}'|^2 = |\vec{d}|^2 \qquad \text{wobei} \qquad \vec{d}' = \boldsymbol{U}\vec{d} \tag{5.24}$$

Die linke Seite lässt sich umschreiben

$$|\vec{d}'|^2 = \vec{d}' \cdot \vec{d}' = \left(\boldsymbol{U}\vec{d}\right) \cdot \left(\boldsymbol{U}\vec{d}\right) \overset{Gl.\ 5.22}{=} \vec{d}\boldsymbol{U}^\top\boldsymbol{U}\vec{d} \tag{5.25}$$

Mit Hilfe von Gl. 5.25 lässt sich die Bedingung Gl. 5.24 in die Form

$$\vec{d}\boldsymbol{U}^\top\boldsymbol{U}\vec{d} = \vec{d}\mathbf{1}\vec{d} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{d}\left(\boldsymbol{U}^\top\boldsymbol{U} - \mathbf{1}\right)\vec{d} = 0 \tag{5.26}$$

bringen.

Aus der Bedingung Gl. 5.26 lässt sich ableiten, dass $\boldsymbol{U}^\dagger\boldsymbol{U} - \mathbf{1}$ antisymmetrisch ist.

Definition 5.7 *ANTISYMMETRISCHE MATRIX*
Eine Matrix heißt **antisymmetrisch***, wenn sie beim Vertauschen ihrer Indizes ihr Vorzeichen wechselt, d.h. wenn $A_{i,j} = -A_{j,i}$ bzw. $\boldsymbol{A}^\top = -\boldsymbol{A}$ gilt.*

Hier zeigen wir, dass eine Matrix $\boldsymbol{A}$ antisymetrisch ist, wenn $\vec{d}\boldsymbol{A}\vec{d} = 0$ für beliebige Vektoren $\vec{d}$ gilt.

$$\begin{aligned} 0 = \vec{d}\boldsymbol{A}\vec{d} &= \sum_{i,j} d_i A_{i,j} d_j \\ &= A_{11}d_1^2 + A_{22}d_2^2 + A_{33}d_3^2 \\ &\quad + (A_{12} + A_{21})\, d_1 d_2 + (A_{23} + A_{32})\, d_2 d_3 + (A_{31} + A_{13})\, d_3 d_1 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Wählen wir Vektoren $\vec{d}$ mit nur einer Koordinate ungleich Null, sehen wir, dass die Diagonalelemente von $\boldsymbol{A}$ verschwinden müssen. [3] Wählen wir einen Vektor mit zwei Koordinaten ungleich Null, dann

[2] Die Winkel der Abstandsvektoren sind automatisch identisch, wenn alle Abstände identisch sind.

[3] Zum Beispiel folgt mit der Wahl

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sehen wir, dass $A_{i,j} = -A_{j,i}$ gelten muss, da ja die Diagonalelemente von $\boldsymbol{A}$ verschwinden. Die Matrix $\boldsymbol{A}$ muss also antisymmetrisch sein.

Aus der Bedingung Gl. 5.26 folgt also die Antisymmetrie von $\boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{U} - \mathbf{1}$. Aus dieser Antisymmetrie lässt sich eine Bedingung für die Drehmatrix ableiten, nämlich dass sie unitär ist. Dies wird im Folgenden gezeigt:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{U} - \mathbf{1} &\overset{antisymm.}{=} -\left[\boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{U} - \mathbf{1}\right]^\top = -\left[\boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{U}\right]^\top + \mathbf{1} \\
&\overset{(\boldsymbol{AB})^\top = \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{A}^\top}{=} -\boldsymbol{U}^\top \left(\boldsymbol{U}^\top\right)^\top + \mathbf{1} = -\boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{U} + \mathbf{1} \\
\Rightarrow 2\left[\boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{U} - \mathbf{1}\right] &= 0 \\
\Rightarrow \boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{U} &= \mathbf{1}
\end{aligned}$$

Eine Drehmatrix muss also unitär sein.

Definition 5.8 *UNITÄRE ABBILDUNG*
Eine Abbildung $\boldsymbol{U}$ mit der Eigenschaft $\boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{U} = \mathbf{1}$ heißt **unitär**. *Für eine unitäre Abbildung gilt, dass ihre Transponierte gleich ihrer Inversen ist.*

$$\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}^\top$$

DREHUNGEN

- Drehungen und Spiegelungen sind die einzigen Operationen, die alle Abstände unverändert lassen.
- Drehungen und Spiegelungen sind unitäre Abbildungen. Jede unitäre Abbildung ist eine Drehung, oder eine Drehung, die mit einer Spiegelung kombiniert ist.
- Bei einer reinen Drehung ist die Determinante der Matrix positiv, d.h. plus eins. Ist die Determinante negativ, dann ist die Drehung mit einer Spiegelung kombiniert.

Betrachten wir die Gleichung $\boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{U} = \mathbf{1}$ dann erhalten wir 9 Gleichungen.

$$\sum_j U_{k,i} U_{k,j} = \delta_{i,j}$$

Davon sind nur 6 Gleichungen unabhängig, da eine Gleichung mit unterschiedlichen Indizes i, j bei Vertauschung der Indizes in eine andere Gleichung des Gleichungssystems übergeführt werden kann. Es ergeben sich also 6 Gleichungen für 9 Unbekannte, nämlich die 9 Matrixelemente von $\boldsymbol{U}$. Die Lösung für die Matrixelemente der Drehmatrix $\boldsymbol{U}$ hängt also von drei freien Parametern ab. Diese entsprechen den Drehwinkeln um die drei Raumrichtungen. Da die Gleichung quadratisch ist, erhalten wir für jeden Satz der kontinuierlichen Parameter zwei Lösungen. Diese entsprechen den gespiegelten Lösungen.

---

aus Gl. 5.27, dass das Glied $A_{1,1}$ verschwinden muss. Allgemeiner gilt erhalten wir mit $\vec{d} = \vec{e}_i$ dass $A_{i,i} = 0$. Mit

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir aus Gl. 5.27 $A_{1,2} + A_{2,1} = 0$, wobei das Verschwinden der Diagonalelemente bereits berücksichtigt wurde.

Darstellung von Drehmatrizen

Um Drehmatrizen aufzustellen, werden an dieser Stelle üblicherweise die **Eulerschen Winkel** eingeführt. Ich persönlich habe die folgende Darstellung nützlicher gefunden, weshalb ich sie anstelle der Eulerschen Winkel beschreiben möchte.[4]

DARSTELLUNG UNITÄRER MATRIZEN

Jede unitäre Matrix kann mit Hilfe von drei orthogonalen und normierten Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ als

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Es gilt also

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 1 \qquad \text{und} \qquad \vec{u}\vec{v} = \vec{v}\vec{w} = \vec{w}\vec{u} = 0$$

Die drei Vektoren sind das Resultat der unitären Transformation der drei Einheitsvektoren des Koordinatensystems

$$\vec{u} = \boldsymbol{U}\vec{e}_1, \qquad \vec{v} = \boldsymbol{U}\vec{e}_2, \qquad \vec{w} = \boldsymbol{U}\vec{e}_3$$

Diese Eigenschaft erweist sich als sehr nützlich, um eine gesuchte Drehung numerisch auszudrücken. Sie soll im Folgenden gezeigt werden:

Die Unitaritätsbedingung

$$\sum_k \boldsymbol{U}_{ki}\boldsymbol{U}_{kj} = \delta_{ij}$$

kann als Orthonormalitätsbedingung für drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ aufgefasst werden:

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

mit

$$\sum_i U_{k,i}U_{k,i} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad |\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 1$$

$$\sum_i U_{k,i}U_{k,j} = 0 \qquad \text{mit} \quad i \neq j \qquad \Rightarrow \qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{w}\cdot\vec{u} = 0$$

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega}$ sind also drei Vektoren der Länge 1, die senkrecht aufeinander stehen.

Die drei Vektoren sind gerade das Resultat der Transformation der Basisvektoren.

$$\vec{u} = \boldsymbol{U}\vec{e}_1 = \boldsymbol{U}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \boldsymbol{U}\vec{e}_2 = \boldsymbol{U}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \boldsymbol{U}\vec{e}_3 = \boldsymbol{U}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bilden die drei Vektoren ein rechtshändiges Koordinatensystem, liegt eine reine Drehung vor. Bilden sie ein linkshändiges Koordinatensystem, enthält die Transformation darüber hinaus eine Spiegelung. Man kann eine reine Drehung in eine Drehung und Spiegelung überführen, indem man das Vorzeichen von einem der Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ umkehrt. Raumspiegelungen sind also auch Operationen, die Abstände erhalten.

[4] Im Anhang C zeige ich eine weitere Art, um Drehungen darzustellen. Dabei wird der Drehwinkel und die Drehachse in einem Dreh-Vektor zusammengefasst.

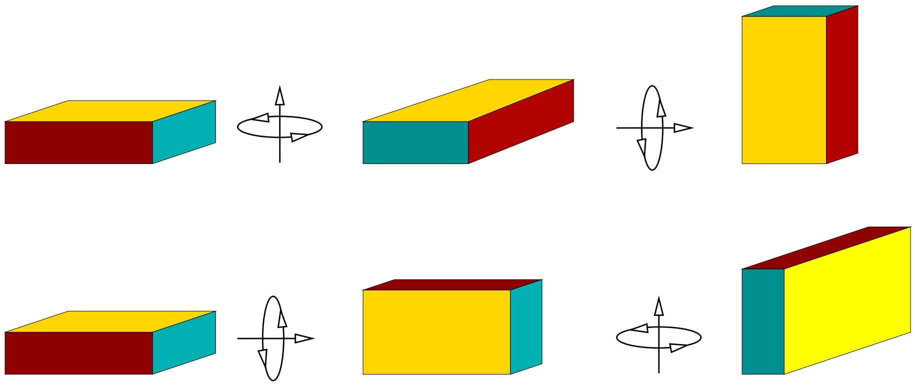
Reihenfolge von Drehungen

Drehungen sind nicht vertauschbar

$$\boldsymbol{U}_1 \cdot \boldsymbol{U}_2 \neq \boldsymbol{U}_2 \cdot \boldsymbol{U}_1$$

Für Drehmatrizen gilt das Kommutativgesetz nicht.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_z(90^\circ)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{R_x(90^\circ)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{R_{(111)}(90^\circ)}$$



$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{R_x(90^\circ)} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{R_z(90^\circ)} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{R_{(1\bar{1}1)}(90^\circ)}$$

Abb. 5.8: Demonstration dafür, dass das Kommutativgesetz für das Produkt von Drehungen nicht gilt. Das Resultat einer Drehung von 90° erst um die z-Richtung und anschließend um die x-Richtung (oben) unterscheidet sich von Resultat, wenn die Drehung um die x-Richtung zuerst und erst dann die Drehung um die z-Richtung vorgenommmen wird (unten). $R_{(111)}(90^\circ)$ bezeichnet eine Drehung um die Diagonale $(1,1,1)$, die nach rechts,oben und hinten zeigt. $R_{(1\bar{1}1)}(90^\circ)$ bezeichnet eine Drehung um die Diagonale $(1,-1,1)$, die nach rechts,oben und vorne zeigt.

Im Allgemeinen ist das Kommutativgesetz für das Produkt von Matrizen, also Transformationen, nicht erfüllt. Beim Rechnen mit Zahlen und Matrizen ist dies der wesentliche Unterschied.Diese Bemerkung ist im Zusammenhang mit Matrizen wichtig. Später werden wir mit Matrizen fast wie mit Zahlen umgehen. Der wesentliche Unterschied ist jedoch, dass wir die Terme eines Produkts nicht vertauschen dürfen.

5.7 Galilei-Transformationen

5.7.1 Raum-Zeit Kontinuum

Bisher haben wir uns mit Transformationen im Raum beschäftigt. Nun betrachten wir nicht nur Transformationen von Orten, sondern solche von **Ereignissen**. Ein Ereignis wird durch einen Ort im

Raum und einen Zeitpunkt definiert. Wir stellen die Raum-Zeit Koordinaten von Ereignissen durch einen vierdimensionalen Vektor

$$(t, \vec{r}) \hat{=} \vec{e}_t t + \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z = \sum_{i=0}^{3} \vec{e}_i x_i$$

dar. Die Einheitsvektoren sind Vektoren im vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum. Die zeitliche Koordinate wird häufig dem Index Null zugeordnet, d.h. $x_0 \stackrel{\text{def}}{=} x_t$ und $\vec{e}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \vec{e}_t$, damit die räumlichen Koordinaten die übliche Indizierung beibehalten. Die Bahn eines Teilchens ist eine Linie im vierdimensionalen Raum-Zeit Kontinuum.

5.7.2 Symmetrieeigenschaften des Raum-Zeit Kontinuums

Im Folgenden untersuchen wir die Symmetrieeigenschaften des leeren Raums. Diese werden uns wichtige Hinweise auf die erlaubten Bewegungsgleichungen liefern. Zunächst müssen wir aber definieren, was wir überhaupt unter einer Symmetrie verstehen.

Definition 5.9 *SYMMETRIE*

- *Ein Objekt ist bezüglich einer Abbildung symmetrisch, wenn es sich durch die Abbildung nicht verändert. Man nennt eine solche Abbildung Symmetrietransformation des Objekts.*
- *Eine Bewegungsgleichung ist symmetrisch zu bzw. invariant unter einer Symmetrieoperation, wenn für jeden Pfad $\vec{r}(t)$, der die Bewegungsgleichungen erfüllt, auch der Pfad $\vec{r'}(t')$, der durch die entsprechende Operationen aus $\vec{r}(t)$ hervorgeht, die Bewegungsgleichung erfüllt.*
- *Sind alle Naturgesetze, dargestellt durch Bewegungsgleichungen, in Abwesenheit äußerer Einflüsse invariant unter einer Gruppe von Symmetrieoperationen, dann ordnet man diese Symmetrie dem Raum, bzw. dem Raum-Zeit Kontinuum, zu.*

Wir postulieren, dass die Symmetrieoperationen des leeren Raumes die folgenden Bedingungen erfüllen:

SYMMETRIEEIGENSCHAFTEN VON RAUM-ZEIT

- **Längentreue bei Gleichzeitigkeit**: Die Form von Körpern bleibt erhalten.

$$|\vec{r'}_2 - \vec{r'}_1| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \qquad \text{für} \qquad t_1 = t_2$$

- **Zeittreue**: Der zeitliche Abstand zwischen Ereignissen bleibt erhalten.

$$|t'_2 - t'_1| = |t_2 - t_1|$$

Wir werden später sehen, dass die Naturgesetze die obigen Bedingungen nicht exakt, sondern nur näherungsweise erfüllen. Dieser Mangel der klassischen Physik wird mit der Relativitätstheorie überwunden.

Im folgenden suchen wir nach den Transformationen, welche die obigen Bedingungen erfüllen. Wir fordern, dass die Operationen linear sind. Das bedeutet, dass die neuen Koordinaten einer Symmetrieoperation linear von den alten Koordinaten abhängen. Die Symmetrieoperationen haben also die allgemeine Form[5]:

$$\begin{pmatrix} t' \\ \vec{r}' \end{pmatrix} = \boldsymbol{S} \begin{pmatrix} t \\ \vec{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta \vec{r} \end{pmatrix}$$

Dabei ist $\boldsymbol{S}$ eine vierdimensionale Matrix.

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} S_{t,t} & S_{t,x} & S_{t,y} & S_{t,z} \\ S_{x,t} & S_{x,x} & S_{x,y} & S_{x,z} \\ S_{y,t} & S_{y,x} & S_{y,y} & S_{y,z} \\ S_{z,t} & S_{z,x} & S_{z,y} & S_{z,z} \end{pmatrix}$$

Die spezielle Form von $\boldsymbol{S}$ wird im Folgenden bestimmt.

Betrachten wir zunächst die Bedingung der Zeittreue. Sie muss für beliebige Vektoren (t, x, y, z) erfüllt sein.

$$\begin{aligned} |t_1' - t_2'| &= |S_{t,t}(t_1 - t_2) + S_{t,x}(x_1 - x_2) + S_{t,y}(y_1 - y_2) + S_{t,z}(z_1 - z_2)| \\ &\stackrel{\text{Zeittreue}}{=} |t_1 - t_2| \end{aligned}$$

- Wenn Zeittreue gilt, dann müssen zwei gleichzeitige Ereignisse nach einer Transformation wieder gleichzeitig sein. Dies bedeutet

$$\begin{aligned} &\left(t_1 - t_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1' - t_2' = 0\right) \\ &\qquad \Rightarrow \quad 0 = |S_{t,x}(x_1 - x_2) + S_{t,y}(y_1 - y_2) + S_{t,z}(z_1 - z_2)| \end{aligned}$$

  Dies ist nur dann für alle räumlichen Distanzen erfüllt, wenn

$$S_{t,x} = S_{t,y} = S_{t,z} = 0$$

- Die Transformationsgleichung reduziert nun zu

$$|t_1' - t_2'| = |S_{t,t}(t_1 - t_2)| \stackrel{\text{Zeittreue}}{=} |t_1 - t_2|$$

  woraus man sofort

$$S_{tt} = \pm 1$$

  erhält.

Nun betrachten wir die Längentreue bei Gleichzeitigkeit. Für gleichzeitige Ereignisse, d.h. $t_1 = t_2$ (und daher wegen der Zeittreue $t_1' = t_2'$) haben wir es mit einer rein räumlichen Transformation zu tun. Für diese haben wir bereits nachgewiesen, dass Längentreue nur mit Drehungen und Raumspiegelungen vereinbar ist. Deshalb fordern wir, dass der räumliche Teil von $\boldsymbol{S}$ eine unitäre Matrix sein muss.

Schließlich fassen wir den Vektor $(S_{x,t}, S_{y,t}, S_{z,t})$ in einen Vektor $\vec{V}$ zusammen. Die Matrix $\boldsymbol{S}$ hat daher die Form[6]

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \pm 1 & \vec{0} \\ \vec{V} & \boldsymbol{U} \end{pmatrix}$$

[5] Man beachte: $\Delta \vec{r}$ ist ein Vektor. Δ sollte hier nicht mit dem Laplace-Operator verwechselt werden. Also $\Delta \neq \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$

[6] Wir verwenden hier eine Kurzschreibweise, bei der die räumlichen Matrixelemente wieder zu Vektoren und Matrizen zusammengefasst werden.

GALILEI-TRANSFORMATIONEN

Transformationen dieser Form nennen wir Galilei-Transformationen[7]:

$$\begin{pmatrix} t' \\ \vec{r'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & \vec{0} \\ \vec{V} & \boldsymbol{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \vec{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta \vec{r} \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

Dabei ist $\boldsymbol{U}$ unitär, also eine Drehung, bzw. Spiegelung. Wie wir noch zeigen werden, ist V die Geschwindigkeit, welche ein ruhender Punkt durch die Transformation erhält.

$$\begin{aligned} t' &= \pm t + \Delta t \\ \vec{r'} &= \boldsymbol{U}\vec{r} + \vec{V}t + \Delta\vec{r} \end{aligned}$$

5.7.3 Galilei Transformationen im Einzelnen

Die folgenden Transformationen erfüllen die Bedingung, dass räumliche und zeitliche Abstände erhalten bleiben und sind damit Symmetrieoperationen des leeren Raums:

SYMMETRIEN DES LEEREN RAUMS

- **Homogenität** des Raums (Translationssymmetrie im Raum)
- Homogenität der Zeit (Translationssymmetrie in der Zeit)
- räumliche Inversionssymmetrie (Spiegelsymmetrie des Raums)
- Zeitinversionssymmetrie (zeitliche Spiegelsymmetrie)
- **Isotropie** des Raums (Drehinvarianz)
- Relativität von Raum-Zeit (Unabhängigkeit der Bewegungsgleichung von der Relativbewegung des Beobachters[a].)

[a] Beachte: Dieses Kapitel berücksichtigt keine relativistischen Effekte

Im Folgenden werden die aktiven Transformationen im Einzelnen vorgestellt:

- Translation im Raum

$$\begin{aligned} t' &= t \\ \vec{r'} &= \vec{r} + \Delta\vec{r} \end{aligned} \tag{5.29}$$

- Translation in der Zeit

$$\begin{aligned} t' &= t + \Delta t \\ \vec{r'} &= \vec{r} \end{aligned} \tag{5.30}$$

- Spiegelung im Raum: Es gibt Spiegelungen an einer Ebene, oder die **Punktspiegelung**. Die

[7] Beachte, dass es Schulen mit unterschiedliche Sprechweisen gibt. Manche Lehrbücher verlangen in der Definition der Galileitransformation, dass die Transformationsmatrix eine positive Determinante hat. Wir tun das hier nicht.

Punktspiegelung hat die Form

$$t' = t$$
$$\vec{r}' = -\vec{r} \tag{5.31}$$

Die Spiegelung an einer Ebene hat im räumlichen Anteil die Form

$$\vec{r}' = [\mathbf{1} - 2\vec{n} \otimes \vec{n}]\,\vec{r}$$

wobei $\vec{n}$ der normierte Normalenvektor der Spiegelebene ist[8]. Legen wir zum Beispiel die Spiegelebene in die yz-Ebene, dann ist der Normalenvektor $\vec{n} = \vec{e}_1 \widehat{=} (1, 0, 0)$.

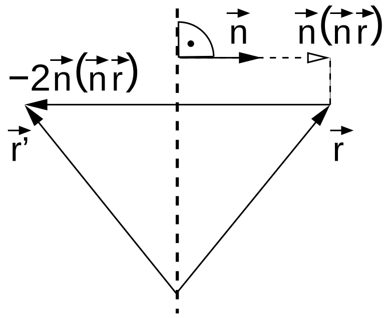


Abb. 5.9: Darstellung der Spiegelung: Wir betrachten eine Spiegelebene (gestrichelt) durch den Aufpunkt des Vektors $\vec{r}$. Der Normalenvektor $\vec{n}$ steht senkrecht auf der Ebene und hat die Länge 1. $\vec{n}\vec{r}$ ist die Projektion von $\vec{r}$ auf die Flächennormale. $\vec{n}(\vec{n}\vec{r})$ ist die Komponente des Vektors $\vec{r}$ senkrecht zur Spiegelebene. $\vec{r}' = \vec{r} - 2\vec{n}(\vec{n}\vec{r}) = (\mathbf{1} - 2\vec{n} \otimes \vec{n})\,\vec{r}$ ist das Spiegelbild. Beachte, dass die Spiegelebene durch den Aufpunkt des Vektors geht. In anderen Fällen wird der Vektor in einen zerlegt, der auf die Spiegelebene zeigt, und deshalb unverändert bleibt, und einen der seinen Aufpunkt in der Spiegelebene hat und entsprechend dieser Prozedur gespiegelt wird.

Die Transformationsmatrix der Spiegelung an der yz-Ebene hat im räumlichen Teil die Form

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{r} \qquad \text{d.h.} \qquad x' = -x, \qquad y' = y, \qquad z' = z$$

Die Punktspiegelung entsteht durch die Spiegelung an drei orthogonalen Ebenen. Bei der Punktspiegelung um den Ursprung wechseln die Vorzeichen aller Komponenten des Vektors, d.h.

$$t' = t$$
$$\vec{r}' = -\vec{r} \tag{5.32}$$

- **Zeitinversion**: Spiegelung in der Zeit.

$$t' = -t$$
$$\vec{r}' = \vec{r} \tag{5.33}$$

- **Drehungen**:

$$t' = t$$
$$\vec{r}' = \boldsymbol{U}\vec{r} \tag{5.34}$$

[8] Das bedeutet: Er hat die Länge eins und steht senkrecht auf der Spiegelebene

Dabei muss $\boldsymbol{U}$ unitär sein. Ist die Determinante von $\boldsymbol{U}$ negativ, ist die Drehung mit einer Raumspiegelung kombiniert.

- Gleichförmige Bewegung: Relativität von Raum-Zeit.

$$\begin{aligned} t' &= t \\ \vec{r}' &= \vec{r} + \vec{V}t \end{aligned} \tag{5.35}$$

Betrachten wir, wie sich eine beliebiege Bahn $\vec{r}(t)$ unter der Transformation verändert.

$$\vec{r}'(t') \stackrel{t=t'}{=} \vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{V}t$$

Die Geschwindigkeit nach der Transformation ist

$$\frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{V}$$

Das bedeutet, dass alle Teilchen unter der Transformation eine zusätzliche Geschwindigkeit erhalten.

Die Relativität von Raum-Zeit sagt, dass die Bewegungsgleichungen unabhängig von der Absolutgeschwindigkeit des Beobachters sind. Beachte aber, dass $\vec{r}'(t') \neq \vec{r}(t)$.

5.7.4 Galilei-Symmetrie der Newtonschen Bewegungsgleichungen

Um zu zeigen, dass die Galileitransformationen die Transformationen des leeren Raums sind, müssen wir noch zeigen, dass die Newtonschen Bewegungsgleichungen diese Symmetrie besitzen. Es gibt hierbei eine Einschränkung, nämlich, dass Reibungskräfte ausgeschlossen werden müssen.[9]

$$m\frac{d^2\vec{r}'}{dt'^2} = \vec{F}'(\vec{r}', t')$$

Nun drücken wir beide Seiten durch die untransformierten Koordinaten $(t, \vec{r})$ aus

$$m\frac{d^2\vec{r}'}{dt'^2} = m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = m\frac{d^2}{dt^2}\underbrace{\left(\boldsymbol{U}\vec{r} + \vec{V}t + \Delta\vec{r}\right)}_{\vec{r}'} = \boldsymbol{U}m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{F}'(\vec{r}', t') = \boldsymbol{U}\vec{F}(\vec{r}, t)$$

Durch Einsetzen in die transformierte Bewegungsgleichung erhalten wir

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, t)$$

Damit wurde gezeigt, dass die Bewegungsgleichung für die transformierte Bahnkurve $\vec{r}'(t')$ gilt, wenn sie auch für die untransformierten Bahnkurve $\vec{r}(t)$ gilt und umgekehrt.

Wir haben die Kräfte mittransformiert. Die Idee dahinter ist, dass wir ein ganzes Objekt– zum Beispiel ein Planetensystem– transformieren. Deshalb sind auch die Kräfte, die auf einen Planeten wirken, transformiert. Betrachten wir jedoch die Transformation eines Teilsystems–zum Beispiel eine Drehung von Erde und Mond um die Sonne– dann werden die Kräfte der Sonne und der übrigen Planeten nicht mittransformiert. Die Bewegungsgleichung wäre also auch nicht mehr invariant bezüglich dieser Transformation des Teilsystems.

[9]Wir schließen Reibungskräfte hier aus, weil physikalische Reibungskräfte mikroskopisch auf konservative (Nicht-Reibungskräfte) Kräfte zurückgeführt werden können.

5.8 Bezugssysteme

Für eine mathematische Beschreibung könnten wir uns auf ein globales Koordinatensystem einigen. Wie vom Fall des Galileo Galilei bekannt, führt das jedoch häufig zu allerhand Problemen[10]. Es wäre auch nicht praktisch, die Koordinaten zum Beispiel von Zentrum der Milchstraße aus zu bestimmen.

Deshalb erlauben wir, dass sich jeder Beobachter im Prinzip sein eigenes Koordinatensystem wählen kann. Wir nennen dieses Koordinatensystem auch **Bezugssystem**. Damit sich Beobachter mit unterschiedlichen Bezugssystemen über physikalische Sachverhalte unterhalten können, müssen sie wissen, wie man die Koordinaten eines Bezugssystems in das eines anderen Beobachters transformiert.

AKTIVE UND PASSIVE TRANSFORMATION

Eine Transformation der Koordinaten desselben Objekts von einem Bezugssystem in ein anderes nennt man **passive Transformation**.
Eine Transformation, bei der die Position, Orientierung, Form, etc. eines Objekts verändert wird, nennt man **aktive Transformation**.

Es seien (x, y, z) die Koordinaten eines Massenpunktes im Bezugssystem des Beobachters B, das durch den Ursprung $\vec{\mathcal{O}}$ und die Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ definiert ist. Ein zweiter Beobachter B' habe sein eigenes Bezugssystem, das durch $\vec{\mathcal{O}}'$ und $\vec{e}\,'_i$ festgelegt ist. Der Urspung des Beobachters B' ist gegenüber dem des Beobachters B um den Vektor $\vec{a} = \vec{\mathcal{O}}' - \vec{\mathcal{O}}$ verschoben und die Basisvektoren sind verdreht bzw. gespiegelt[11]. Diese Drehung und eventuell eine Spiegelung wird durch die unitäre Operation $\boldsymbol{U}$ ausgedrückt.

Die Beziehung zwischen den Bezugssystemen der beiden Beobachter B und B' kann also wie folgt dargestellt werden.

$$\vec{e}\,'_i = \boldsymbol{U}\vec{e}_i \tag{5.36}$$

$$\vec{\mathcal{O}}' = \vec{\mathcal{O}} + \vec{a} \tag{5.37}$$

wobei $\boldsymbol{U}$ eine unitär ist.

Die Operation lässt sich elegant durch die Basisvektoren der beiden Bezugssysteme ausdrücken

TRANSFORMATION ZWISCHEN ZWEI BEZUGSSYSTEMEN

$$\boldsymbol{U} = \sum_i \vec{e'}_i \otimes \vec{e}_i \tag{5.38}$$

Die Matrixelemente der Operation in der Basis des ungestrichenen Bezugssytem sind

$$U_{i,j} = \vec{e}_i \boldsymbol{U} \vec{e}_j = \vec{e}_i \vec{e'}_j \tag{5.39}$$

Wir überprüfen zunächst Gl. 5.38: Dazu gehen wir setzen wir diese Beziehung in Gl. 5.36 ein

$$\sum_i \vec{e'}_i \otimes \vec{e}_i \overset{\text{Gl. 5.36}}{=} \sum_i \underbrace{\boldsymbol{U}\vec{e}_i}_{\vec{e'}_i} \otimes \vec{e}_i = \boldsymbol{U} \underbrace{\sum_i \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i}_{\mathbf{1}} = \boldsymbol{U} \qquad q.e.d.$$

[10]Während die Kirche damals die Erde als das Zentrum des Universums sah, vertrat Galilei die Ansicht, dass sich die Sonne im Zentrum befindet und sich die Planeten, also auch die Erde, drehen. Der Streit ging also um einen Wechsel der Bezugsssysteme. Das sonnenzentrierte Bezugsssytem zeichnet sich aber nur dadurch aus, dass die Planetenbahnen in diesem Bezugssystem eine besonders einfache Form haben. Dieser Tatsache wurde aber eine göttliche Ursache zu Grunde gelegt.

[11]Andere Operationen, wie Scherungen oder Skalierungen sind im Prinzip auch zulässig, führen aber zu einem schiefwinkligen Koordinatensystem, dessen Basisvektoren nicht mehr senkrecht aufeinander stehen, oder zu einem Bezugssystem, dessen Basisvektoren nicht die Länge 1 haben. Wir schließen sie deshalb zunächst aus.

Anschließend bestimmen wir die Komponentendarstellung Gl. 5.39 von $\boldsymbol{U}$, indem wir die Basisvektoren von rechts und links multiplizieren.

$$\vec{e}_i\left(\sum_k \vec{e}'_k\otimes\vec{e}_k\right)\vec{e}_j \overset{Gl.\ 5.19}{=} \sum_k \underbrace{\left(\vec{e}_i\vec{e}'_k\right)}_{U_{i,j}}\underbrace{\left(\vec{e}_k\vec{e}_j\right)}_{\delta_{k,j}} \overset{Gl.\ 5.39}{=} U_{i,j} \qquad q.e.d.$$

Passive Transformation

Wir wollen nun untersuchen, wie wir die Komponenten eines Vektors von einem Bezugssystem in ein anderes übersetzen können. In diesem Zusammenhang ist Abb. 5.10 auf Seite 110 hilfreich. Wir betrachten einen Vektor $\vec{r}$, der im Bezugssystem B die Komponenten x_i und im Bezugssystem B' die Komponenten x'_i hat.

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= \vec{O}+\textstyle\sum_i \vec{e}_i x_i &&\overset{Gl.\ 5.4}{\Rightarrow} && x_i = \vec{e}_i\left(\vec{P}-\vec{O}\right)\\
\vec{P} &= \vec{O}'+\textstyle\sum_i \vec{e}'_i x'_i &&\overset{Gl.\ 5.4}{\Rightarrow} && x'_i = \vec{e}'_i\left(\vec{P}-\vec{O}'\right)
\end{aligned}$$

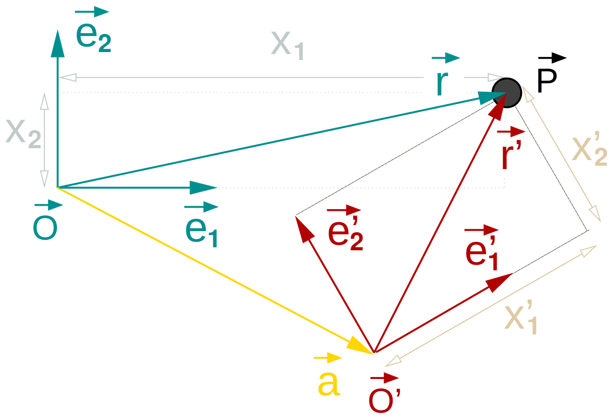


Abb. 5.10: Wechsel der Bezugssysteme: x'_i sind die Komponenten des Vektors $\vec{r}''$ im Bezugssystem B', d.h. $x'_i = \vec{e}'_i\vec{r}'' = \vec{e}'_i(\vec{P}-\vec{O}')$. Der Punkt $\vec{P}'$ erscheint dem Beobachter B genauso wie der Punkt $\vec{P}$ dem Beobachter B' erscheint. Man erhält $\vec{P}'$ durch diejenige Koordinatentransformation, welche das Bezugssystem B' auf das Bezugssystem B abbildet. Der Punkt $\vec{P}'$ hat im Bezugssystem B die selben Koordinaten wie der Punkt $\vec{P}$ im Bezugssystem B'. Dies bedeutet, dass die x'_i auch die Koordinaten des Vektors $\vec{r}'$ im Bezugssystem B sind. Es gilt also auch $x'_i = \vec{e}_i\vec{r}' = \vec{e}_i(\vec{P}'-\vec{O})$

Nun wollen wir die Koordinaten x'_i im Bezugssystem B' durch die Koordinaten x_i des Beobachters B ausdrücken.

$$\begin{aligned}
x'_i &\overset{Gl.\ 5.4}{=} \vec{e}'_i\left(\vec{P}-\vec{O}'\right) \overset{Gl.\ 5.20}{=} \vec{e}'_i\underbrace{\left(\sum_j \vec{e}_j\otimes\vec{e}_j\right)}_{\mathbf{1}}\left(\vec{P}\underbrace{-\vec{O}-\vec{a}}_{-\vec{O}'}\right)\\
&\overset{Gl.\ 5.19}{=} \sum_j \underbrace{\vec{e}'_i\vec{e}_j}_{\vec{e}_j\boldsymbol{U}\vec{e}_i=U_{j,i}}\left[\vec{e}_j\left(\vec{P}-\vec{O}-\vec{a}\right)\right] \overset{Gl.\ 5.39}{=} \sum_j U_{j,i}(x_j-a_j)\\
&\overset{\boldsymbol{U}^\top=\boldsymbol{U}^{-1}}{=} \sum_j U^{-1}_{i,j}(x_j-a_j)
\end{aligned}\tag{5.40}$$

Die Rücktransformation erhalten wir durch[12]

$$x_k = a_k + \sum_i U_{k,i} x'_i \qquad \Big(= a_k + \sum_j \underbrace{\sum_i U_{k,i} U_{j,i}}_{\delta_{k,j}} (x_j - a_j)\Big) \tag{5.41}$$

Für Vektoren $\vec{u}$, die keine Positionen (Ortsvektoren) sind, fallen bei den Transformationen die Verschiebungen des Ursprungs weg. Es gilt also

$$u'_i \overset{Gl.\ 5.4}{=} \vec{e'}_i \vec{u} \overset{Gl.\ 5.5}{=} \sum_j \vec{e'}_i \vec{e}_j u_j \overset{Gl.\ 5.39}{=} \sum_i U_{j,i} u_j \overset{U^\top = U^{-1}}{=} \sum_i U^{-1}_{i,j} u_j$$

PASSIVE TRANSFORMATION

Ein Beobachter B kann die Koordinaten x_i der Position $\vec{P}$ eines Objekts in die Koordinaten x'_i eines Beobachters B' wie folgt transformieren

$$x'_i = \sum_j U^{-1}_{i,j} (x_j - a_j) \tag{5.42}$$

Für die Komponenten eines Vektors $\vec{u}$, der keine Position beschreibt, gilt

$$u'_i = \sum_j U^{-1}_{i,j} u_j \tag{5.43}$$

Basisvektoren $\vec{e'}_i$ und Ursprung $\vec{\mathcal{O}}$ des Bezugssystems von B' stehen in der Beziehung

$$\vec{e'}_i = \boldsymbol{U} \vec{e}_j$$
$$\vec{\mathcal{O}'} = \vec{\mathcal{O}} + \vec{a}$$

zur Basis $\vec{e}_i, \vec{\mathcal{O}}$ des Beobachters B

Abbild aus einem anderen Bezugssystem

Nun wählen wir eine andere Sichtweise: Stellen wir uns vor, der Beobachter B' beschreibt uns auf seiner interstellaren Forschungsreise die Bahnen eines neuartigen Planetensystems. Wir erhalten nur die Koordinaten x'_i im Bezugsssytem von B'. Diese Mitteilung lautet zum Beispiel: "Planet P liegt x'_1 Lichtminuten rechts von mir, x'_2 Lichtminuten vor mir und x'_3 Lichtminuten über mir". Also

$$\vec{P} = \vec{\mathcal{O}'} + \vec{r''} = \vec{\mathcal{O}'} + \sum_i \vec{e'}_i x'_i$$

Die Beziehung zwischen unserem Bezugssystem und dem von B' sei aber unbekannt. Wir wollen uns ein Bild des Planetensystems machen, und übertragen daher die Koordinaten unverändert in unser Koordinatensystem. Wir erhalten das Abbild P' des Planeten P

$$\vec{P'} = \vec{\mathcal{O}} + \vec{r'} = \vec{\mathcal{O}} + \sum_i \vec{e}_i x'_i$$

12

$$\sum_i U_{k,i} U_{j,i} = \sum_i (\vec{e}_k \boldsymbol{U} \vec{e}_i) \Big(\vec{e}_i \boldsymbol{U}^\top \vec{e}_j\Big) = \vec{e}_k \boldsymbol{U} \underbrace{\sum_i \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i}_{\mathbf{1}} \boldsymbol{U}^\top \vec{e}_j = \vec{e}_k \underbrace{\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\top}_{\mathbf{1}} \vec{e}_j = \vec{e}_k \vec{e}_j = \delta_{k,j}$$

$\vec{P'}$ beschreibt kein reales System, sondern unsere Vorstellung davon, was B' beobachtet.

Wir haben eine aktive Transformation durchgeführt, die aus dem realen Planeten P sein Abbild P' erzeugt. Diese Transformation wollen wir nun bestimmen.

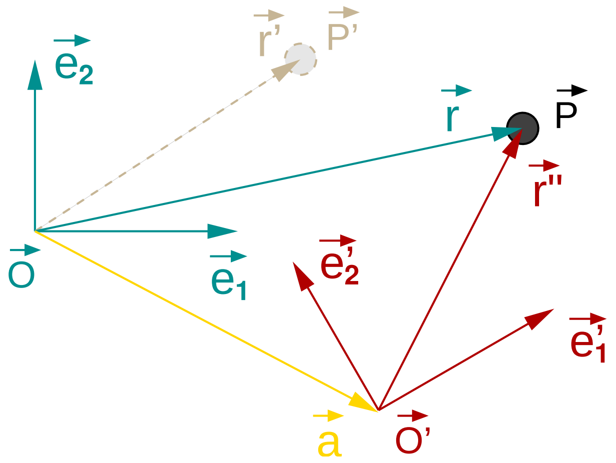


Abb. 5.11: Wechsel der Bezugssysteme: x'_i sind die Komponenten des Vektors $\vec{r''}$ im Bezugssystem B', d.h. $x'_i = \vec{e'}_i \vec{r''} = \vec{e'}_i(\vec{P} - \vec{O'})$. Der Punkt $\vec{P'}$ erscheint dem Beobachter B genauso wie der Punkt $\vec{P}$ dem Beobachter B' erscheint. Man erhält $\vec{P'}$ durch diejenige Koordinatentransformation, welche das Bezugssystem B' auf das Bezugssystem B abbildet. Der Punkt $\vec{P'}$ hat im Bezugssystem B die selben Koordinaten wie der Punkt $\vec{P}$ im Bezugssystem B'. Dies bedeutet, dass die x'_i auch die Koordinaten des Vektors $\vec{r'}$ im Bezugssystem B sind. Es gilt also auch $x'_i = \vec{e}_i \vec{r'} = \vec{e}_i(\vec{P'} - \vec{O})$

Wir werden untersuchen, in welcher Beziehung $\vec{r}$ und $\vec{r'}$ stehen. Wir verwenden

$$\vec{P'} = \vec{O} + \underbrace{\sum_i \vec{e}_i x'_i}_{\vec{r'}}$$

$$\vec{P} = \vec{O'} + \underbrace{\sum_i \vec{e'}_i x'_i}_{\vec{r''}} = \vec{O} + \underbrace{\sum_i \vec{e}_i x_i}_{\vec{r}}$$

Damit erhalten wir $\vec{r}, \vec{r'}$ und $\vec{r''}$

$$\vec{r} = \vec{P} - \vec{O} = \sum_i \vec{e}_i x_i \tag{5.44}$$

$$\vec{r'} = \vec{P'} - \vec{O} = \sum_i \vec{e}_i x'_i \tag{5.45}$$

$$\vec{r''} = \vec{P} - \vec{O'} = \sum_i \vec{e'}_i x'_i \tag{5.46}$$

Anschließend bestimmen wir x'_i, die Komponenten von $\vec{r''}$ im Bezugssystem B'. Zunächst folgen wir der Abbildung:

$$\vec{r''} = \vec{P} - \vec{O'} = \left(\vec{P} - \vec{O}\right) - \left(\vec{O'} - \vec{O}\right) = \vec{r} - \vec{a} \tag{5.47}$$

Nun bestimmen wir den transformierten Vektor $\vec{r'}$.

$$\vec{r'} \stackrel{Gl.\ 5.45}{=} \sum_i \vec{e}_i x'_i \stackrel{Gl.\ 5.4}{=} \sum_i \vec{e}_i \left(\vec{e'}_i \vec{r''}\right) \stackrel{Gl.\ 5.19}{=} \left(\sum_i \vec{e}_i \otimes \vec{e'}_i\right) \vec{r''}$$
$$\stackrel{Gl.\ 5.47}{=} \left(\sum_i \vec{e}_i \otimes \vec{e'}_i\right) (\vec{r} - \vec{a}) \stackrel{Gl.\ 5.38}{=} \boldsymbol{U}^\top (\vec{r} - \vec{a}) = \boldsymbol{U}^{-1} (\vec{r} - \vec{a})$$

Damit erhalten wir

AKTIVE TRANSFORMATION

Das Abbild eines Objekts bei $\vec{P} = \vec{\mathcal{O}} + \vec{r}$, dessen Koordinaten unverändert aus dem Bezugssystem $\vec{e'}_i, \vec{\mathcal{O}'}$ in das Bezugssystem $\vec{e}_i, \vec{\mathcal{O}}$ übertragen wurden, liegt bei $\vec{P'} = \vec{\mathcal{O}} + \vec{r'}$ mit

$$\vec{r'} = \boldsymbol{U}^{-1} (\vec{r} - \vec{a}) \tag{5.48}$$

wobei $\boldsymbol{U} = \sum_i \vec{e'}_i \otimes \vec{e}_i$ und $\vec{a} = \vec{\mathcal{O}'} - \vec{\mathcal{O}}$

Beachte die Analogie dieser Transformation zu den Transformationsgleichungen Gln. 5.41, 5.42 für die Komponenten bei der passiven Transformation.

5.9 Bewegte Bezugssysteme

Nun betrachten wir bewegte Bezugssysteme

$$\vec{e'}(t) = \boldsymbol{U}(t)\vec{e}_i$$
$$\vec{\mathcal{O}'}(t) = \vec{\mathcal{O}} + \vec{a}(t)$$

wobei die ungestrichenen Variablen zum unbewegten Bezugssystem gehören. Wir lassen die Zeit dabei untransformiert. Eine konstante Zeitverschiebung ist trivial zu berücksichtigen.

Wie in Gl. 5.48 beschrieben, erscheint die Bahn $\vec{r}(t)$ einem bewegten Beobachter wie für uns die Bahn

$$\vec{r'}(t) = \boldsymbol{U}^{-1}(t) \left(\vec{r}(t) - \vec{a}(t)\right)$$

Vorsicht ist bei der Transformation von Ableitungen der Bahn geboten, weil bei den Zeitableitungen immer auch die Zeitableitung der Transformation hineinspielt. Betrachten wir als Beispiel dafür die Geschwindigkeit im Bezugssytem B'

$$\vec{v'} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vec{r'}}{dt} = \left[\frac{d}{dt}\boldsymbol{U}^{-1}\right] [\vec{r}(t) - a(t)] + \boldsymbol{U}^{-1} \left[\frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d\vec{a}}{dt}\right] \neq \boldsymbol{U}^{-1} \frac{d\vec{r}}{dt} = \boldsymbol{U}^{-1}\vec{v}$$

Die Frage, ob dieselben Bewegungsgleichungen in zwei relativ zueinander bewegten Bezugssystemen gelten, ist also nicht trivial.

Wir betrachten zunächst, wie sich die Newtonschen Bewegungsgleichungen transformieren. Wir gehen davon aus, dass die Newtonschen Bewegungsgleichungen im ruhenden Bezugssystem erfüllt sind:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, t)$$

Wir transformieren die Vektoren gemäss Gl. 5.48

$$\vec{r} = \boldsymbol{U}\vec{r'} + \vec{a}$$
$$\vec{F}(\vec{r}) = \boldsymbol{U}\vec{F'}(\vec{r'})$$

Durch Einsetzen in die Newtonsche Bewegungsgleichung erhalten wir die transformierte Bewegungsgleichung

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{a}(t)+\boldsymbol{U}(t)\vec{r}'(t)\right) &= \boldsymbol{U}(t)\vec{F}' \\
m\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{a}}(t)+\dot{\boldsymbol{U}}(t)\vec{r}'(t)+\boldsymbol{U}(t)\dot{\vec{r}}'(t)\right) &= \boldsymbol{U}(t)\vec{F}' \\
m\left(\ddot{\vec{a}}(t)+\ddot{\boldsymbol{U}}(t)\vec{r}'(t)+2\dot{\boldsymbol{U}}(t)\dot{\vec{r}}'(t)+\boldsymbol{U}(t)\ddot{\vec{r}}'(t)\right) &= \boldsymbol{U}(t)\vec{F}' \\
m\left(\boldsymbol{U}^\top\ddot{\vec{a}}(t)+\boldsymbol{U}^\top\ddot{\boldsymbol{U}}(t)\vec{r}'(t)+2\boldsymbol{U}^\top\dot{\boldsymbol{U}}(t)\dot{\vec{r}}'(t)+\ddot{\vec{r}}'(t)\right) &= \vec{F}'
\end{aligned}
$$

Wir erhalten also die Bewegungsgleichung

BEWEGUNGSGLEICHUNG IN EINEM BESCHLEUNIGTEN BEZUGSSYSTEM UND SCHEINKRÄFTE

$$
m\ddot{\vec{r}}'(t)=\vec{F}'\underbrace{-m\boldsymbol{U}^\top\ddot{\vec{a}}(t)-m\boldsymbol{U}^\top\ddot{\boldsymbol{U}}(t)\vec{r}'(t)-2m\boldsymbol{U}^\top\dot{\boldsymbol{U}}(t)\dot{\vec{r}}'(t)}_{\text{Scheinkräfte}} \tag{5.49}
$$

Die Zusatzterme auf der rechten Seite sind sogenannte **Scheinkräfte**. Sie haben ihre Ursache in der Bewegung des Beobachters und nicht in einer physikalischen Wechselwirkung mit anderen Objekten.

5.9.1 Inertialsysteme

Wir sehen Anhand von Gl. 5.49 sofort, dass die Bewegungsgleichungen nur dann ihre Form bewahren, wenn $\boldsymbol{U}$ nicht und $\vec{a}$ nur linear von der Zeit abhängt. Alle Bezugssysteme in denen keine Scheinkräfte auftreten, heißen Inertialsysteme.

Definition 5.10 *INERTIALSYSTEME*
Inertialsysteme *sind unbeschleunigte Bezugssysteme. Ein kräftefreies Teilchen bewegt sich in einem Inertialsystem geradlinig und gleichförmig.*

Die Bedeutung von Inertialsystemen liegt darin, dass in ihnen die Newtonschen Gesetze gelten. Inertialsysteme sind über die Galileitransformationen miteinander verknüpft.

Die obige Definition steht wegen dem Begriff eines kräftefreien Teilchens auf schwachen Beinen. Betrachtet ein Beobachter die Bahn eines Teilchens, dann wird er diese Krümmung durch eine Kraft erklären. Damit würde sich jeder Beobachter zu einem Inertialsystem erklären, weil er nur solche Bahnen als kräftefrei erklärt, deren Bahn geradlinig und gleichförmig ist.

Diese Doppeldeutigkeit hat bei der Einführung der Allgemeinen Relativitätstheorie eine Rolle gespielt. Betrachten wir einen unbeschleunigten Beobachter der ein konstantes Gravitationsfeld erfährt. Ohne von einer Gravitationskraft zu wissen, müsste er annehmen, dass er sich selber beschleunigt. Er sieht nur, dass sich Bälle, die er loslässt, in eine bestimmte Richtung beschleunigen. Dies ist genau, was ein beschleunigter Beobachter in Abwesenheit von Gravitationskräften beobachten würde. Tatsächlich wird die Gravitationskraft in der Allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein durch eine Krümmung des Raum-Zeit Kontinuums erklärt. In dieser Beschreibung wäre der geradlinig-gleichförmig bewegte Beobacher in der Tat beschleunigt. Das klingt an dieser Stelle sicherlich nicht sehr überzeugend. Deshalb ist die Relativitätstheorie so spannend.

5.9.2 Gleichförmig beschleunigte Bezugssysteme

Es ist nicht immer vernünftig, alles von einem Inertialsystem aus zu betrachten. Betrachten wir zum Beispiel die Ereignisse in einem Lift, der Fahrt aufnimmt, so würde man natürlicherweise ein Bezugssystem wählen, das sich mit dem Lift mitbewegt und damit beschleunigt. Unsere Erfahrung legt uns in diesem Fall nahe, den beschleunigten Beobachter als das Zentrum der Beschreibung anzusehen. Dies ist durchaus möglich, führt aber zu komplexeren Bewegungsgleichungen. Diese sind der Gegenstand dieses Abschnitts.

Gemäss Gl. 5.49 gilt für die Kräfte in einem gleichförmig beschleunigten Bezugssystem

$$m\ddot{\vec{r}}'(t) = \vec{F}' - m\boldsymbol{U}^\top \ddot{\vec{a}}(t) \tag{5.50}$$

Der Term $\boldsymbol{U}^\top$ in der obigen Gleichung spielt nur eine Rolle, wenn die Transformation auch noch eine Drehung beinhaltet. Wenn wir ihn außer Acht lassen, erhalten wir eine Scheinkraft $-m\ddot{\vec{a}}$, welche sich nicht von einer Gravitationskraft[13] $-mg\vec{e}_z$ unterscheidet, wenn man $g\vec{e}_z = \ddot{\vec{a}}$ gleich setzt.

SCHEINKRAFT UND GRAVITATION

Die Scheinkraft in einem gleichförmig beschleunigten Bezugssystem hat genau die Form einer konstanten Gravitationskraft. Beide sind proportional zur Masse und wirken auf alle Teilchen. Es ist für einen Beobachter unmöglich zu unterscheiden, ob er eine Gravitationskraft oder einer Beschleunigung erfährt.

Dieser Gedanke war wesentlich für die Entwicklung der Allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein. In ihr wird die Gravitationskraft auf eine Verzerrung des Raum-Zeit Kontinuums zurückgeführt.

5.10 Rotierendes Bezugssystem

Das rotierende Bezugssystem ist für uns von Bedeutung, weil die Erde sich ständig um ihre Achse dreht. Deshalb rotiert ein Bezugssystem, das sich bezüglich der Erdoberfläche ausrichtet.

5.10.1 Gleichförmige Rotation und Winkelgeschwindigkeit

Betrachte ein Teilchen, das um eine Achse rotiert, die durch den Ursprung geht. Die Positionen $\vec{r}(t)$ können durch eine zeitabhängige Drehmatrix $\boldsymbol{U}(t)$ dargestellt werden.

$$\vec{r}(t) = \boldsymbol{U}(t)\vec{r}(0)$$

Die Geschwindigkeit ist deshalb

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\boldsymbol{U}}(t)\vec{r}(0)$$

Aus der Bedingung, dass die Drehmatrix $\boldsymbol{U}(t)$ unitär ist, können wir die allgemeine Form von $\dot{\boldsymbol{U}}(t)$ ableiten.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\top &= \boldsymbol{1} \\
\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\top\right) &= \dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}^\top + \boldsymbol{U}\dot{\boldsymbol{U}}^\top = \boldsymbol{0} \\
\Rightarrow \dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}^\top &= -\boldsymbol{U}\dot{\boldsymbol{U}}^\top \overset{(\boldsymbol{AB})^\top = \boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top}{=} -\left(\dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}^\top\right)^\top
\end{aligned}$$

[13] Die Gravitationskraft auf der Erdoberfläche hat die Form $F = -mg\vec{e}_z$, wobei $g = 9.80665\frac{m}{s^2}$ die Fallbeschleunigung ist[6], m die Masse, auf welche die Kraft wirkt, und $\vec{e}_z$ der Einheitsvektor, der vom Erdmittelpunkt weg zeigt. Für große Distanzen hat die Gravitationskraft die Form $\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, wobei m_1 und m_2 die sich anziehenden Massen und r der Abstand der Massenzentren sind. Dabei hat die Gravitationskonstante den Wert $G = 6.67259 \cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kgs^2}$ hat[6]. Die erste Formel erhält man aus der zweiten, indem man für die Masse $m_1 = m$ und für m_2 die Erdmasse einsetzt und für r den Erdradius.

Das bedeutet, dass

$$\boldsymbol{A} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}^\top \tag{5.51}$$

antisymmetrisch ist. Eine Matrix $\boldsymbol{A}$ heißt **antisymmetrisch**, wenn $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^\top$, bzw. $A_{i,j} = -A_{j,i}$.

Formal liefert uns die Definitionsgleichung von $\boldsymbol{A}$ eine Differentialgleichung für die Drehmatrix $\boldsymbol{U}$. Dazu multiplizieren wir Gl. 5.51 von Rechts mit $\boldsymbol{U}$ und verwenden die Unitarität der Drehmatrix.

$$\dot{\boldsymbol{U}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{U}(t) \tag{5.52}$$

Die Matrix $\boldsymbol{A}$ spielt eine besondere Rolle, da sie uns die Geschwindigkeit des rotierenden Vektors liefert.

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\boldsymbol{U}}(t)\vec{r}(0) = \dot{\boldsymbol{U}}(t)\underbrace{\boldsymbol{U}^\top(t)\boldsymbol{U}(t)}_{\mathbf{1}}\vec{r}(0) = \dot{\boldsymbol{U}}(t)\boldsymbol{U}^\top(t)\vec{r}(t) \stackrel{Gl.\ 5.51}{=} \boldsymbol{A}(t)\vec{r}(t)$$

Eine antisymmetrische Matrix wie $\boldsymbol{A} = \dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}^\top$ hat in drei Dimensionen 3 freie Parameter, die wir mit $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ bezeichnen.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Um die Bedeutung von $\boldsymbol{A}$ zu verstehen, untersuche wir die Wirkung dieser Transformation auf einen beliebigen Vektor $\vec{b}$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\vec{b} &\widehat{=} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_3 b_2 + \omega_2 b_3 \\ \omega_3 b_1 - \omega_1 b_3 \\ -\omega_2 b_1 + \omega_1 b_2 \end{pmatrix} \\ &\widehat{=} \vec{\omega} \times \vec{b} \\ \Rightarrow \dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}^\top\vec{b} &\stackrel{Gl.\ 5.51}{=} \boldsymbol{A}b = \vec{\omega} \times \vec{b} \end{aligned} \tag{5.53}$$

wobei der Vektor $\vec{\omega}$ die Komponenten $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ hat. Wir können also die Wirkung jeder antisymmetrischen Matrix $\boldsymbol{A}$ auf einen Vektor durch ein **Kreuzprodukt**[14] ausdrücken.

Die obige Gleichung erlaubt es die antisymmetrische Matrix $\boldsymbol{A}$ durch den Vektor $\vec{\omega}$ auszudrücken.

$$\boldsymbol{A} = \vec{\omega} \times \mathbf{1} \tag{5.54}$$

Setzen wir das Resultat Gl. 5.53 in den Ausdruck für die Geschwindigkeit ein, dann erhalten wir

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\boldsymbol{U}}(t)\vec{r}(0) = \dot{\boldsymbol{U}}(t)\underbrace{\boldsymbol{U}^\top(t)\boldsymbol{U}(t)}_{=\mathbf{1}}\vec{r}(0) = \underbrace{\boldsymbol{A}}_{\dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}^\top}\underbrace{\vec{r}(t)}_{\boldsymbol{U}\vec{r}(0)} = \vec{\omega} \times \vec{r}(t)$$

[14] Das Kreuzprodukt hat in Komponentenschreibweise die Form

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_z \end{pmatrix}$$

Das Kreuzprodukt steht senkrecht auf den beiden Vektoren, aus denen es gebildet wird. Die Richtung bestimmt man, indem man den Daumen der rechten Hand in Richtung des ersten Vektors, den Zeigefinger in Richtung des zweiten Vektors ausrichtet. Der abgestreckte Mittelfinger zeigt dann in Richtung des Kreuzprodukts. Der Betrag des Kreuzprodukts ist

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin(\phi)$$

, wobei ϕ der von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eingeschlossener Winkel ist. Der Betrag ist identisch mit der Fläche eines Parallelogramms, das von den zwei Vektoren aufgespannt wird.

Definition 5.11 *WINKELGESCHWINDIGKEIT*
Die Rotationsbewegung eines Vektors ist mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ wie folgt verknüpft:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{5.55}$$

- *Die Richtung der Winkelgeschwindigkeit ist parallel zur Drehachse.*
- *Die Orientierung der Winkelgeschwindigkeit ergibt sich aus der Rechten-Hand Regel. (siehe Abb. 5.12)*
- *Der Betrag ist die Winkeländerung pro Zeit.*

Den Vektor $\vec{\omega}$ nennen wir **Winkelgeschwindigkeit**. Die Richtung von $\vec{\omega}$ gibt die Drehachse an und der Betrag den Winkel, um den sich das System pro Zeiteinheit dreht.

Dabei ist der Drehsinn entsprechend der **Rechte-Hand Regel** definiert: Sind die Finger der rechten Hand so gekrümmt, dass sie in Richtung der Drehung zeigen, dann zeigt der Daumen entlang der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$.

Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ ist kein Vektor im eigentlichen Sinne, sondern ein sogenannter **Pseudovektor**[5]. Pseudovektoren, die auch **axiale Vektoren** genannt werden, stellen einen Drehsinn dar. Pseudovektoren unterscheiden sich in ihrem Verhalten unter einer Spiegelung von normalen Vektoren. Dies ist in Abb. 5.4 auf S. 95 dargestellt. Während reguläre, sogenannte **polare, Vektoren**, ihre Orientierung bei einer Rauminversion umkehren, so bleibt diese bei Pseudovektoren unverändert. Da jede Spiegelung im dreidimensionalen Raum aus einer Rauminversion und einer Drehung zusammengesetzt werden kann, bedeutet dies, dass bei jeder Spiegelung eines Pseudovektors im Vergleich zu einem normalen Vektor ein Vorzeichenwechsel auftritt.

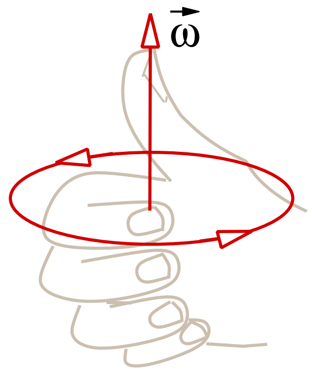


Abb. 5.12: Rechte-Hand Regel für die Winkelgeschwindigkeit einer Rotation.

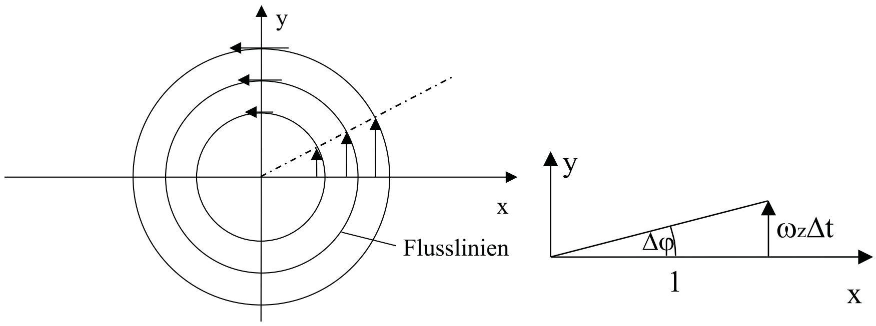


Abb. 5.13: Vektorfeld $\dot{\vec{r}}(\vec{r})$ einer Rotation (links)

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass der Betrag von $\vec{\omega}$ gerade der Änderung des Winkels pro Zeiteinheit entspricht. [15] Dazu ist Abb. 5.13 hilfreich. Wegen

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

[15]Im Anhang C wird eine Drehung durch einen Dreh-vektor dargestellt. Die Winkelgeschwindigkeit ist die Zeitableitung dieses Dreh-vektors

steht die Geschwindigkeit senkrecht auf der Winkelgeschwindigkeit, also der Rotationsachse, und senkrecht auf dem Positionsvektor. Der Einfachheit halber zerlegen wir $\vec{r}(t) = \vec{r}_{ax}(t) + \vec{r}_{rad}(t)$ in einen axialen Anteil $\vec{r}_{ax}$, der parallel zur Winkelgeschwindigkeit zeigt und einen radialen Anteil $\vec{r}_{rad}$, der senkrecht dazu steht. Zeigt die Winkelgeschwindigkeit in Richtung der z-Achse, dann ist die axiale Komponente gerade die z-Komponente von $\vec{r}(t)$ und die radiale Komponente wird durch die x und y-Komponenten des Vektors $\vec{r}(t)$ beschrieben. Weil das Kreuzprodukt von zwei parallelen Vektoren verschwindet, können wir uns auf den radialen Anteil beschränken.

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{ax}}_{=0} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{rad}$$

Betrachten wir nun die Ebene senkrecht zur Rotationsachse, die von $\vec{r}_{rad}$ und $\dot{\vec{r}}$ aufgespannt wird. In dieser Ebene spannen $\vec{r}_{rad}(t)$ und $\vec{r}_{rad}(t) + \Delta t\dot{\vec{r}}$ ein rechtwinkliges Dreieck auf. Das Verhältnis von Gegenkathete $|\Delta t\dot{\vec{r}}|$ und Ankathete $|\vec{r}_{rad}(t)|$ ist der Tangens des eingeschlossenen Winkels $\Delta\varphi$

$$\begin{aligned} \tan(\Delta\varphi) &= \frac{|\Delta t\dot{\vec{r}}|}{|\vec{r}_{rad}|} = \Delta t\frac{|\vec{\omega} \times \vec{r}_{rad}|}{|\vec{r}_{rad}|} \overset{\vec{\omega}\perp\vec{r}_{rad}}{=} \Delta t\frac{|\vec{\omega}||\vec{r}_{rad}|}{|\vec{r}_{rad}|} = \Delta t|\vec{\omega}| \\ \Rightarrow |\omega| &= \frac{\tan(\Delta\varphi)}{\Delta t} \overset{\Delta\phi\to 0}{=} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \overset{\Delta t\to 0}{=} \dot{\varphi} \end{aligned}$$

Wir erhalten also das gesuchte Resultat, dass der Betrag der Winkelgeschwindigkeit gerade der Zeitableitung des Drehwinkels ist.

Kreuzprodukt und Levi-Civita-Symbol

In Komponentenschreibweise lässt sich das Resultat Gl. 5.55, $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, welches die Bewegung der Punkte bei einer gleichförmigen Rotation beschreibt, elegant mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols[16] als

$$\dot{r}_i(t) = \sum_{j,k} \epsilon_{i,j,k}\omega_j r_k(t)$$

ausdrücken.

Das **Levi-Civita-Symbol** ϵ_{ijk} ist in Anhang D.5.8 beschrieben. Das Levi-Civita-Symbol wird auch der **vollständig antisymmetrische Tensor** genannt, da er unter Vertauschung von zwei beliebigen Indizes sein Vorzeichen ändert. Für zyklische Indizes ist sein Wert $+1$, d.h. $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$. Für antizyklische Indizes ist der Wert -1, d.h. $\epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1$. Alle anderen Indexsätze besitzen zwei gleiche Indizes, sodass der Wert des Levi-Civita-Symbols verschwindet.

5.10.2 Rotierendes Bezugsssystem

Wir gehen nun davon aus, dass sich die Koordinatenachsen des Beobachters B' mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ zu denen des Beobachters B, der ein Inertialsystem darstellt, rotieren.

$$\vec{e'}_i(t) = \boldsymbol{U}(t)\vec{e}_i$$

Damit sind die Punkte, wie sie im rotierenden Bezugssystem wahrgenommen werden, gemäss Gl. 5.48

$$\vec{r'}(t) = \boldsymbol{U}^\top(t)\vec{r}(t) \tag{5.56}$$

[16] Generell gilt die Identität

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \qquad \Leftrightarrow \qquad c_i = \sum_{j,k} \epsilon_{i,j,k} a_i b_j$$

Die transformierte Newtonsche Bewegungsgleichung Gl. 5.49 hat im Fall $\vec{a} = 0$ die Form

$$m\ddot{\vec{r}}'(t) = \vec{F}'(t) - m\boldsymbol{U}^\top(t)\ddot{\boldsymbol{U}}(t)\vec{r}'(t) - 2m\boldsymbol{U}^\top(t)\dot{\boldsymbol{U}}(t)\dot{\vec{r}}'(t) \tag{5.57}$$

Wir verwenden wieder die antisymmetrische Matrix $\boldsymbol{A}$, wie sie in Gl. 5.51 definiert wurde. Wir definieren zusätzlich $\boldsymbol{A}'$ als die analog zu Gl. 5.56 in das beschleunigte Bezugssystem transformierte Matrix $\boldsymbol{A}$ sowie die transformierte Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}'$

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{U} \tag{5.58}$$

$$\vec{\omega}' = \boldsymbol{U}^\top \vec{\omega} \tag{5.59}$$

Beachte, dass auch $\boldsymbol{A}'$, genau wie $\boldsymbol{A}$ antisymmetrisch ist [17]. Bei einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und damit einer zeitunabhängigen Matrix $\boldsymbol{A}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{U}} &\overset{Gl.\ 5.52}{=} \boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \underbrace{\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\top}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} \overset{Gl.\ 5.58}{=} \boldsymbol{U}\boldsymbol{A}' \\
\ddot{\boldsymbol{U}} &= \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \underbrace{\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\top}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{A}\underbrace{\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\top}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{A}'^2
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung, Gl. 5.57, erhalten wir

$$m\ddot{\vec{r}}'(t) = \vec{F}' - m\boldsymbol{A}'^2\vec{r}'(t) - 2m\boldsymbol{A}'\dot{\vec{r}}'(t) \tag{5.60}$$

Schließlich wollen wir $\boldsymbol{A}'$ durch die Winkelgeschwindigkeit ersetzen.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}'\vec{r}' &= (\boldsymbol{U}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{U})(\boldsymbol{U}^\top\vec{r}) = \boldsymbol{U}^\top[\boldsymbol{A}\vec{r}] \overset{Gl.\ 5.53}{=} \boldsymbol{U}^\top[\vec{\omega}\times\vec{r}] = \left(\boldsymbol{U}^\top\vec{\omega}\right)\times\left(\boldsymbol{U}^\top\vec{r}\right) \\
&= \vec{\omega}'\times\vec{r}'
\end{aligned} \tag{5.61}$$

Das Absorbieren der Matrix $\boldsymbol{U}^\top$ in das Kreuzprodukt basiert auf der geometrischen Interpretation des Kreuzprodukts, was uns den Schluss erlaubt, dass das gedrehte Kreuzprodukt mit dem Kreuzprodukt der gedrehten Vektoren identisch ist. Beachte aber, dass dies nur mit Drehungen möglich ist. Bei Spiegelungen würde das Vorzeichen wechseln. Die obige Gleichung Gl. 5.61 gilt nicht nur für $\vec{r}'$ sondern für jeden beliebigen Vektor.

Mit Hilfe von Gl. 5.61 bringen wir Gl. 5.60 auf die Form

BEWEGUNGSGLEICHUNG IN EINEM GLEICHFÖRMIG ROTIERENDEN BEZUGSSYSTEM

$$m\ddot{\vec{r}}'(t) = \vec{F}' \underbrace{-m\vec{\omega}'\times\left(\vec{\omega}'\times\vec{r}'(t)\right)}_{\text{Zentrifugalkraft}} \underbrace{-2m\vec{\omega}'\times\dot{\vec{r}}'(t)}_{Corioliskraft} \tag{5.62}$$

Die Scheinkräfte auf der rechten Seite werden **Corioliskraft**[18] und **Zentrifugalkraft** genannt.

[17] Ist $\boldsymbol{A}$ antisymmetrisch, dann ist auch $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{U}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$ antisymmetrisch.

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{U}^\top(\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}) = \left[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{U})^\top\boldsymbol{U}\right]^\top = \left[(\boldsymbol{U}^\top\boldsymbol{A}^\top)\boldsymbol{U}\right]^\top = -\left[\boldsymbol{U}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\right]^\top = -\boldsymbol{A}'^\top$$

q.e.d.

[18] Gaspard Gustave de Coriolis (1792-1843 Paris.) französischer Mathematiker und Physiker. Tutor an der Ecole Polytechnique in Paris. Forschte u.a. an Drallbewegungen (z.B.Billardkugeln). Neben der nach ihm benannten Scheinkraft gab er die ersten exakten Definitionen von kinetischer Energie und mechanischer Arbeit an.

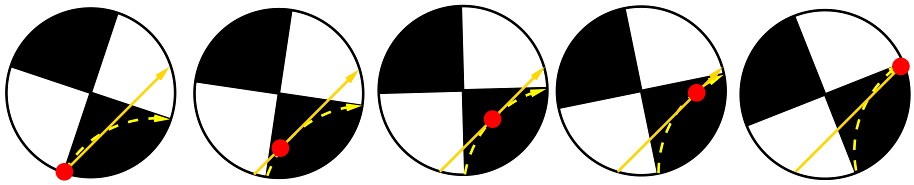


Abb. 5.14: Schematische Darstellung der Scheinkräfte bei gleichmässiger Rotation der Scheibe. Ein geradlinig bewegtes Teilchen vollführt für einen mit der Scheibe rotierenden Beobachter komplizierte Spiralbahnen (gestrichelte Linie), von denen nur ein Segment sichtbar ist.

CORIOLIS KRAFT

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$$

Die Corioliskraft ist geschwindigkeitsabhängig. Sie steht senkrecht auf der Geschwindigkeit. In Abwesenheit anderer Kräfte oder Scheinkräfte führen bewegte Teilchen in einem rotierenden Bezugssystem Kreisbahnen bzw. Spiralbahnen aus.

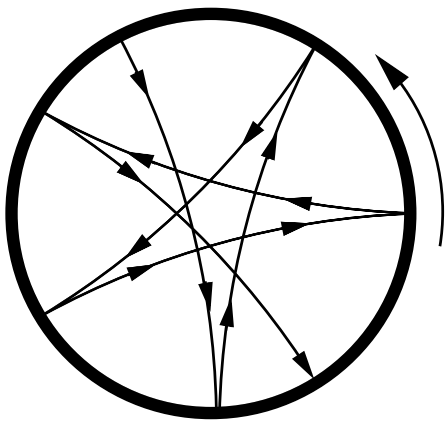
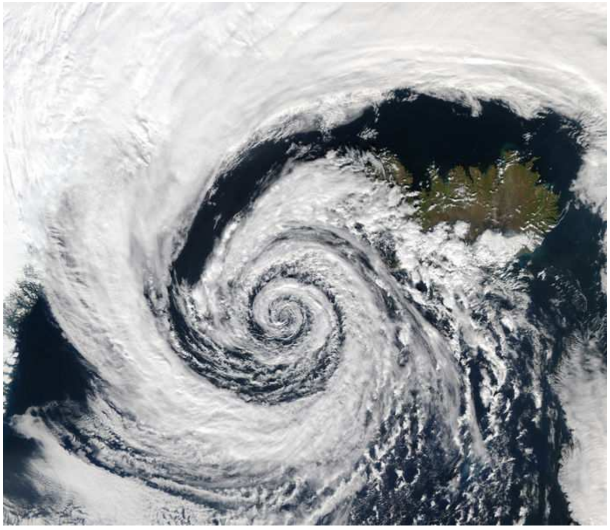


Abb. 5.15: Illustration der Corioliskraft. Es ist die Spur eines Balls auf einem rotierenden, runden Billardtisch gezeichnet. Diese Spur ist die Bahnkurve, wie sie einem mitrotierenden Beobachter erscheint. Der Ball bewegt sich in einem Inertialsystem stückweise geradlinig und gleichförmig, z.B. immer vertikal rauf und runter. Da sich der Tisch unter dem Ball wegdreht, erscheinen die Bahnen gekrümmt. Beachte, dass die Bahn immer nach rechts gekrümmt ist. Die Kraft ist also proportional zur Geschwindigkeit, wie man es für die Corioliskraft erwartet.

Abb. 5.16: Gustave de Coriolis, 1792-1843



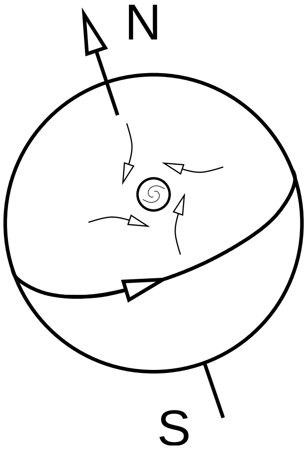


Abb. 5.17: Tiefdruckgebiet über Island. Um den Luftdruckunterschied auszugleichen werden Luftmassen in das Zentrum des Wirbels gezogen. Aufgrund der Corioliskraft drehen solche Wirbel auf der Nordhalbkugel im Gegenuhrzeigersinn und auf der Südhalbkugel im Uhrzeigersinn. (NASA)

ZENTRIFUGALKRAFT

$$\vec{F}_z = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Die Zentrifugalkraft zeigt immer radial von der Drehachse weg und ist proportional zum Abstand von der Drehachse, d.h.

$$|\vec{F}_z| = m\omega^2 r_{rad}$$

, wobei r_{rad} der Abstand von der Drehachse ist.

Die Zentrifugalkraft verhindert, dass Planeten in die Sonne stürzen.

Chapter 6

Erhaltungssätze (7h)

6.1 Noethertheorem

Das Noethertheorem[1] [7] ist wahrscheinlich eines der bedeutendsten Theoreme der Physik. Es erlaubt, aus Symmetrien des Wirkungsfunktionals in systematischer Weise Erhaltungssätze abzuleiten. Aus ihm folgen so fundamentale Sätze wie Energieerhaltung, Impulserhaltung, Drehimpulserhaltung und Ladungseerhaltung. Erhaltungssätze erlauben es, Eigenschaften, die weit in der Zukunft liegen, vorauszusagen. Da kompliziertere Bewegungsgleichungen im Allgemeinen chaotisch sind, und deshalb nicht beliebig weit in die Zukunft lösbar, ist dies ein deutlicher Vorteil. Aus diesem Grund fließt die Energieerhaltung als erster Hauptsatz in die Grundlage der Thermodynamik ein. Die Erhaltungssätze sind auch die Basis dafür, dass wir Energieformen wie kinetische und potentielle Energie ineinander umformen können. Wir werden in Kapitel 8 mit dem Hamilton Formalismus eine Formulierung der klassischen Mechanik kennenlernen, welche die Erhaltungsgrößen Energie und Impuls zusammen mit den Koordinaten als Grundlage der Beschreibung wählt.

Abb. 6.1: Emmy Noether, 1882-1935. Foto wahrscheinlich von 1907.

6.1.1 Aussage des Noethertheorems

Das Noethertheorem sagt, dass aus jeder kontinuierlichen Symmetrie eine Erhaltungsgröße folgt.

Aus der Kenntnis einer Symmetrie lässt sich eine Unbekannte im Pfad eliminieren. So wird die Dimension des Problems reduziert[2].

[1] Emmy Noether 1882-1935: Eigentlicher Vorname “Amalie”. Deutsche Mathematikerin. Tochter eines Erlanger Mathematikprofessors. Studium der Mathematik in Erlangen. (Das Hören der Vorlesungen war Frauen nur mit Ausnahmegenehmigung möglich.) Dissertation 1907. 1915 kam sie auf Einladung von Hilbert und Klein nach Göttingen, um an Fragen der Relativitätstheorie mitzuarbeiten. Ihr erster Habilitationsversuch scheiterte an der Habilitationsordnung, die Frauen ausschloss. Hilbert umging das Verbot, indem er ihr erlaubte, ihre Vorlesungen unter seinem Namen anzukündigen. Habilitation 1919, als nach dem Krieg die Habilitationsordnung geändert wurde. 1922 Professorin, noch ohne Gehalt, an der Universität Göttingen. Dennoch erhielt sie erst 1923 einen Lehrauftrag und damit ein kleines eigenes Einkommen. Emigrierte 1933 in die USA, weil Hitler Juden aus der Lehrtätigkeit ausschloss, und lehrte bis zu ihrem Tod am Bryn Mayr Womens College in den USA.

[2] Man beachte an dieser Stelle, dass mit der Dimension nicht nur die Dimension des betrachteten Vektors sondern die Anzahl der Unbekannten gemeint ist. So ist es nicht widersprüchlich, dass hier auch die Einführung und der Beweis (Kap. 6) mit einem eindimensionalen Vektor durchgeführt wird. Die Aussagen aus Kap. 6 sind auf mehrdimensionale Vektoren übertragbar.

NOETHERTHEOREM

Aus jeder kontinuierlichen Symmetrie folgt ein Erhaltungssatz und umgekehrt
Ist die Wirkung invariant bezüglich einer kontinuierlichen Schar von Transformationen, parameterisiert durch ε,

$$\begin{aligned} x_i' &= F_i(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t, \varepsilon) \\ t' &= G(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t, \varepsilon) \end{aligned} \tag{6.1}$$

wobei die Transformation für $\varepsilon = 0$ die Identität ist.

$$F_i(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t, \varepsilon = 0) = x_i \tag{6.2}$$

$$G(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t, \varepsilon = 0) = t \tag{6.3}$$

so ist die Größe

$$Q(\vec{x}, \vec{v}, t) = \sum_i \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}}_{p_i} \left.\frac{\partial F_i}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + \underbrace{\left[\mathcal{L} - \sum_i v_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}\right]}_{-E} \left.\frac{\partial G}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \tag{6.4}$$

mit $\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\vec{x}}$ eine Konstante der Bewegung. Es gilt also, dass

$$\frac{d}{dt} Q(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \equiv 0$$

entlang eines Pfades, der die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt.

6.1.2 Energie und Impuls

Die Größen, welche in die Erhaltungsgröße Q eingehen, definieren wir als **Energie** E und den kanonischen **Impuls** $\vec{p}$. Beachte, dass die Energie im Noethertheorem mit einem negativen Vorzeichen auftritt!

Definition 6.1 *KANONISCHER IMPULS*

$$p_i \stackrel{def}{=} \frac{\partial \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}, t)}{\partial v_i} \tag{6.5}$$

Bei der Auswertung wird die Geschwindigkeit entsprechend $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$ ersetzt.

Der kanonische Impuls ist zu unterscheiden vom **kinetischen Impuls**. Unter "Impuls" (ohne Spezifizierung) verstehen wir immer den kanonischen Impuls.

Definition 6.2 *KINETISCHER IMPULS*

$$\vec{p}_{kin} \stackrel{def}{=} m\vec{v}$$

Der kinetische Impuls ist der Impuls eines freien Teilchens.

Hat die Lagrangefunktion die Form $\mathcal{L}(x, v, t) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + V(\vec{r}, t)$, dann hat der kanonische Impuls die Form $\vec{p} = m\vec{v}$. In diesem Fall ist der kanonische Impuls identisch mit dem kinetischen Impuls.

Kinetischer und kanonischer Impuls sind allerdings nicht immer identisch: Zum Beispiel wird ein (nicht-relativistisches) Teilchen in einem elektromagnetischen Feld durch die Lagrangefunktion Gl. E.1 von S. 311, $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - q\Phi(\vec{r}, t) + q\vec{v}\vec{A}(\vec{r}, t)$ beschrieben, wobei q die elektrische Ladung ist, Φ das elektrische Potential und $\vec{A}$ das Vektorpotential[3]. Der entsprechende kanonische Impuls $\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}(\vec{r}, t)$ unterscheidet sich von dem kinetischen Impuls.

Definition 6.3 *ENERGIE*

$$E(\vec{x}, \vec{v}, t) \stackrel{def}{=} \sum_i p_i v_i - \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}, t) \tag{6.6}$$

Bei der Auswertung wird die Geschwindigkeit entsprechend $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$ ersetzt. Die kanonischen Impulse $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}$ sind Funktionen von $\vec{x}, \vec{v}, t$.

Mit diesen Definitionen nehmen die Erhaltungsgrößen die folgende Form an:

ALLGEMEINE FORM EINER ERHALTUNGSGRÖßE

Ist die Wirkung invariant unter einer kontinuierlichen Transformation, welche $\vec{x}$ in $\vec{x}'(\varepsilon)$ und t in $t'(\varepsilon)$ überführt, dann erhält die Größe

$$Q(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i p_i \left.\frac{\partial x_i'}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} - E \left.\frac{\partial t'}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \tag{6.7}$$

seinen Wert entlang einem Extremalpfad. Dabei sind die Impulse über Gl. 6.5 und die Energie über Gl. 6.6 definiert und anhand der Lagrangefunktion eindeutig bestimmt.

6.1.3 Mathematischer Einschub: Linienintegrale

Im Folgenden betrachten wir die Änderung der Wirkung für einen beliebigen Pfad $\vec{x}(t)$, wenn wir den transformierten Pfad $\vec{x}'(t)$ einsetzen und die Transformation mit Hilfe des Parameters ε variieren. Als Vorbereitung wollen wir uns die wichtigsten Eigenschaften dieser Linienintegrale ins Gedächtnis rufen.

Pfad als parametrische Schar von Punkten

Es ist nützlich, sich einen Pfad als eine kontinuierliche Schar von Raum-Zeitpunkten $\vec{x}(t) \widehat{=} (\vec{x}(s), t(s))$, also Ereignissen vorzustellen, die von einem beliebigen kontinuierlichen Parameter abhängen. Ein Pfad ist also eine Abbildung eines eindimensionalen kontinuierlichen Parameters s in einen mehrdimensionalen Raum, der bei uns von x und t aufgespannt wird.

Die Geschwindigkeit erhalten wir als

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= \lim_{\Delta\to 0} \frac{\vec{x}(s+\Delta) - \vec{x}(s)}{t(s+\Delta) - t(s)} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\vec{x}(s+\Delta) - \vec{x}(s)}{\Delta} \frac{\Delta}{t(s+\Delta) - t(s)} \\ &= \lim_{\Delta\to 0} \frac{\vec{x}(s+\Delta) - \vec{x}(s)}{\Delta} \left(\lim_{\Delta\to 0} \frac{t(s+\Delta) - t(s)}{\Delta} \right)^{-1} \\ &= \frac{d\vec{x}}{ds} \left(\frac{dt}{ds} \right)^{-1} \end{aligned} \tag{6.8}$$

[3]Die Potentiale bestimmen das elektrische Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ und das Magnetfeld $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Transformationen von Pfaden

Den transformierten Pfad $(\vec{x}'(s), t'(s))$ erhält man aus dem ursprünglichen Pfad $(x(s), t(s))$, indem man die einzelnen Punkte des Pfades transformiert. Wir erhalten also den transformierten Pfad in der Darstellung $(\vec{x}'(s), t'(s))$ wobei

$$\vec{x}'(s) \overset{Gl. 6.1}{=} \vec{F}\Big(\vec{x}(s), \underbrace{\frac{d\vec{x}}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\right)^{-1}}_{\dot{\vec{x}}(s)}, t(s), \varepsilon\Big) \tag{6.9}$$

$$t'(s) \overset{Gl. 6.1}{=} G\Big(\vec{x}(s), \underbrace{\frac{d\vec{x}}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\right)^{-1}}_{\dot{\vec{x}}(s)}, t(s), \varepsilon\Big) \tag{6.10}$$

Möchte man den tansformierten Pfad als $\vec{x}'(t')$ darstellen, bestimmt man aus der zweiten Gleichung, Gl. 6.10, die Funktion $t'(s)$. Anschließend bildet man deren die Umkehrfunktion $s(t')$. Diese setzt man in die erste Gleichung, Gl. 6.9 ein und erhält

$$\vec{x}'(t') \overset{\text{def}}{=} \vec{x}'(s(t'))$$

Linienintegrale

Ein Linienintegral wie die Wirkung kann wie folgt ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} S[\vec{x}(t)] &= \int_{\vec{x}_1, t_1}^{\vec{x}_2, t_2} dt\ \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \\ &= \int_{s_1}^{s_2} \underbrace{ds \frac{dt(s)}{ds}}_{dt}\ \mathcal{L}(\vec{x}(s), \frac{d\vec{x}}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\right)^{-1}, t(s)) \end{aligned} \tag{6.11}$$

wobei die Bedingungen $\vec{x}(s_1) = \vec{x}_1$, $t(s_1) = t_1$, $\vec{x}(s_2) = x_2$, $t(s_2) = t_2$ nun explizit angegeben werden müssen.

Es ist hilfreich, sich das Integral als Grenzübergang einer Summe vorzustellen

$$\begin{aligned} \int_{\vec{x}_1, t_1}^{\vec{x}_2, t_2} dt\ \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) &= \lim_{(t_{i+1}) - t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(t_{i+1} - t_i)}_{dt} \mathcal{L}(\vec{x}(t_i), \dot{\vec{x}}(t_i), t_i) \\ &= \lim_{(s_{i+1}) - s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(t(s_{i+1}) - t(s_i))}_{\frac{dt}{ds}(s_i)(s_{i+1} - s_i)} \mathcal{L}(\vec{x}(t(s_i)), \dot{\vec{x}}(t(s_i)), t(s_i)) \\ &= \lim_{(s_{i+1}) - s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(s_{i+1} - s_i)}_{ds} \frac{dt}{ds}(s_i)\ \mathcal{L}(\vec{x}(t(s_i)), \dot{\vec{x}}(t(s_i)), t(s_i)) \\ &= \int ds \frac{dt(s)}{ds}\ \mathcal{L}(\vec{x}(t(s)), \dot{\vec{x}}(t(s)), t(s)) \end{aligned}$$

6.1.4 Herleitung des Noethertheorems

Hier leiten wir das Noethertheorem ab. Der Beweis ist nicht ganz einfach, weshalb wir hier sehr konsequent vorgehen werden, und alle Annahmen und Ziele des Beweises nochmals exakt ausformulieren.

In der Ableitung beschränken wir uns auf eine Raumdimension, was die Notation vereinfacht. Dadurch wird der Beweis ein wenig übersichtlicher.

Beweisskizze

Ist die Wirkung unter einer Transformation invariant, dann geht ein Pfad, der die Wirkung extremal macht, in einen Pfad über, der die Wirkung wiederum extremal macht.

Wir beginnen mit einem physikalischen Pfad $(\vec{x}(s), t(s))$, der also die Wirkung $S[x(t)]$ extremal macht. Anschließend transformieren wir den Pfad mit der Symmetrietransformation und erhalten $(\vec{x}'(s), t'(s))$. Die Wirkung $S[\vec{x'}(t')]$ des transformierten Pfades ist aufgrund der Symmetrie identisch mit der des ursprünglichen Pfades. Also verschwindet die Ableitung der Wirkung nach dem Parameter ε. Es gilt also insbesondere

$$\left.\frac{dS}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

Die Ableitung der Wirkung nach ε entspricht der Änderung bei einer Variation des Pfades. Diese kann durch eine virtuelle Variation des Pfades (1) am Anfang des Pfades, (2) zwischen den Endpunkten und (2) am Ende des Pfades beschrieben werden. Die Variation zwischen den Endpunkten trägt nicht zur Änderung der Wirkung bei, weil die Variation bei festen Endpunkten aufgrund des Wirkungsprinzips verschwindet. Es bleiben also nur die Beiträge der Enden. Diese können als Differenz einer Größe Q geschrieben werden.

Wir werden also eine Beziehung der Art

$$\left.\frac{dS}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = Q(\vec{x}_2, \dot{\vec{x}}_2, t_2) - Q(\vec{x}_1, \dot{\vec{x}}_1, t_1)$$

erhalten. Zusammen mit der Invarianz der Wirkung bedeutet das, dass die Größe Q während der Bewegung unverändert bleibt.

Beweisvoraussetzungen:

- Es sei $S[\vec{x}(t)]$ ein Funktional des Pfades $(\vec{x}(s), t(s))$ welche invariant unter der Transformation

$$\begin{aligned}\vec{x}(s) \rightarrow \vec{x}'(s,\varepsilon) &= \vec{F}(\vec{x}(s), \frac{d\vec{x}}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\right)^{-1}, t(s), \varepsilon)\\ t(s) \rightarrow t'(s,\varepsilon) &= G(\vec{x}(s), \frac{d\vec{x}}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\right)^{-1}, t(s), \varepsilon)\end{aligned}$$

  ist.

- Die Symmetrietransformation erfüllt die Randbedingung

$$\vec{x}'(s, \varepsilon = 0) = \vec{x}(s) \qquad \text{und} \qquad t'(s, \varepsilon = 0) = t(s)$$

- Es sei darüber hinaus der Pfad $(\vec{x}'(s, \varepsilon = 0), t(s, \varepsilon = 0)$ ein Extremalpfad der Wirkung. Er erfüllt also die Euler-Lagrange-Gleichungen.

Beweisaussage:

Unter den angegebenen Voraussetzungen

- existiert eine Größe $Q(\vec{x}, \vec{v}, t)$, welche sich entlang des Pfades $(\vec{x}(s), t(s))$ nicht ändert.

- Diese Größe hat die Form $Q = -E\frac{dt'}{d\varepsilon} + \vec{p}\,\frac{d\vec{x}}{d\varepsilon}$

Beweis

$$S'(\varepsilon) = S[\vec{x'}(t')] \overset{Gl.\ 6.11}{=} \int_{s_1}^{s_2} ds\, \frac{dt'(s)}{ds} \mathcal{L}\Big(\vec{x'}(s), \underbrace{\frac{d\vec{x'}(s)}{ds} \left(\frac{dt'(s)}{ds}\right)^{-1}}_{\vec{v}'(s)}, t'(s)\Big)$$

$\vec{x}'(s)$ und $t'(s)$ sind durch die Gln. 6.9 und 6.10 definiert. Sie hängen also auch noch vom Parameter ε und dem untransformierten Pfad $(\vec{x}(s), t(s))$ ab.

Nun bilden wir die Ableitung der Wirkung nach ε. Im Folgenden bezeichnen wir einzelne Terme mit Buchstaben, um den Beweis übersichtlicher zu machen. Gleiche Buchstaben bezeichnen nicht mathematisch identische Terme, sondern sind visuelle Hilfen, die zu den enstprechenden Termen zu leiten.

$$\begin{aligned}
\frac{dS'(\varepsilon)}{d\varepsilon} &= \int_{s_1}^{s_2} ds \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{dt'}{ds}\right) \mathcal{L}\Big(\vec{x'}, \frac{d\vec{x'}}{ds}\left(\frac{dt'}{ds}\right)^{-1}, t'\Big) + \frac{dt'}{ds}\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}\Big(\vec{x'}, \frac{d\vec{x'}}{ds}\left(\frac{dt'}{ds}\right)^{-1}, t'\Big)\right\} \\
&= \int_{s_1}^{s_2} ds\, \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{dt'}{ds}\right) \mathcal{L}\Big(\vec{x'}, \frac{d\vec{x'}}{ds}\left(\frac{dt'}{ds}\right)^{-1}, t'\Big)}_{(A)} + \int_{s_1}^{s_2} ds\, \underbrace{\frac{dt'}{ds}\sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}\frac{dx_i'}{d\varepsilon}}_{(B)} \\
&\quad + \int_{s_1}^{s_2} ds\, \frac{dt'}{ds}\sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_i} \underbrace{\Big[\overbrace{\left(\frac{d}{d\varepsilon}\frac{dx_i'}{ds}\right)\left(\frac{dt'}{ds}\right)^{-1}}^{(C)} \overbrace{- \frac{dx_i'}{ds}\left(\frac{dt'}{ds}\right)^{-2}\frac{d}{d\varepsilon}\frac{dt'}{ds}}^{(D)}\Big]}_{\frac{d}{d\varepsilon}\left[\frac{dx_i'}{ds}\left(\frac{dt'}{ds}\right)^{-1}\right]} \\
&\quad + \int_{s_1}^{s_2} ds\, \overbrace{\frac{dt'}{ds}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\frac{dt'}{d\varepsilon}}^{(E)}
\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt bringen wir die ε-Ableitung direkt vor $\vec{x}'$ und t'. Hierzu können wir die ε-Ableitung und die s-Ableitung vertauschen, d.h.

$$\frac{d}{d\varepsilon}\frac{d\vec{x}'}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{d\vec{x}'}{d\varepsilon} \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{d\varepsilon}\frac{dt'}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{dt'}{d\varepsilon}$$

Zusätzlich werten wir den Ausdruck nun für $\varepsilon = 0$ aus. Dadurch können wir $\vec{x'}$ durch $\vec{x}$ und t' durch t ersetzen.

Wir erhalten also

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dS'(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} &= \int_{s_1}^{s_2} ds\ \underbrace{\left(\frac{d}{ds}\frac{\partial t'}{\partial \varepsilon}\right)\mathcal{L}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)}_{(A)} + \int_{s_1}^{s_2} ds\ \underbrace{\frac{dt}{ds}\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i'}{\partial \varepsilon}}_{(B)} \\
&+ \int_{s_1}^{s_2} ds\ \underbrace{\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}\left(\frac{d}{ds}\frac{dx_i'}{d\varepsilon}\right)}_{(C)} - \int_{s_1}^{s_2} ds\ \underbrace{\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}\frac{dx_i}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\right)^{-1}\frac{d}{ds}\frac{dt'}{d\varepsilon}}_{(D)} \\
&+ \int_{s_1}^{s_2} ds\ \underbrace{\frac{dt}{ds}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\frac{dt'}{d\varepsilon}}_{(E)} \\
&= \int_{s_1}^{s_2} ds\ \left[\underbrace{\mathcal{L}}_{(A)} - \underbrace{\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}\frac{dx_i}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\right)^{-1}}_{(D)}\right]\frac{d}{ds}\frac{dt'}{d\varepsilon} + \int_{s_1}^{s_2} ds\ \underbrace{\sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}\right]\frac{d}{ds}\frac{\partial x_i'}{\partial \varepsilon}}_{(C)} \\
&+ \int_{s_1}^{s_2} ds\ \underbrace{\frac{dt}{ds}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\frac{dt'}{d\varepsilon}}_{(E)} + \int_{s_1}^{s_2} ds\ \underbrace{\frac{dt}{ds}\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i'}{\partial \varepsilon}}_{(B)}
\end{aligned}
$$

Schließlich wälzen wir mit Hilfe von partiellen Integrationen (Siehe Anhang D.11.2) die s-Ableitung von $\partial \vec{x}'/\partial \varepsilon$ und $\partial \vec{x}'/\partial \varepsilon$ ab. Dabei verwenden wir die Definitionen von Energie, Gl. 6.6 und Impuls, Gl. 6.5.

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dS'(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = & \left[\overbrace{\left(\underbrace{\mathcal{L}}_{(A1)} - \underbrace{\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}\frac{dx_i}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\right)^{-1}}_{(D1)}\right)}^{-\text{Energie}} \frac{dt'}{d\varepsilon} + \underbrace{\sum_i \overbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}\right)}^{\text{Impuls}} \frac{\partial x_i'}{\partial \varepsilon}}_{(C1)}\right]_{s_1}^{s_2} \\
& - \int_{s_1}^{s_2} ds \left\{ \frac{dt'}{d\varepsilon}\frac{d}{ds}\left[\underbrace{\mathcal{L}}_{(A2)} - \underbrace{\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}\frac{dx_i}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\right)^{-1}}_{(D2)}\right] + \underbrace{\sum_i \frac{\partial x_i'}{\partial \varepsilon}\frac{d}{ds}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}\right]}_{(C2)} \right\} \\
& + \int_{s_1}^{s_2} ds \underbrace{\frac{dt}{ds}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\frac{dt'}{d\varepsilon}}_{(E)} + \int_{s_1}^{s_2} ds \underbrace{\frac{dt}{ds}\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i'}{\partial \varepsilon}}_{(B)} \\
= & \underbrace{\left[-E\frac{dt'}{d\varepsilon} + \vec{p}\frac{\partial \vec{x}'}{\partial \varepsilon}\right]_{s_1}^{s_2}}_{(A1),(D1),(C1)} \\
& - \int_{s_1}^{s_2} ds \, \frac{dt'}{d\varepsilon}\left\{ \frac{d}{ds}\left[\underbrace{\mathcal{L}}_{(A2)} - \underbrace{\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}\frac{dx_i}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\right)^{-1}}_{(D2)}\right] - \underbrace{\frac{dt}{ds}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}_{(E)} \right\} \\
& - \int_{s_1}^{s_2} ds \, \sum_i \frac{\partial x_i'}{\partial \varepsilon}\left\{ \underbrace{\frac{d}{ds}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}\right]}_{(C2)} - \underbrace{\frac{dt}{ds}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}}_{(B)} \right\}
\end{aligned}
$$

Nun formen wir die Terme $(A2), (D2), (E)$ wie folgt um:

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{ds}\left[\mathcal{L} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} v_i\right] - \frac{dt}{ds}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\
= & \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds} + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}\frac{dv_i}{ds} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\frac{dt}{ds} - \frac{d}{ds}\left(\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} v_i\right) - \frac{dt}{ds}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\
= & \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds} - \sum_i v_i \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}\right) \\
= & \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds} - \sum_i \frac{dx_i}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\right)^{-1}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}\right) \\
= & \sum_i \frac{dx_i}{ds}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}\right]
\end{aligned}
$$

Die Terme $(C2), (B)$ werden wie folgt umgeformt

$$
\frac{d}{ds}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} - \frac{dt}{ds}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} - \frac{dt}{ds}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{dt}{ds}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}\right]
$$

Beide Terme verschwinden, wenn der Pfad $x(s)$, $t(s)$ die Euler-Lagrange Gleichungen, $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0$ erfüllt.

Für einen physikalische Trajektorie, ein Pfad der das Wirkungsprinzip erfüllt, gilt also

$$\left.\frac{dS'(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left[-E\frac{dt'}{d\varepsilon} + \vec{p}\frac{\partial\vec{x}\,'}{\partial\varepsilon}\right]_{s_1}^{s_2} \overset{Gl.\ 6.7}{=} Q(s_2) - Q(s_1)$$

Hier haben wir die Definition der Größe Q aus Gl. 6.7 verwendet. Da die Wirkung unter einer Symmetrietransformation invariant ist, muss der obige Term $Q(s_2) - Q(s_1)$ verschwinden.

Nun zeigen wir, dass Q eine Invariante der Bewegung ist. Es gilt

$$0 = \partial_\varepsilon S[\vec{x}(t)] = \int dt\ \frac{dQ}{dt} = Q(t_2) - Q(t_1)$$

Nun gilt $Q(t_2) = Q(t_1)$ für alle Zeiten t_2, sodass wir auf dem physikalische Pfad, d.h. wenn $\vec{x}(t)$ die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt sind, die Gleichung

$$\frac{d}{dt}Q(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) = 0$$

erhalten *q.e.d.*

Nachdem wir das Noethertheorem bewiesen haben, ist es ein einfaches, eine ganze Reihe von Erhaltungssätzen aufzustellen. Wir werden dies anhand der wichtigsten Erhaltungssätze vorführen.

6.2 Homogenität der Zeit und Energieerhaltung

Wir nehmen an, dass die Bewegungsgleichungen translationsinvariant in der Zeit sind. In diesem Fall hängt die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit ab.

Die Zeittranslation Gl. 5.30 hat die Form (siehe auch Gl. 6.1)

$$\begin{aligned}
\vec{x'} &= \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t, \varepsilon) = \vec{x} \\
t' &= G(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t, \varepsilon) = t + \varepsilon \\
\Rightarrow Q &\overset{Gl.\ 6.7}{=} \vec{p}\ \underbrace{\frac{\partial\vec{r'}}{\partial\varepsilon}}_{=0} - E\ \underbrace{\frac{\partial t'}{\partial\varepsilon}}_{=1} = -E
\end{aligned}$$

ENERGIEERHALTUNGSSATZ

Ist die Wirkung invariant bezüglich Zeittranslation, dann ist Energie Gl. 6.6

$$E \overset{\text{def}}{=} \sum_i v_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_i} - \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}) = \vec{p}\,\vec{v} - \mathcal{L}$$

eine Erhaltungsgröße der Bewegung, d.h.

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

Dabei ist $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$ die Geschwindigkeit und $p_i = \partial\mathcal{L}/\partial v_i$ der kanonische Impuls.

Wir wollen diese Aussage des Noethertheorems nochmals zur Sicherheit überprüfen: Also sehen wir nach ob der obiger Ausdruck in der Tat eine Konstante der Bewegung ist. Dazu bilden wir die

Zeitableitung der Energie unter der Bedingung, dass die Lagrangefunktion zeitunabängig ist. Wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \sum_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} + \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \dot{x}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i \right) - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}_{=0} \\
&= \sum_i \dot{x}_i \underbrace{\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \right]}_{\text{ELG}} = 0
\end{aligned}
$$

welche, wie benötigt, Null ergibt.

Beispiel:

Aus einer Lagrangefunktion

$$
\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \tag{6.12}
$$

für N Teilchen erhalten wir den folgenden Ausdruck für die Energie:

$$
E = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\dot{\vec{r}}_i}_{v_i} \underbrace{m\dot{\vec{r}}_i}_{p_i} \underbrace{- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + V(\vec{r} \ldots)}_{-\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + V(\vec{r}, \ldots) \tag{6.13}
$$

In diesem Fall ist die Lagrangefunktion gerade kinetische Energie weniger potentieller Energie. Dieser Zusammenhang wird fälschlicherweise oft als allgemeingültig dargestellt. Er gilt aber nur für die angegebene Lagrangefunktion gilt.

6.2.1 Energie, Arbeit und Leistung

Das Wirkungsprinzip, wie es hier beschrieben wurde, erlaubt es nicht, dissipative Systeme zu beschreiben. Deshalb holen wir hier weiter aus und führen die Energieerhaltung auf die Newtonschen Bewegungsgleichungen zurück.

Wir betrachten wir die Bewegungsgleichungen für ein getriebenes System mit Reibung

$$
m_n \ddot{\vec{r}}_n = -\vec{\nabla}_n V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n) \underbrace{-\alpha_n \dot{\vec{r}}_n}_{\text{Dissipation}} \underbrace{+\vec{F}_{\text{ext},n}(t)}_{\text{externe Kraft}}
$$

Wir betrachten $\vec{F}_{\text{ext}}$ als externe Kraft, die auf das System einwirkt. α_n ist der Reibungskoeffizient für die Bewegung des n-ten Teilchens

In Abwesenheit der externen Kräfte und der Reibungsterme entsprächen diese Gleichungen gerade den Euler-Lagrange-Gleichungen zu der Lagrange function von Gl. 6.12. Die Energie hat deshalb die entsprechende Form von Gl. 6.13.

$$
E = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)
$$

Wir bestimmen nun die zeitliche Änderung der Energie.

$$\begin{aligned}
\dot{E} &= \sum_n \left[m\dot{\vec{r}}_n \ddot{\vec{r}}_n + \dot{\vec{r}}_n \vec{\nabla}_n V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \right] \\
&= \sum_n \dot{\vec{r}}_n \left[m\ddot{\vec{r}}_n + \vec{\nabla}_n V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \right] \\
&= \sum_n \dot{\vec{r}}_n \left[-\alpha_n \dot{\vec{r}}_n + \vec{F}_{\mathrm{ext},n} \right] \\
&= -\sum_n \alpha_n \dot{\vec{r}}_n^2 + \sum_n \dot{\vec{r}}_n \vec{F}_{\mathrm{ext},n}
\end{aligned}$$

Der erste Term ist die dissipierte Leistung. Sie beschreibt die Umwandlung der Energie in Wärme, der Reibungswärme. Der zweite Term beschreibt die Leistung, die durch die externe Kraft zugeführt wird.

Definition 6.4 *ARBEIT*
Die Änderung der Energie welche eine Kraft erzeugt, nennt man Arbeit

$$W = \Delta E = \int d\vec{r}\, \vec{F}(\vec{r}, t) \tag{6.14}$$

Die Arbeit ist das Bahnintegral der Kraft über den Pfad. Die Arbeit bezieht sich also immer auf einen Teil der Bahnkurve.
Die Einheit der Arbeit ist die der Energie, nämlich das Joule $1J = 1\frac{kgm^2}{s^2} = 1Nm$.

Definition 6.5 *LEISTUNG*
Die Arbeit, die pro Zeiteinheit durch eine Kraft verrichtet wird, nennt man Leistung

$$P = \frac{dE}{dt} = \dot{\vec{r}}\, \vec{F}(\vec{r}, t) \tag{6.15}$$

Die Leistung ist Kraft mal Geschwindigkeit.
Die Einheit der Leistung ist das Watt: $1W = 1\frac{kgm^2}{s^3} = 1N\frac{m}{s} = 1\frac{J}{s}$

Wir wollen hier noch den Begriff der **konservativen Kraft** einführen: Eine Kraft heißt konservativ, wenn die Arbeit, die sie verrichtet, nur von den Anfangs und Endpunkten der Bahnkurve, aber nicht von seinem Verlauf abhängt. Für eine konservative Kraft ist die verrichtete Arbeit $W(\vec{a}, \vec{b}) = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{r}\, \vec{F}(\vec{r})$ eine eindeutige Funktion der Anfangs und Endpunkte[4]. Wir können damit die **potentielle Energie** bzw. das **Potential** durch $V(\vec{r}) = V(\vec{0}) - \int_{\vec{0}}^{\vec{r}} d\vec{r'}\, \vec{F}(\vec{r'})$ definieren, sodass[5] $\vec{F} = -\vec{\nabla}\vec{V}$

Eine Kraft kann immer dann als Gradient eines Potentials dargestellt werden, wenn $\partial_i F_j = \partial_j F_i$. Dies bedeutet, dass die **Rotation** $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ des Kraftfeldes verschwindet. Man sagt, dass das Kraftfeld $\vec{F}(r)$ **wirbelfrei** ist.

[4] `Editor: hier sollte ein Verweis her`
[5] Der Beweis folgt aus der Eindeutigkeit der potentiellen Energie und

$$W(\vec{a}, \vec{b}) = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{r}\, \vec{F} = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{r}\, \vec{\nabla} V(\vec{r}) = -V(\vec{b}) + V(\vec{a})$$

6.3 Homogenität des Raums und Impulserhaltung

Wir betrachten eine Wirkung, die unter einer Raumtranslation in Richtung $\vec{e}$ invariant ist. Dabei ist $\vec{e}$ ein Einheitsvektor beliebiger Richtung. Die Raumtranslation hat die Form Gl. 5.29.

$$\begin{aligned}
\vec{x'} &= \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t, \varepsilon) = \vec{x} + \varepsilon\vec{e} \\
t' &= G(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t, \varepsilon) = t \\
\Rightarrow Q &\overset{Gl. 6.7}{=} \vec{p}\underbrace{\frac{\partial \vec{x'}}{\partial \varepsilon}}_{\vec{e}} - E\underbrace{\frac{\partial t'}{\partial \varepsilon}}_{=0} = \vec{p}\vec{e}
\end{aligned}$$

Für Translationsinvarianz in z-Richtung, d.h. $\vec{e} = \vec{e}_z = (0, 0, 1)$, folgt die Erhaltung der z-Komponente des Impulses, also $\dot{p}_z = 0$. Da $\dot{p}$ nach Newtons Gesetz die Kraft ist, folgt aus der Translationsinvarianz in z-Richtung, dass die entsprechende Kraftkomponente verschwindet.

Ist die Wirkung unvariant bezüglich der Translation in beliebige Richtungen, dann wir können nun den Einheitsvektor $\vec{e}$ in jede der drei Koordinachsen ausrichten, und erhalten jeweils die Bedingung, dass die entsprechende Impulskomponente eine Erhaltungsgröße ist. In diesem Fall gilt dann Impulserhaltung $\vec{p} = \vec{0}$ für den Impulsvektor als Ganzes.

Betrachten wir nun den typischen Fall eines System von N Masseteilchen mit einer Wirkung die translationsinvariant beüglich der gleichzeitigen Translation aller Teilchen in eine Raumrichtung $\vec{e}$

$$\vec{r'}_j = \vec{r}_j + \varepsilon\vec{e}$$

Dabei ist $\vec{r}_j$ der 3-dimensionale Positionsvektor des j-ten Teilchens, und $\vec{e}$ ist ein 3-dimensionaler Einheitsvektor. Wir können uns den Vektor $\vec{x}$ als 3N-dimensionalen Vektor vorstellen, dessen erste drei Komponenten die Koordinaten des ersten Teilchens, die nächsten drei Komponenten die Koordinaten des zweiten Teilchens, usw. enthalten. Wir können außerdem den Einheitsvektor verallgemeinern, sodass für die Komonenten jedes Teilchens, jeweils der dreidimensionale Einheitsvektor eingesetzt wird[6]. Entsprechend setzen wir den 3N-dimensionalen Impulsvektor aus den 3-dimensionalen Impulsvektoren der einzelnen Teilchen $\vec{p}_j$ zusammen. Wir erhalten damit die Erhaltungsgröße

$$Q = \sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j\vec{e} = \vec{P}\vec{e}$$

Dazu definieren wir

Definition 6.6 *GESAMTIMPULS*
Der Gesamtimpuls

$$\vec{P} \overset{def}{=} \sum_{n=1}^{N} \vec{p}_n \qquad bzw. \qquad P_i = \sum_{n=1}^{N} p_{n,i} \tag{6.16}$$

eines Systems von N Teilchen ist die Summe der Impulse seiner Teilchen

[6] Der zusammengesetzte Vektor ist dann nicht mehr normiert, sondern hat die Länge N.

IMPULSERHALTUNGSSATZ

Ist die Wirkung invariant bezüglich gleichzeitiger Raumtranslation aller Teilchen in jede beliebige Richtung, dann ist der Gesamtimpuls Gl. 6.16

$$P = \sum_{n=1}^{N} \vec{p}_n$$

eine Erhaltungsgröße der Bewegung, d.h.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$$

Wieder überprüfen wir ob das Resultat, dass der Gesamtimpuls bei Translationsinvarianz tatsächlich erhalten ist. Wir verwenden dabei die Symbole $\vec{v}_n = \dot{\vec{r}}_n$ für die Geschwindigkeit des n-ten Teilchens.

$$\dot{P}_i \stackrel{Gl.\ 6.16}{=} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{n,i}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{n,i}} \stackrel{\text{ELG}}{=} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_{n,i}} \stackrel{\text{Translationsinvarianz}}{=} 0$$

Beispiel:

Ein global translationsinvariantes System ist zum Beispiel ein Gasmolekül. Die Impulse der Atome, aus denen das Molekül zusammengesetzt ist, variieren, da die Verschiebung eines einzelnen Atoms die Lagrangefunktion ändert. Der Gesamtimpuls aller Atome des Moleküls bleibt aber erhalten. Da das System invariant bezüglich Verschiebung des ganzen Moleküls ist,

6.4 Isotropie des Raumes und Drehimpulserhaltung

Nun betrachten wir eine Wirkung die bezüglich einer Drehung um eine Achse invariant ist.

Wir betrachten nun die Drehung wie sie in Kapitel 5.10.1 auf Seite 115 beschrieben wurde. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass wir die Zeit durch den Parameter ε ersetzen. Führen wir die Ersetzung in Gl. 5.55 durch, erhalten wir analog zu zu Gl. 5.55, $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$,

$$\frac{d\vec{r'}}{d\varepsilon} = \frac{d\vec{\phi}}{d\varepsilon} \times \vec{r'}$$

Aus der Bedingung Gl. 6.2, (S.124), erhalten wir $\vec{r'}(\varepsilon = 0) = \vec{r}$ und damit

$$\vec{r'} = \vec{r} + \epsilon \left. \frac{d\vec{\phi}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \times \vec{r} + O(\varepsilon^2)$$
$$t' = t$$

Das Noethertheorem liefert[7] die zugehörige Erhaltungsgröße

$$Q \overset{Gl.\ 6.7}{=} \vec{p}\,\frac{d\vec{r}'}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} - E\underbrace{\frac{\partial t'}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}}_{=0} = \vec{p}\cdot\left(\frac{d\vec{\phi}}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\times\vec{r}\right) = \frac{d\vec{\phi}}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\cdot\underbrace{(\vec{r}\times\vec{p})}_{\vec{L}} \tag{6.17}$$

Wir definieren den **Drehimpuls**

Definition 6.7 *DREHIMPULS*

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} \tag{6.18}$$

Dabei ist $\vec{p}$ der kanonische Impuls. Der Drehimpuls hängt von der Position der Drehachse ab, wie man wie folgt sehen kann:

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{p} = \vec{r}\times\vec{p} - \vec{r}_0\times\vec{p} \neq \vec{r}\times\vec{p}$$

Geht die Drehachse nicht durch den Ursprung, dann muss Gl. 6.18 entsprechend angepasst werden.

Das Noethertheorem sagt also, dass ein Teilchen in einem kugelsymmetrischen Potential seinen Drehimpuls erhält. Beispiele sind

- die Planetenbahnen des Sonnensystems, bei dem sich die Planeten im Gravitationsfeld der Sonne bewegen,
- das Wasserstoffatom, bei dem sich ein Elektron im elektrostatischen Potential des Atomkerns bewegt
- und Teilchenstösse wie die Kollision von Billiardkugeln, oder die Streuung eines Leitungselektrons an einer Störstelle in einem Halbleiter

Hat ein Potential nur eine Zylindersymmetrie, das bedeutet eine Symmetrie um eine Achse, dann ist gemäss Gl. 6.17 nur die Projektion des Drehimpulses auf die Zylinderachse , d.h. $d\vec{\phi}d\varepsilon$, erhalten.

Zu beachten ist wiederum, dass der kanonische Drehimpuls und nicht der kinetische Impuls in den Drehimpuls eingeht. Das Beispiel, wo sich kanonischer und kinetischer Impuls unterscheiden, ist ein geladenes Teilchen im Magnetfeld, das durch die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\vec{r},\vec{v},t) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - q\Phi(r,t) + q\vec{v}\vec{A}(\vec{r},t)$$

beschrieben wird, wobei Φ das elektrostatische Potential und $\vec{A}$ das Vektorpotential ist. Der kanonische Impuls ist also $\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$ wodurch sich der Drehimpuls wie folge ergibt:

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times\left(m\vec{v}+q\vec{A}\right) = m\vec{r}\times\vec{v} + q\vec{r}\times\vec{A}$$

Analog zur Definition des Gesamtimpulses Gl. 6.16 definieren wir den Gesamtdrehimpuls eines Systems von N Teilchen als

[7] Das Spatprodukt $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ ist invariant bezüglich zyklischer Vertauschung der Vektoren, d.h.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

Bei Vertauschung von zwei Vektoren, was einer antizyklischen Vertauschung entspricht, wechselt das Spatprodukt sein Vorzeichen. Die Eigenschaft folgt direkt aus der Interpretation des Betrags des Spatprodukts als Volumen des Parallelepipeds, welches aus den drei Vektoren aufgespannt wird. Es kann leich aus den Eigenschaften des Levi-Civita-Symbols abgeleitet werden. Siehe auch Anhang D.3.4

Definition 6.8 *GESAMTDREHIMPULS*

$$\vec{L}_{tot} = \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times \vec{p}_j \tag{6.19}$$

DREHIMPULSERHALTUNGSSATZ

Ist die Wirkung invariant bezüglich gleichzeitiger Drehung aller Teilchen in jede beliebige Achse durch den Ursprung, dann ist der Gesamtdrehimpuls Gl. 6.16

$$\vec{L}_{tot} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times \vec{p}_j$$

eine Erhaltungsgröße der Bewegung, d.h.

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \vec{0}$$

Betrachten wir also die Planetenbewegung im Sonnensystem und berücksichtigen auch die Gravitationswechselwirkung der Planeten untereinander, dann ist der Drehimpuls der einzelnen Planeten nicht erhalten, sondern nur der Gesamtdrehimpuls.

6.5 Energieerhaltung und eindimensionale Bewegung

Gilt Zeittranslationssymmetrie und damit die Energieerhaltung, lassen sich eindimensionale Probleme analytisch lösen. Diese Methode hat deshalb einen weiten Anwendungsbereich und gehört deshalb zum Repertoire jedes Physikers.

Das Prinzip der Methode ist es, nicht die Bewegungsgleichung zu verwenden, sondern die Energie nach der Geschwindigkeit aufzulösen, was auf eine Differentialgleichung erster Ordnung führt. Diese lässt sich durch Integration lösen, wenn man sie als Differentialgleichung der Funktion $t(x)$ auffasst.

Die Methode wird hierbei zunächst nicht anhand der allgemeinsten Lagrangefunktion demonstriert, sondern anhand der spezielleren Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(x, v, t) = \frac{1}{2}mv^2 - V(x) \tag{6.20}$$

Aus der Zeittranslationsinvarianz folgt mit Hilfe des Noethertheorems Gl. 6.7 die Energieerhaltung.

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

Die Energie hat die Form

$$E \stackrel{Gl.\ 6.6}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} v - \mathcal{L} \stackrel{Gl.\ 6.20}{=} \frac{1}{2}mv^2 + V(x) \tag{6.21}$$

Die Gesamtenergie setzt sich aus kinetischer und potentieller Energie zusammen[8]

[8]Die Trennung in kinetische und potentielle Energie ist nur bei der hier verwendeten speziellen Form der Lagrangefunktion eindeutig möglich.

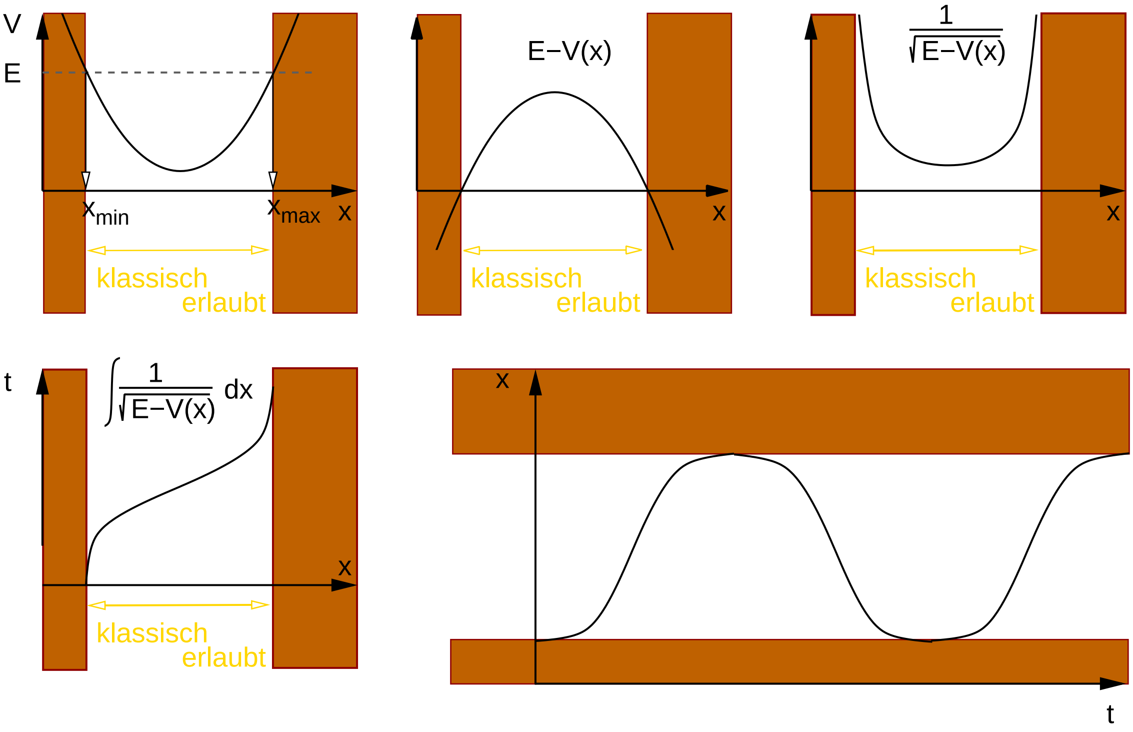


Abb. 6.2: Graphische Darstellung des Lüsungswegs für eindimensionale zeitunabhängige Probleme

Durch Auflösen von Gl. 6.21 können wir $\dot{x}$ direkt als Funktion der Energie und des Ortes bestimmen.

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}$$

Diese Gleichung stellt eine Differentialgleichung erster Ordnung für $x(t)$ dar. In der vorliegenden Form, erscheint sie noch recht kompliziert. Das Problem wird jedoch einfacher, wenn wir sie als Differentialgleichung für die Umkehrfunktion $t(x)$ auffassen.

$$\frac{dt}{dx} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

Diese Gleichung lässt sich durch Integration lösen.

$$t(x) = t(x_0) \pm \int_{x_0}^{x} dx' \, \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}}$$

Nachdem man dieses Integral gelöst hat, löst man $t = t(x)$ nach x auf und erhält damit die Bahnkurve $x(t)$.

Physikalische Konsequenzen

Hier wollen wir untersuchen, was wir aus den eben hergeleiteten Formeln lernen können:

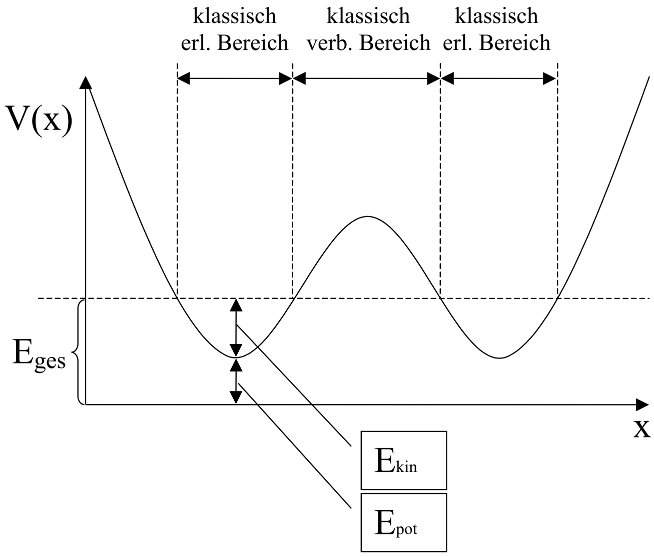


Abb. 6.3: Schema zur Illustration der klassisch erlaubten und der klassisch verbotenen Regionen.

Die Periode T der Bahn ist also[9]

$$T = 2\int_{x_{min}}^{x_{max}} dx' \, \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}}$$

Hier beziehen sich die Grenzen auf den klassisch erlaubten Bereich.

Damit erhalten wir außerdem die **Kreisfrequenz** ω

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{\int_{x_{min}}^{x_{max}} dx' \, \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x'))}}} \sim \frac{1}{\sqrt{m}}$$

Allgemeine Herleitung

Hier betrachten wir noch einmal dieselben Schritte, aber nun von einem allgemeineren Blickwinkel einer beliebigen zeitunabhängigen Lagrangefunktion aus.

1. Zuerst bestimmen wir die Energie als

$$E = v\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} - \mathcal{L}$$

Dabei hängt die Lagrange funktion von x und v ab.

2. Diese Gleichung löst man nach der Geschwindiglet v auf und erhält eine Gleichung der Form

$$\dot{x} = f(x, E)$$

3. Die Gleichung kann durch Integration gelöst werden

$$\frac{dx}{dt} = f(x, E)$$

$$\int \frac{1}{f(x, E)} dx = \int dt = t - t_0 = t(x) - t(x_0)$$

[9] Der Faktor 2 rührt daher, dass man einmal von x_{min} nach x_{max} und dann wieder zurücklaufen muss, um eine ganze Periode zu durchlaufen.

Sei

$$g(x,E) = \int dx \; \frac{1}{f(x,E)}$$

dann erhalten wir

$$t(x) = t(x_0) + g(x,E) - g(x_0,E)$$

4. Schliesslich bilden wir die Umkehrfunktion von t(x) und erhalten damit die gesuchte Lösung $x(t)$.

6.6 Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

Zweikörperprobleme lassen sich auf zwei effektive Einkörperprobleme zurückführen, wenn sie translationsinvariant im Raum sind.

Die Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2, t)) = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 - V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \tag{6.22}$$

Definition 6.9 *SCHWERPUNKT, GESAMTMASSE, RELATIVKOORDINATE UND REDUZIERTE MASSE*
Im Folgenden gelte:

$$\text{Schwerpunkt:} \quad \vec{R} \stackrel{def}{=} \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{6.23}$$

$$\text{Gesamtmasse:} \quad M \stackrel{def}{=} m_1 + m_2 \tag{6.24}$$

$$\text{Relativkoordinate:} \quad \vec{r} \stackrel{def}{=} \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \tag{6.25}$$

$$\text{Reduzierte Masse:} \quad \mu \stackrel{def}{=} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{6.26}$$

Siehe hierzu auch Abb. 6.4

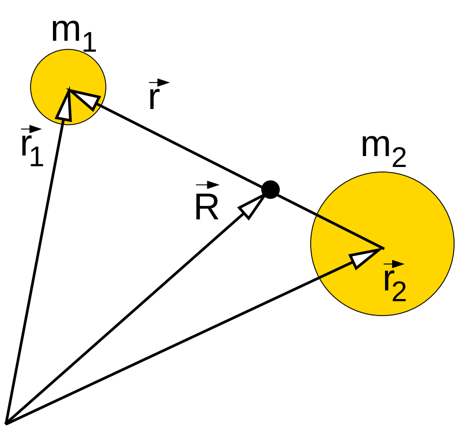


Abb. 6.4: Schema zur Relativkoordinate $\vec{r}$ und Schwerpunktskoordinate $\vec{R}$

Durch die Transformation auf die Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$
$$\vec{R} = \vec{R}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2$$

wird die Lagrangefunktion in eine Summe unabhängiger Terme für die beiden Koordinaten transformiert.

Wir drücken $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ durch die Relativ- und Schwerpunktskoordinaten aus.

$$\vec{r} \overset{\text{Gl. 6.25}}{=} \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{r}_2 \tag{6.27}$$

$$\begin{aligned}\vec{R} &\overset{\text{Gl. 6.23}}{=} \frac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2 \overset{\text{Gl. 6.27}}{=} \frac{m_1}{M}(\vec{r} + \vec{r}_2) + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2 = \frac{m_1}{M}\vec{r} + \frac{m_1}{M}\vec{r}_2 + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2 \\ &= \frac{m_1}{M}\vec{r} + \vec{r}_2\end{aligned} \tag{6.28}$$

$$\vec{r}_2 \overset{\text{Gl. 6.29}}{=} \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r} \tag{6.29}$$

$$\vec{r}_1 \overset{\text{Gl. 6.27}}{=} \vec{r} + \vec{r}_2 \overset{\text{Gl. 6.29}}{=} \vec{r} + \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r} = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r} \tag{6.30}$$

Damit haben wir Rücktransformation von Relativ- und Schwerpunktskoordinaten auf die Positionen der beiden Teilchen

RÜCKTRANSFORMATION VON RELATIV- UND SCHWERPUNKTSKOORDINATEN

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r} \tag{6.31}$$
$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r} \tag{6.32}$$

Diese Transformationsgleichungen verwenden wir um die Lagrangefunktion durch Relativ- und Schwerpunktskoordinaten auszudrücken. Die Transformation des Potentials ist trivial, weshalb wir nur auf die kinetische Energie ausführlich behandeln.

$$\begin{aligned}E_{kin} &= \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\vec{R}}^2 + 2\frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\dot{\vec{R}} + \frac{m_2^2}{M^2}\dot{\vec{r}}^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\vec{R}}^2 - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\dot{\vec{R}} + \frac{m_1^2}{M^2}\dot{\vec{r}}\right) \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\left(2\frac{m_1m_2}{M} - 2\frac{m_1m_2}{M}\right)\dot{\vec{r}}\dot{\vec{R}} + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2^2 + m_2m_1^2}{M^2}\dot{\vec{r}}^2 \\ &\overset{\text{Gl. 6.24}}{=} \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{\vec{r}}^2 \\ &\overset{\text{Gl. 6.26}}{=} \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2\end{aligned} \tag{6.33}$$

Mit Hilfe der Aufspaltung der kinetischen Energie gemäss Gl. 6.33 erhalten wir die folgende Form der Lagrangefunktion Gl. 6.22:

LAGRANGEFUNKTION IN SCHWERPUNKTS UND RELATIVSKOORDINATEN

$$\mathcal{L}=\underbrace{\frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2}_{\mathcal{L}_1}+\underbrace{\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2-V(\vec{r})}_{\mathcal{L}_2} \tag{6.34}$$

Die Lagrangefunktion besteht also aus zwei unabhängigen Teilen, die getrennt betrachtet werden können.

1. Die Lagrangefunktion $\mathcal{L}_1$ des Schwerpunkts in Gl. 6.34 ist translationsinvariant im Raum. Also gilt Impulserhaltung. Dies wiederum bedeutet, dass sich der Schwerpunkt mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, also wie ein freies Teilchen.
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{R}_i}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R_i}=M\ddot{R}_i=0 \qquad\Rightarrow\qquad \vec{R}(t)=\vec{R}(0)+\dot{\vec{R}}(0)t$$
2. Die Relativkoordinate $\vec{r}$ bewegt sich wie ein Teilchen mit reduzierter Masse in einem ortsfesten Potential so, als ob Teilchen 1 im Raum festgehalten wird:
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}_i}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r_i}=0 \qquad\Rightarrow\qquad \mu\ddot{\vec{r}}=-\nabla V(\vec{r})$$

Größe der reduzierten Masse

Um ein Gefühl für die reduzierte Masse zu erhalten, betrachten wir einige Spezialfälle:

- Ist eine Masse m_1 viel größer als m_2, also $m_1 >> m_2$, dann nutzen wir
$$\mu\stackrel{\text{def}}{=}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}=\frac{m_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=m_2\Big(1-\frac{m_2}{m_1}+O\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\Big)$$
Geht die große Masse nach unendlich, dann wird die reduzierte Masse gleich der kleineren Masse. Die reduzierte Masse ist immer kleiner als die kleinere der beiden Massen.
- Sind beide Massen m_1, m_2 gleich groß, also $m_1=m_2$, dann ist die reduzierte Masse gleich der Hälfte der Einzelmassen: $\mu=\frac{1}{2}m_1=\frac{1}{2}m_2$

Editor: Hier ein Abschnitt über das allgemeine Vielteilchenproblem und Abspalten der Translationsbewegung als optionales Kapitel.

6.7 Zentralfeldproblem

Das **Zentralfeldproblem** beschreibt die Bewegung in einem raumfesten, isotropen Potential. Es ist ein Beispiel, bei dem die Isotropie des Problems verwendet wird.

Dieses Problem erhält man zum Beispiel für die Relativbewegung eines Zweikörperproblems, wenn das Potential nur vom Abstand der Teilchen abhängt. In diesem Fall ist die Masse des Teilchens im Zentralfeldproblem gleich der reduzierten Masse des Zweikörperproblems.

Gegeben sei also ein kugelsymmetrisches Potential $V(|\vec{r}|)$, in dem sich ein Teilchen der Masse m bewegt. Die Lagrangefunktion habe die Form[10]

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2-V(|\vec{r}|) \tag{6.35}$$

[10] Magnetfelder wurden wiederum ausgeschlossen.

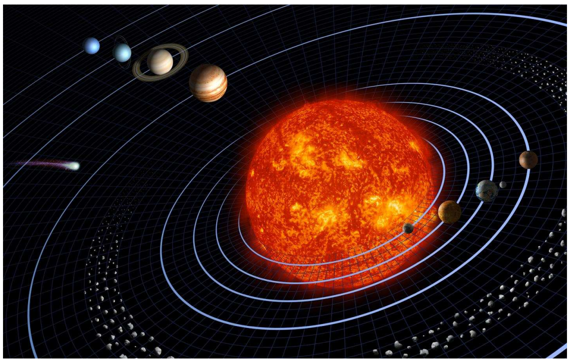


Abb. 6.5: Solar system (not to scale)

Aus der Kugelsymmetrie des Potentials folgt die Drehimpulserhaltung. Ferner ist das System zeitunabhängig, so dass die Energieerhaltung gilt. Es gilt also:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + V(\vec{r}) = \text{konst.}$$
$$\vec{L} = \vec{r} \times \underbrace{(m \cdot \dot{\vec{r}})}_{p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i}} = \text{konst.}$$

Dies sind vier Gleichungen für die sechs Unbekannten der Bewegung, nämlich $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Damit reduziert sich die Differentialgleichung auf zwei Differentialgleichungen erster Ordnung oder eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Allerdings gehen Energie und Drehimpuls in diese Differentialgleichung als Parameter ein.

Man kann nun, ohne Beschränkung der Allgemeinheit (oBdA), sein Koordinatensystem so wählen, dass der Drehimpuls L in die z-Richtung dieses Koordinatensystems wirkt. Damit gilt:

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x\dot{y} - y\dot{x} \end{pmatrix} \tag{6.36}$$

Definitionsgemäß steht $\vec{L}$ sowohl senkrecht auf $\vec{r}$ als auch auf $\dot{\vec{r}}$. Die Bahnkurve liegt deshalb in der xy- Ebene. Dadurch wird das dreidimensionale Problem auf ein zweidimensionales reduziert.

Die nächste Vereinfachung erhalten wir, wenn wir die Position x, y in der xy-Ebene durch Polarkoordinaten[11] darstellen.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{\text{Gl. } D.1}{=} \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \dot{r}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + r\dot{\varphi}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{6.37}$$

In ebenen Polarkoordinaten ausgedrückt erhält die kinetische Energie der Lagrangefunktion in Gl. 6.35 die Form

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2\underbrace{\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)}_{=1} + \quad m r\dot{r}\dot{\varphi}\underbrace{\left(-\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi\right)}_{=0} \\
&+ \quad \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2\underbrace{\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)}_{=1} \\
&= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2
\end{aligned}$$

[11]Siehe Anhang D.4 auf Seite 243

Damit erhalten wir für die Lagrangefunktion Gl. 6.35 die folgende Form.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - V(r)$$

Die entsprechenden Euler-Lagrange-Gleichungen liefern uns die Bewegungsgleichungten in den neuen Koordinaten.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \tag{6.38}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0 \tag{6.39}$$

Die zweite Gleichung Gl. 6.39 beschreibt nichts anderes als die Drehimpulserhaltung, wie man erkennt, wenn man den Drehimpuls in Radial- und Winkelkoordinaten, Gl. 6.37, darstellt.

$$\vec{L} = \underbrace{m\vec{r}\times\vec{v}}_{\vec{r}\times\vec{p}} \stackrel{\text{Gl. 6.36}}{=} m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r\dot{r}\Big(\underbrace{\cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi}_{=0}\Big) + r^2\dot{\varphi}\Big(\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{=1}\Big)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mr^2\dot{\varphi}\end{pmatrix}$$

Der Ausdruck für $\dot{\varphi} = \frac{L_z}{mr^2}$, den wir so erhalten, wird nun in Gl. 6.38 eingesetzt, um die Bewegungsgleichung für die Radialbewegung zu erhalten.

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{L_z^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\underbrace{\left[\frac{L_z^2}{2mr^2} + V(r)\right]}_{V_{\text{eff}}},$$

Die Bewegungsgleichung für die Radialkomponente $r \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{r}|$ is vollständig analog zu der eines eindimensionalen Teilchens in einem effektiven Radialpotential

EFFEKTIVES POTENTIAL FÜR DIE RADIALKOMPONENTE IN ZENTRALFELDPROBLEM

$$V_{\text{eff}}(r) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} + V(r)$$

Die Radialkomponente $r(t)$ erfüllt die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{r} = -\partial_r V_{eff}(r)$$

und die Winkelkomponente wird anschließend durch Integration gewonnen.

$$\vec{\phi}(t) = \vec{\phi}(0) + \int_0^t dt' \, \frac{\vec{L}}{mr^2(t')}$$

Die Richtung des Vektors ϕ ist die Drehachse, sein betrag den Drehwinkel.

Das effektive Potential V_{eff} für die Radialkomponente ist schematisch in Abbildung 6.6 dargestellt. Zusätzlich zum "normalen" Potential enthält das effektive Radialpotential noch einen drehimpulsabhängigen Zentrifugalanteil $\frac{L_z^2}{2mr^2}$. Die Winkelbewegung geht nur implizit über den Drehimpuls in die Gleichung für die Radialbewegung ein.

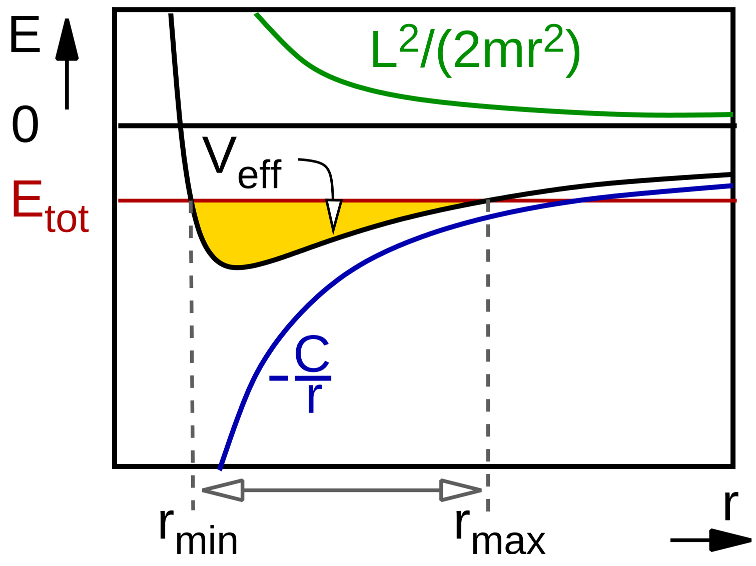
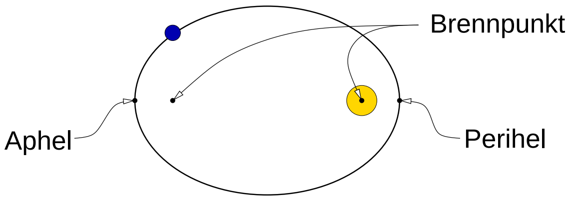


Abb. 6.6: Schematische Darstellung des effektiven Potentials für die Bewegung der Radialkomponente im Zentralfeldproblem am Beispiel des Keplerproblems. Das Potential ist $-C/r$. Das Zentrifugalpotential, eigentlich ein Beitrag der kinetischen Energie is $L^2/(2mr^2)$. Seine Stärke hängt direkt von der Geschwindigkeit der Winkelbewegung, bzw. des Drehimpulses L ab. Die Dynamik der Radialkomponente verhält sich genau wie die eines eindimensionalen Teilchens in einem effektiven Potential V_{eff}, das sich aus Potential und Zentrifugalkomponente zusammensetzt.

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $E > V(\infty)$: Es liegt eine ungebundene Bahn vor ($\rightarrow$ Streuproblem). Verschwindet das Radialpotential für $r \rightarrow \infty$, dann wird dort auch die Bewegung geradlinig.

2. $E < V(\infty)$: Hier liegt eine gebundene Bahn für das Teilchen vor.



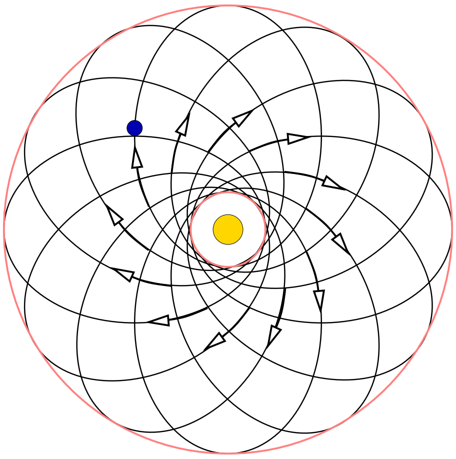


Abb. 6.7: Planetenbewegung. Im Keplerproblem, d.h. für ein Potential der Form $V(\vec{r}) = -Z/|\vec{r}|$, sind die gebundenen Bahnen Ellipsen mit dem Zentrum im Brennpunkt der Ellipse (links). Den Punkt größter Nähe nennt man Perihel und den der größten Ferne nennt man Aphel. (“-hel” für helios=Sonne, “Apo-” für “fern”, “peri-” für nah.) Für ein allgemeines Potential sind die Ellipsen nicht mehr stationär, sondern drehen sich selber, was in Rosettenbahnen resultiert (rechts). Man spricht hierbei von Periheldrehung.

Der Bahnverlauf kann aus dem Bahnstück zwischen den Umkehrpunkten durch Zeitspiegelung und Zeitverschiebung gewonnen werden.

Das **Keplerproblem** ist durch ein Potential der Form $V(r) = -C/r$ definiert, wobei C eine beliebige Konstante ist. Das Keplerproblem beschreibt zum Beispiel Planetenbahnen im Gravitationsfeld der Sonne. Es beschreibt aber auch die klassische Bewegung von Elektronen um einen Atomkern, wobei das Potential die elektrostatische Anziehung beschreibt. Beim Keplerproblem ist die Periode der Radial- und der Winkelbewegung identisch. Als Folge davon ergeben sich geschlossene Bahnen, nämlich Kreise und Ellipsen. Dies ist ein Spezialfall der Bewegung aus Abb. 6.7. Der Merkur, der der Sonne am nächsten steht, vollführt jedoch eine Rosettenbewegung, was auf relativistische Korrekturen zurückzuführen ist. Die Beobachtung der Rosettenbahnen des Merkurs war einer der grundlegenden Tests der Allgemeinen Relativitätstheorie, da diese Beobachtung beweist, dass das Gravitationspotential von der Form $C/|\vec{r}|$ abweicht.

Abb. 6.8: Johannes Kepler, 1571-1630

Das 2. Keplersche Gesetz[12] sagt, dass der Fahrstrahl pro Zeiteinheit

[12]Keplersche Gesetze:

- 1. Keplersches Gesetz (Gestalt der Bahn): Ein Planet bewegt sich auf einer elliptischen Bahn um die Sonne, die in einem der Brennpunkte der Ellipse steht. Wie bei jeder Ellipse gilt, dass die Summe der Entfernungen des Planeten zu den Brennpunkten gleich dem großen Durchschnitt der Ellipse ist.

- 2. Keplersches Gesetz (Flächensatz)”: Die Verbindung zwischen der Sonne und dem Planeten überstreicht in gleichen Zeitintervallen die gleiche Fläche. Das heißt, dass der Planet sich umso schneller bewegt, je näher er der Sonne kommt.

- 3. Keplersches Gesetz (Umlaufzeiten): Das Verhältnis T^2/d^3, wobei T die Umlaufzeit und d der Abstand der Planetenbahn ist, ist für alle Planeten identisch. Je weiter ein Planet von der Sonne entfernt ist desto länger benötigt er um die Sonne zu umkreisen. Diese Formel ist nicht exakt.

Veröffentlicht 1609 in Keplers Werk “Astronomia Nova” und 1619 in “Harmonices Mundi”(Weltharmonik) auf der Grundlage der Daten des dänischen Astronomen Tycho Brahe immer die gleiche Fläche überstreicht. Der Drehimpuls kann über

$$\vec{L} = 2m\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}$$

durch die Fläche $\Delta\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\Delta t$ dargestellt werden, die pro Zeiteinheit überstrichen wird.

Damit lässt sich die Pirouette einer Eislauftänzerin erklären: Zieht sie ihre Arme an, verkürzt sie im Mittel die Radialkomponenten der Massenpunkte ihres Körpers. Um dies auszugleichen wird die Winkelgeschwindigkeit höher und die Pirouette schneller.

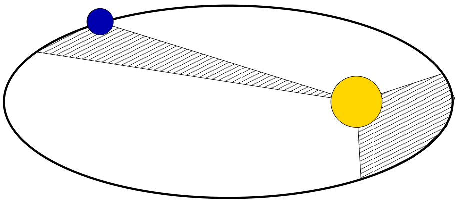


Abb. 6.9: Flächensatz oder 2. Keplersches Gesetz: Der Fahrstrahl eines Teilchens im Zentralkörperproblem überstreicht pro Zeiteinheit jeweils dieselbe Fläche. Der Flächensatz ist eine direkte Konsequenz der Drehimpulserhaltung.

Chapter 7

Starrer Körper (4h)

7.1 Einleitung

Bisher haben wir uns mit punktförmigen Teilchen beschäftigt. Dahinter liegt die Idee, dass alle Objekte aus Elementarteilchen aufgebaut sind, sodass alle Objekte als System von Punktteilchen beschrieben werden können. In der Praxis ist es jedoch nicht sinnvoll, ausgedehnte Objekte durch Myriarden von einzelnen Teilchen zu beschreiben. Um ausgedehnte Körper zu beschreiben, kann die Bewegung stark vereinfacht werden. Ausgedehnte Objekte können häufig als starre Körper aufgefasst werden. Andere ausgedehnte Objekte sind zum Beispiel elastische oder plastische Körper oder Flüssigkeiten und Gase.

Beispiele für Fragestellungen

- Beschreibung des Trudelns von Raumschiffen und Flugzeugen
- Funktionsweise des Fahrrads beim Lenken
- Bestimmung der Kräfte, die rotierende Teile eines Motors auf die Lager ausüben.
- Funktionsweise eines Kreiselkompasses

Ein wichtiges Lehrziel, das wir in diesem Kapitel anhand des Beispiels des starren Körpers darstellen wollen ist die lokale Stabilitätsanalyse. Sie ist ganz wesentlich für die Analyse nichtlinearer Differentialgleichungen erster Ordnung[1]. Die lokale Stabilitätstheorie spielt eine ganz wichtige Rolle in der Chaostheorie.

Definition eines starren Körpers

Zunächst wollen wir jedoch definieren, was wir unter einem starren Körper verstehen:

[1]Beachte, dass jede Differentialgleichung auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung abgebildet werden kann.

Definition 7.1 *STARRER KÖRPER*
Die Form eines starren Körpers bleibt bei der Bewegung unverändert:

- $\Leftrightarrow$ *Der Abstand zwischen seinen Teilen bleibt unverändert:*

$$|\vec{r}_\nu(t) - \vec{r}_\mu(t)|^2 = |\vec{r}_\nu(0) - \vec{r}_\mu(0)|^2$$

- $\Leftrightarrow$ *Die Bewegung eines starren Körpers kann durch globale Drehung $\boldsymbol{U}(t)$ und Verschiebung $\vec{R}(t)$ beschrieben werden:*

$$\vec{r}_\nu(t) = \boldsymbol{U}(t)\left(\vec{r}_\nu(0) - \vec{R}(0)\right) + \vec{R}(t)$$

mit $\boldsymbol{U}(t)\boldsymbol{U}^\top(t) = 1$ sowie den Anfangsbedingungen $\boldsymbol{U}(0) = \mathbf{1}$ und $\vec{R}(0) = \vec{0}$. Es ist sinnvoll, $\vec{R}(t)$ gleich dem Schwerpunkt zu wählen, auch wenn dies in diesem fall nicht notwendig ist.

Massendichte

Häufig haben wir den Körper als kontinuierliche Massenverteilung gegeben. Es ist einfach etwas umständlich die Positionen aller Elementarteilchen anzugeben, nur um einen Kreisel zu beschreiben. Dazu geben wir die Massendichte $\rho_m(\vec{r}, t)$ an. Die Massendichte ist als *Masse pro Volumen* definiert. Die Massendichte ist so definiert, dass wir durch Integration der Massendichte über einen beliebigen Bereich Ω die Summe M_Ω der Massen aller Teilchen in diesem Bereich erhalten, d.h.

$$M_\Omega = \int_\Omega d^3r\ \rho_m(\vec{r})$$

Die Massendichte ρ_m an einem Punkt $\vec{r}$ kann als Grenzübergang zu einem Bereich mit infinitesimalem Durchmesser $d(\Omega)$ definiert werden:

$$\rho_m(\vec{r}) = \lim_{\substack{d(\Omega)\to 0 \\ \vec{r}\in\Omega}} \frac{M_\Omega}{|\Omega|}$$

Dabei ist $|\Omega|$ das Volumen des Bereichs Ω und $d(\Omega)$ ist der maximale Abstand zweier Punkte im Bereich Ω.

Für eine Ansammlung von Punktmassen m_ν an den Posigtionen r_ν ist die Massendichte eine Summe von Deltafunktionen

$$\rho_m(\vec{r}) = \sum_\nu m_\nu \delta(\vec{r} - \vec{r}_\nu)$$

Schwerpunkt

Im Folgenden wollen wir zwei offensichtliche Definitionen einführen, die wir häufiger benötigen werden.

Der **Schwerpunkt** $\vec{R}$ einer Verteilung von Punktmassen m_ν an den Positionen $\vec{r}_\nu$, bzw. eines Körpers mit der Massendichte $\rho_m(\vec{r})$ ist durch die Gleichung

$$\sum_\nu m_\nu(\vec{r}_\nu - \vec{R}) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \int d^3r\ \rho_m(\vec{r})(\vec{r} - \vec{R}) = 0 \tag{7.1}$$

gegeben. Damit erhalten wir den Schwerpunkt $\vec{R}$ als

Definition 7.2 *SCHWERPUNKT*

$$\vec{R} = \frac{\sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu}{\sum_\nu m_\nu} \qquad bzw. \qquad \vec{R} = \frac{\int_\Omega d^3r\ \rho_m(\vec{r})\vec{r}}{\int_\Omega d^3r\ \rho_m(\vec{r})}$$

Im Nenner des Ausdrucks steht die **Gesamtmasse**

Definition 7.3 *GESAMTMASSE*

$$M = \sum_\nu m_\nu \qquad bzw. \qquad M = \int d^3r\ \rho_m(r)$$

können wir die Definitionsgleichung Gl. 7.1 auch als

$$\int_\Omega d^3r\ \rho_m(r)\vec{r} = M\vec{R}$$

schreiben.

Keine magnetischen Felder

In diesem ganzen Kapitel machen wir die Annahme, dass der kanonische Impuls $p_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}_i$ gleich dem kinetischen Impuls $\vec{p} = m\ \vec{v}$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist, d.h.

$$\vec{p} = m\ \dot{\vec{r}} \tag{7.2}$$

Diese Annahme gilt zum Beispiel nicht in Gegenwart von Magnetfeldern.

7.2 Drehmoment und Trägheitstensor

Betrachten wir nun die Änderung des Drehimpulses, erhalten wir eine Bewegungsgleichung für den Drehimpuls

$$\partial_t \vec{L} = \frac{d}{dt}\left(\sum_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{p}_\nu\right) = \sum_\nu \left(\dot{\vec{r}}_\nu \times \vec{p}_\nu + \vec{r}_\nu \times \underbrace{\dot{\vec{p}}_\nu}_{\vec{F}_\nu}\right) \tag{7.3}$$

$$\stackrel{\text{Gl. 7.2}}{=} \sum_\nu \left(\underbrace{\dot{\vec{r}}_\nu \times \overbrace{m\dot{\vec{r}}_\nu}^{\vec{p}_\nu}}_{=0} + \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu\right) \stackrel{\text{Gl. 7.5}}{=} \vec{D} \tag{7.4}$$

wobei ν ein Teilchenindex ist.

Definition 7.4 *DREHMOMENT*
Das Drehmoment $\vec{D}$ ist als

$$\vec{D} = \sum_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu \tag{7.5}$$

definiert, wobei ν ein Teilchenindex ist. Das Drehmoment ist das Produkt aus Kraft und der Länge eines Hebelarms. Die Einheit ist das Newtonmeter $1Nm = 1kg\frac{m^2}{s^2}$.

Der Zusammenhang zwischen Drehmoment $\vec{D}$ und Leistung P ist[2] $P = \vec{D}\vec{\omega}$, wobei $\vec{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit ist. Für die Beschleunigung eines Autos ist die Leistung und nicht das Drehmoment des Motors ausschlaggebend. Eine detaillierte Betrachtung wird in Anhang F auf S. 313 gegeben.

Mit dem Drehmoment erhalten wir eine Bewegungsgleichung $\dot{\vec{L}} = \vec{D}$ für den Drehimpuls, der analog dem Newtonschen Gesetz $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ aufgebaut ist. Im Newtonschen Gesetz haben wir den Impuls mit der Masse und der Geschwindigkeit in Beziehung gesetzt. Wir suchen nun eine analoge Beziehung für den Drehimpuls.

$$\vec{L} = \sum_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{p}_\nu = \sum_\nu m_\nu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}_\nu \stackrel{Gl.\ 5.55}{=} \sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu \times \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu)}_{\dot{\vec{r}}_\nu}$$

Beachte dass hier die Annahme einging dass der kanonische Impuls gleich dem kinetischen ist. Mit Hilfe der "bac-cab" Vorschrift Gl. D.22 von Seite 253

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$$

erhält man

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_\nu m_\nu \left[\vec{r}_\nu^{\,2} \cdot \vec{\omega} - \vec{r}_\nu(\vec{r}_\nu \cdot \vec{\omega})\right] = \sum_\nu m_\nu \left[\vec{r}_\nu^{\,2}\mathbf{1} - \vec{r}_\nu \otimes \vec{r}_\nu\right]\vec{\omega} \\ &= \boldsymbol{J}\vec{\omega} \end{aligned} \tag{7.6}$$

Diese Gleichung ähnelt formal der Gleichung $\vec{p} = m\vec{v}$, mit dem Unterschied dass der Impuls durch den Drehimpuls, die Masse mit dem Trägheitstensor $\boldsymbol{J}$ und die Geschwindigkeit durch die Winkelgeschwindigkeit ersetzt wird.

Dabei ist der Trägheitstensor $\boldsymbol{J}$ eine neue Größe ist, die wie folgt definiert ist:

[2]Die Leistung P ist

$$P = \frac{dE}{dt} = \vec{F}\vec{v} = \vec{F}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}\left(\vec{r} \times \vec{F}\right) = \vec{\omega}\vec{D}$$

. Dabei ist die Geschwindigkeit der Kreisbewegung $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Definition 7.5 *TRÄGHEITSTENSOR*
*Der Tensor **J***

$$J_{ij} = \sum_\nu m_\nu \left[\vec{r}_\nu^{\,2}\delta_{ij} - r_{\nu i} r_{\nu j}\right]$$
$$\boldsymbol{J} = \sum_\nu m_\nu \left[\mathbf{1}\vec{r}_\nu^{\,2} - \vec{r}_\nu \otimes \vec{r}_\nu\right] \tag{7.7}$$

wird als Trägheitstensor bezeichnet [a]. *Die Integralformen dieser Gleichungen sind*

$$J_{ij} = \int d^3r\ \rho_m(\vec{r})\left[\vec{r}^{\,2}\delta_{ij} - r_i r_j\right]$$
$$\boldsymbol{J} = \int d^3r\ \rho_m(r)\left[\mathbf{1}\vec{r}^{\,2} - \vec{r}\otimes\vec{r}\right] \tag{7.8}$$

wobei $\rho_m(\vec{r})$ die Massendichte ist. Die Massendichte ist die Teilchendichte multipliziert mit der Teilchenmasse, bzw. die Masse pro Volumen. Teilchendichten werden in Kap. 8.3 eingeführt.
Der Trägheitstensor hat damit die Form

$$\boldsymbol{J} \mathrel{\hat{=}} \int d^3r\ \rho_m(\vec{r}) \begin{pmatrix} \vec{r}^{\,2} - x^2 & -xy & -xz \\ -xy & \vec{r}^{\,2} - y^2 & -yz \\ -xz & -yz & \vec{r}^{\,2} - z^2 \end{pmatrix}$$

[a] Dabei bezeichnet das Symbol $\otimes$ das dyadische Produkt:

$$(a\otimes b)_{ij} = a_i b_j$$

Das **Trägheitsmoment**[3] ist eine nützliche Größe, wenn man die Drehung bezüglich einer gegebenen Achse betrachtet. Es ist also bezüglich einer Drehachse definiert, die durch den Einheitsvektor $\vec{e}$, d.h. mit $\vec{e}^2 = 1$, bezeichnet wird.

$$\mathcal{J}_{\vec{e}} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{e}\boldsymbol{J}\vec{e}$$

Das Trägheitsmoment lässt sich in Zylinderkoordinaten (siehe Anhang D.4.1) in der Form $\mathcal{J}_z \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{J}_{\vec{e}_z} = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\phi\ \rho_m(r,\phi,z) r^3$ darstellen.

Anwendung: Gyroskop

Das **Gyroskop** ist ein Kreisel. Ist die Achse des Gyroskops frei beweglich, behält sie Ihre Richtung im Raum bei. Das ist das Prinzip des **Kreiselkompasses**, wie sie zum Beispiel in Flugzeugen eingesetzt werden. Ein magnetischer Kompass würde zum Beispiel bei Gewittern oder durch elektrische Ströme im Flugzeug beeinflusst werden.

Hängt man das Gyroskop an einem Ende der Achse wie in Abb. 7.1 auf, dann dreht sich seine Achse aufgrund der Schwerkraft nicht nach unten, sondern horizontal. Dies lässt sich in erster Näherung durch

$$\dot{\vec{L}} = \vec{D} = \underbrace{\frac{d}{2}\vec{e}_x}_{\vec{r}} \times \underbrace{[-mg\vec{e}_z]}_{\vec{F}} = -\frac{1}{2}mgd\vec{e}_y$$

[3] In vielen Büchern findet man eine Formel der Art $J = \int dm\ r^2$, wobei r der Abstand von der Drehachse ist. Das ist mathematisch Quatsch. Damit man das Integral bestimmen kann würde man eine Funktion $r(m)$ benötigen, die aber im Allgemeinen keine Funktion, d.h. eine eindeutige Abbildung von m nach r, ist. Schon gar nicht kann man das Integral in die Tensorform verallgemeinern. Während die Formel intuitiv erscheint, erkennt man das Problem sofort, wenn man versucht, Zahlen einzusetzen und das Integral auszuwerten.

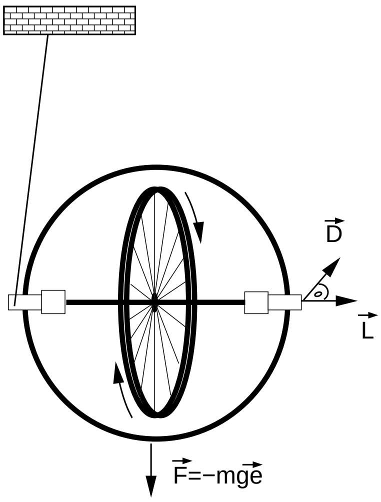


Abb. 7.1: Präzession eines Kreisels. Solange sich das Rad des Gryoskops schnell genug dreht, bleibt seine Drehachse weitgehend in der Horizontalen. Die Rotationsachse dreht sich in der Ebene. Das Bild enthält einen Fehler, da der Schwerpunkt des Kreisels sich in Wirklichkeit direkt unter dem Aufhängepunkt befinden sollte. `Editor: Drehrichtung des Rads, Richtung des Drehimpulses und des Drehmoments stimmen wahrscheinlich nicht überein.`

wobei die Drehachse aktuell in x-Richtung ausgerichtet ist. Dabei ist d die Länge der Achse. Man nennt die Drehung der Drehachse des Gyroskops um die vertikale **Präzession**.

Läuft die Drehung aus, dann dreht sich die Achse aus der Horizontalen. Die Ursache ist, dass dann die Drehimpulskomponente um die Vertikale nicht mehr gegen die Drehimpulskomponente um die Drehachse des Gyroskops vernachlässigt werden kann.

7.3 Satz von Steiner (Eigenstudium)

Das Trägheitstensor $\boldsymbol{J}$ ist immer bezüglich eines bestimmten Zentrums definiert, durch den die Drehachse gehen muss. Bisher haben wir dieses Zentrum in den Ursprung gelegt. Im Allgemeinen wählt man den Schwerpunkt des Körpers als Zentrum, weil sich die Drehachse eines frei beweglichen Körpers, wie man zeigen kann,immer durch den Schwerpunkt geht.

Kennt man den Trägheitstensor bezüglich eines Zentrums, will aber die Drehung des Körpers um eine Achse bestimmen, die nicht durch dieses Zentrum geht, muss man den Trägheitstensor für ein neues Zentrum bestimmen. Die Umrechnung gelingt mit dem Satz von Steiner, der im Folgenden abgeleitet wird.

Wir bestimmen also den Tägheitstensor $\boldsymbol{J}_{\vec{Q}}$ bezüglich eines beliebigen Zentrums $\vec{Q}$. In der Ableitung verwenden wir noch das Sumbol $\boldsymbol{J}_{\vec{0}}$ für den Trägheitstensor bezüglich des Ursprungs $\vec{0}$, wie er in Gl. 7.8 definiert wurde, sowie den Trägheitstensor $\boldsymbol{J}_{\vec{R}}$ bezüglich des Schwerpunkts $\vec{R}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{J}_{\vec{Q}} &= \int d^3r\ \rho_m(\vec{r}) \left[(\vec{r}-\vec{Q})^2 \mathbf{1} - (\vec{r}-\vec{Q}) \otimes (\vec{r}-\vec{Q}) \right] \\
&= \int d^3r\ \rho_m(\vec{r}) \left[\left(\vec{r}^{\,2} - 2\vec{r}\vec{Q} + \vec{Q}^2 \right) \mathbf{1} - \left(\vec{r} \otimes \vec{r} - \vec{Q} \otimes \vec{r} - \vec{r} \otimes \vec{Q} + \vec{Q} \otimes \vec{Q} \right) \right] \\
&= \int d^3r\ \rho_m(\vec{r}) \left[(\vec{r}^{\,2}\mathbf{1} - \vec{r} \otimes \vec{r}) - 2\vec{r}\vec{Q}\mathbf{1} + \vec{Q} \otimes \vec{r} + \vec{r} \otimes \vec{Q} + \left(\vec{Q}^2 \mathbf{1} - \vec{Q} \otimes \vec{Q} \right) \right] \\
&= \underbrace{\int d^3r\ \rho_m(\vec{r})\ (\vec{r}^{\,2}\mathbf{1} - \vec{r} \otimes \vec{r})}_{=\boldsymbol{J}_{\vec{0}}} \\
&\quad -2\mathbf{1}\vec{Q} \underbrace{\left(\int d^3r\ \rho_m(\vec{r})\vec{r} \right)}_{M\vec{R}} + \vec{Q} \otimes \underbrace{\left(\int d^3r\ \rho_m(\vec{r})\vec{r} \right)}_{M\vec{R}} + \underbrace{\left(\int d^3r\ \rho_m(\vec{r})\vec{r} \right)}_{M\vec{Q}} \otimes \vec{R} \\
&\quad + M \left(\mathbf{1}\vec{Q}^2 - \vec{Q} \otimes \vec{Q} \right) \\
&\overset{Gl.\ 7.2}{=} \boldsymbol{J}_{\vec{0}} - M \left(\mathbf{1}\vec{R}\vec{Q} - \vec{R} \otimes \vec{Q} \right) - M \left(\mathbf{1}\vec{Q}\vec{R} - \vec{Q} \otimes \vec{R} \right) + M \left(\mathbf{1}\vec{Q}^2 - \vec{Q} \otimes \vec{Q} \right) \\
&= \underbrace{\boldsymbol{J}_{\vec{0}} - M \left(\mathbf{1}\vec{R}^2 - \vec{R} \otimes \vec{R} \right)}_{\boldsymbol{J}_{\vec{R}}} + M \left(\mathbf{1}(\vec{Q}-\vec{R})^2 - (\vec{Q}-\vec{R}) \otimes (\vec{Q}-\vec{R} \right)
\end{aligned}
$$

Indem man den Punkt $\vec{Q}$ gleich dem Schwerpunkt setzt, erhält man die Zuordnung von $\boldsymbol{J}_{\vec{R}}$ als dem Trägheitstensor bezüglich des Schwerpunkts des Körpers.

Damit erhalten wir den **Satz von Steiner**

SATZ VON STEINER

Ist $\boldsymbol{J}_{\vec{R}}$ der Trägheitstensor bezüglich eines Zentrum im Schwerpunkt $\vec{R}$ des Körpers, dann erhält man den Trägheitstensor $\boldsymbol{J}_{\vec{Q}}$ bezüglich eines beliebigen Zentrums $\vec{Q}$ als

$$
\boldsymbol{J}_{\vec{Q}} = \boldsymbol{J}_{\vec{R}} - M \left(\mathbf{1}(\vec{Q}-\vec{R})^2 - (\vec{Q}-\vec{R}) \otimes (\vec{Q}-\vec{R}) \right)
$$

wobei M die Gesamtmasse des Körpers ist.

Kennt man also den Schwerpunkt und die Gesamtmasse eines Körpers lässt sich der Trägheitstensor leicht auf ein anderes Zentrum umrechnen.

7.3.1 Kinetische Energie eines starren Körpers (Eigenstudium)

Wir betrachten wieder einen starren Körper, der aus Punktmassen zusammengesetzt ist. Die Bewegung der Punktmassen lassen sich gemäss

$$
\vec{r}_\nu(t) \overset{\text{Gl. 7.1}}{=} U(t) \left(\vec{r}_\nu(0) - \vec{R}(0) \right) + \vec{R}(t)
$$

angeben, wobei $\vec{R}(t)$ der Schwerpunkt des Körpers ist.

Damit und mit Gl. 5.55 von S. 117 , $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, erhalten wir die Geschwindigkeit der Punktmassen

$$
\dot{\vec{r}}_\nu(t) = \omega \times \left(\vec{r}_\nu(t) - \vec{R}(t) \right) + \dot{\vec{R}}(t)
$$

Nun bestimmen wir die kinetische Energie, wobei wir verwenden, dass der Wert des Spatprodukts

$\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$ bei zyklischer Vertauschung unverändert bleibt.

$$
\begin{aligned}
E_{kin} &= \sum_\nu \frac{1}{2} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^2 \\
&= \sum_\nu \frac{1}{2} m_\nu \left(\dot{\vec{r}}_\nu - \dot{\vec{R}}\right)^2 + \underbrace{\sum_\nu m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu}_{M\dot{\vec{R}}} \dot{\vec{R}} - \frac{1}{2}\underbrace{\sum_\nu m_\nu}_{M} \dot{\vec{R}}^2 \\
&= \sum_\nu \frac{1}{2} m_\nu \left(\dot{\vec{r}}_\nu - \dot{\vec{R}}\right)\left[\vec{\omega}\times\left(\vec{r}_\nu(t)-\vec{R}(t)\right)\right] + \frac{1}{2} M\dot{\vec{R}}^2 \\
&= \frac{1}{2}\vec{\omega}\underbrace{\sum_\nu m_\nu \left(\vec{r}_\nu(t)-\vec{R}(t)\right)\times\left(\dot{\vec{r}}_\nu - \dot{\vec{R}}\right)}_{=\vec{L}_{\vec{R}}=\boldsymbol{J}_{\vec{R}}\vec{\omega}} + \frac{1}{2} M\dot{\vec{R}}^2 \\
&= \frac{1}{2}\vec{\omega}\boldsymbol{J}_{\vec{R}}\vec{\omega} + \frac{1}{2} M\dot{\vec{R}}^2
\end{aligned}
$$

Wir können die kinetische Energie also in einen Rotationsanteil und den Beitrag der Schwerpunktsbewegung aufspalten. Wichtig ist zu beachten, dass der Trägheitstensor selber von der Zeit abhängt, und zweitens immer bezüglich des momentanen Schwerpunkts bestimmt werden muss.

7.4 Bewegungsgleichung für die Winkelgeschwindigkeit

Der Drehimpuls erfüllt die Bewegungsgleichung Gl. 7.4, wobei der Drehimpuls selbst wieder mittels Gl. 7.6 durch die Winkelgeschwindigkeit ausgedrückt werden kann. Wir erhalten damit eine Bewegungsgleichung für die Winkelgeschwindigkeit.

BEWEGUNGSGLEICHUNG DES STARREN KÖRPERS
IN EINEM INERTIALSYSTEM

Die Bewegungsgleichung für den Drehimpuls hat die Form

$$\dot{\vec{L}} \stackrel{Gl.\ 7.4}{=} \vec{D} \tag{7.9}$$

wobei

$$\vec{L} \stackrel{Gl.\ 7.6}{=} \boldsymbol{J}\vec{\omega} \tag{7.10}$$

Also gilt für die Winkelgeschwindigkeit[a]

$$\boldsymbol{J}\dot{\vec{\omega}} \stackrel{Gln.\ 7.10,7.9}{=} -\dot{\boldsymbol{J}}\vec{\omega} + \vec{D} \tag{7.11}$$

[a]
$$\vec{D} \stackrel{\mathrm{Gl.}\ 7.9}{=} \dot{\vec{L}} \stackrel{\mathrm{Gl.}\ 7.10}{=} \frac{d}{dt}(\boldsymbol{J}\vec{\omega}) = \dot{\boldsymbol{J}}\vec{\omega} + \boldsymbol{J}\dot{\vec{\omega}}$$

Hierbei ist die Zeitabhängigkeit des Trägheitstensors problematisch, weil dieser selbst auf komplizierte Weise von der Winkelgeschwindigkeit abhängt. Das Problem vereinfacht sich, wenn wir es auf ein körperbezogenes Bezugssystem transformieren, weil der so transformierte Trägheitstensor nicht mehr von der Zeit abhängt. Allerdings ist zu beachten, dass es sich hierbei um eine Transformation von einem Inertialsystem zu einem beschleunigten Bezugssystem handelt.

Die **Transformation auf das körpereigene Bezugssystem** entspricht der Transformation auf die Anfangswerte der Trajektorien für die einzelnen Punkte des starren Körpers. Wir betrachten daher eine zeitabhängige Transformation der aktuellen Positionen $\vec{r}(t)$ auf die Anfangspositionen

$$\vec{r}(t) \rightarrow \vec{r}'(t) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r}(0) \tag{7.12}$$

Ein starrer Körper kann nur Drehungen und Verschiebungen im Raum durchführen. Die Verschiebungen wollen wir hier der Einfachheit halber nicht betrachten. Die Transformation auf das körpereigene Bezugssystem kann dann durch eine zeitabhänglige Drehmatrix $\boldsymbol{U}^\top(t)$ dargestellt werden

$$\vec{r}'_\nu(t) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r}_\nu(0) \stackrel{\text{Gl. 7.1}}{=} \boldsymbol{U}^\top(t)\vec{r}_\nu(t)$$

$\boldsymbol{U}(t)$ ist also unitär. Die Transformation $\boldsymbol{U}(t)$ transformiert die Anfangswerte auf die aktuellen Positionen des starren Körpersm, während $\boldsymbol{U}^\top(t)$ die Transformation auf das körpereigene Bezugssystem ist.

Die Größen im körpereigenen Bezugssystem werden durch gestrichene Symbole dargestellt.

$$\vec{r}'_\nu(t) = \boldsymbol{U}^\top(t)\vec{r}_\nu(t) \tag{7.13}$$
$$\vec{\omega}'(t) = \boldsymbol{U}^\top(t)\vec{\omega}(t) \tag{7.14}$$
$$\vec{L}'(t) = \boldsymbol{U}^\top(t)\vec{L}(t) \tag{7.15}$$
$$\vec{D}'(t) = \boldsymbol{U}^\top(t)\vec{D}(t) \tag{7.16}$$
$$\boldsymbol{J}'(t) = \boldsymbol{U}^\top(t)\boldsymbol{J}(t)\boldsymbol{U}(t) \tag{7.17}$$

Da die Transformation die Koordinaten auf ihre Anfangspositionen abbildet d.h. $\vec{r}'_\nu(t) = \vec{r}_\nu(0)$, ist auch der transformierte Trägheitstensors Gl. 7.7 identisch mit dem zu Beginn der Trajektorie.

Diese Eigenschaft, nämlich $\boldsymbol{J}'(t) = \boldsymbol{J}(0)$, können wir aber auch explizit ausrechnen.[4]

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J}'(t) &\stackrel{\text{Gl. 7.17}}{=} \boldsymbol{U}^\top(t)\boldsymbol{J}(t)\boldsymbol{U}(t) \\
&\stackrel{\text{Gl. 7.7}}{=} \boldsymbol{U}^\top(t)\left[\sum_\nu m_\nu\left(\mathbf{1}\vec{r}_\nu^{\,2}(t) - \vec{r}_\nu(t)\otimes\vec{r}_\nu(t)\right)\right]\boldsymbol{U}(t) \\
&= \sum_\nu m_\nu\left[\underbrace{\boldsymbol{U}^\top(t)\mathbf{1}\boldsymbol{U}(t)}_{=\mathbf{1}}\vec{r}_\nu^{\,2}(t) - \boldsymbol{U}^\top(t)\vec{r}_\nu(t)\otimes\vec{r}_\nu(t)\boldsymbol{U}(t)\right] \\
&= \sum_\nu m_\nu\left[\mathbf{1}\left(\vec{r}_\nu(t)\underbrace{\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\top}_{=\mathbf{1}}\vec{r}_\nu(t)\right) - \left(\boldsymbol{U}^\top(t)\vec{r}_\nu(t)\right)\otimes\left(\boldsymbol{U}^\top(t)\vec{r}_\nu(t)\right)\right] \\
&= \sum_\nu m_\nu\left[\mathbf{1}\left(\boldsymbol{U}^\top\vec{r}_\nu(t)\right)^2 - \left(\boldsymbol{U}^\top(t)\vec{r}_\nu(t)\right)\otimes\left(\boldsymbol{U}^\top(t)\vec{r}_\nu(t)\right)\right] \\
&\stackrel{\text{Gl. 7.13}}{=} \sum_\nu m_\nu\left[\mathbf{1}\left(\vec{r}_\nu(0)\right)^2 - \vec{r}_\nu(0)\otimes\vec{r}_\nu(0)\right] \stackrel{\text{Gl. 7.7}}{=} \boldsymbol{J}(0)
\end{aligned} \tag{7.18}$$

[4]Nicht ganz offensichtlich ist bei der Herleitung der Schritt

$$\boldsymbol{U}^\top(\vec{r}\otimes\vec{r})\boldsymbol{U} = \left(\boldsymbol{U}^\top\vec{r}\right)\otimes\left(\boldsymbol{U}^\top\vec{r}\right)$$

den wir uns am besten in Komponentendarstellung verdeutlichen:

$$\begin{aligned}
\left[\boldsymbol{U}^\top(\vec{r}\otimes\vec{r})\boldsymbol{U}\right]_{i,j} &= \sum_{k,l} U^\top_{i,k}r_k r_l U_{l,j} = \left(\sum_k U^\top_{i,k}r_k\right)\left(\sum_l U_{l,j}r_l\right) = \left(\sum_k U^\top_{i,k}r_k\right)\left(\sum_l U^\top_{j,l}r_l\right) \\
&= \left[\left(\boldsymbol{U}^\top\vec{r}\right)\otimes\left(\boldsymbol{U}^\top\vec{r}\right)\right]_{i,j}
\end{aligned}$$

Nun transformieren wir den Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{L}' \stackrel{\text{Gl. 7.15}}{=} \boldsymbol{U}^\top \vec{L} \stackrel{\text{Gl. 7.10}}{=} \boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{J}\vec{\omega} \stackrel{\text{Gl. 7.14}}{=} \boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{J}\boldsymbol{U}\vec{\omega}' \stackrel{\text{Gl. 7.18}}{=} \boldsymbol{J}(0)\vec{\omega}' \tag{7.19}$$

und bilden daraus die transformierte Bewegungsgleichung für den Drehimpuls

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{L}} &\stackrel{\text{Gl. 7.9}}{=} \vec{D} \\
\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{U}\vec{L}'\right) = \dot{\boldsymbol{U}}\vec{L}' + \boldsymbol{U}\dot{\vec{L}}' &= \boldsymbol{U}\vec{D}' \\
\stackrel{\boldsymbol{U}^\top\cdot}{\Rightarrow} \qquad \dot{\vec{L}}' &= -\boldsymbol{U}^\top\dot{\boldsymbol{U}}\vec{L}' + \vec{D}' = -\boldsymbol{U}^\top\dot{\boldsymbol{U}}\underbrace{\boldsymbol{U}^\top\boldsymbol{U}}_{\mathbf{1}}\vec{L}' + \vec{D}' \qquad (7.20) \\
&= -\boldsymbol{U}^\top\underbrace{\dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}^\top}_{\vec{\omega}\times}\underbrace{\boldsymbol{U}\vec{L}'}_{\vec{L}} + \vec{D}' \\
&\stackrel{Gl.\ 5.53}{=} -\boldsymbol{U}^\top\left(\vec{\omega}\times\vec{L}\right) + \vec{D}' = -\left(\boldsymbol{U}^\top\vec{\omega}\right)\times\left(\boldsymbol{U}^\top\vec{L}\right) + \vec{D}' \\
&= -\vec{\omega}'\times\vec{L}' + \vec{D}' \qquad (7.21)
\end{aligned}$$

Wir haben verwendet, dass das Kreuzprodukt gedrehter Vektoren gleich dem gedrehten Kreuzprodukt ungedrehter (vertauschter) Vektoren ist[5].

Damit erhalten wir die Bewegungsgleichung der Winkelgeschwindigkeit im körpereigenen Bezugssystem.

BEWEGUNGSGLEICHUNG DES STARREN KÖRPERS
IM KÖRPEREIGENEN BEZUGSSYSTEM

Die Bewegungsgleichung für den Drehimpuls hat im körpereigenen Bezugssystem die Form

$$\dot{\vec{L}}' \stackrel{Gl.\ 7.21}{=} -\vec{\omega}'\times\vec{L}' + \vec{D}' \tag{7.22}$$

mit

$$\vec{L}' \stackrel{Gl.\ 7.19}{=} \boldsymbol{J}(0)\vec{\omega}' \tag{7.23}$$

Also gilt die Bewegungsgleichung für die Winkelgeschwindigkeit im körpereigenen Bezugssystem

$$\boldsymbol{J}(0)\dot{\vec{\omega}}' = -\vec{\omega}'\times\left(\boldsymbol{J}(0)\vec{\omega}'\right) + \vec{D}' \tag{7.24}$$

Beachte, dass der Drehimpuls $\vec{L}'$ im körpereigenen Bezugsssystem anders als der Drehimpuls $\vec{L}$ im Inertialsystem keine Erhaltungsgröße ist, selbst dann wenn kein Drehmoment auf den Körper wirkt.

7.4.1 Hauptachsentransformation des Trägheitstensors und Eulersche Gleichungen

Die Bewegungsgleichung Gl. 7.24 für den Drehimpuls kann weiter vereinfacht werden, indem wir den Trägheitstensor in einer zweiten Transformation auf seine Diagonalform bringen. Man nennt diese Transformation **Hauptachsentransformation** . Dies ist nach dem Harmonischen Oszillator die zweite

[5] Wir verwenden hier

$$\boldsymbol{U}^\top(\vec{\omega}\times\vec{L}) = (\boldsymbol{U}^\top\vec{\omega})\times(\boldsymbol{U}^\top\vec{L})$$

Man kann sich das geometrisch plausibel machen. Das Kreuzprodukt von durch $\boldsymbol{U}$ gedrehten Vektoren ist gleich dem gedrehten Kreuzprodukt ungedrehter Vektoren. Die mathematische Herleitung ist nicht trivial. Siehe Anhang D.5.8

Anwendung der Diagonalisierung, die später in der Quantenmechanik eine zentrale Rolle spielen wird. Falls der Leser noch nicht mit der Matrizendiagonalisierung vertraut ist kann er sich in Anhang D.5.5 auf S. 249 informieren.

Wenn wir den Trägheitstensor $\boldsymbol{J'}$ diagonalisieren, erhalten wir seine Eigenvektoren, die in der Matrix $\boldsymbol{Q}$ zusammengefasst sind, und die Eigenwerte λ_i als Hauptdiagonalelemente der Diagonalmatrix $\boldsymbol{\lambda}$.

$$\boldsymbol{J}' \cdot \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\lambda} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{Q} = \mathbf{1} \tag{7.25}$$

Die zweite Gleichung bestimmt, dass die Eigenvektoren orthonormal gewählt sind.

Der Trägheitstensor $\boldsymbol{J'}$ ist **hermitesch**, d.h. $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}^\dagger \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{J}^*)^\top$. Deshalb sind seine Eigenwerte reell und seine Eigenvektoren können orthonormal gewählt werden.

Diese normierten Eigenvektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ werden **Hauptachsen** des Trägheitstensors genannt und sind wie folgt in der Matrix $\boldsymbol{Q}$ zusammengefasst:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte des Trägheitstensors $\boldsymbol{J}(0)$ können mit den **Trägheitsmomenten** $\mathcal{J}_i$ für die Hauptachsen identifiziert werden

$$\lambda_{i,j} = \mathcal{J}_i \delta_{i,j} \tag{7.26}$$

Es ist häufig nützlich, den urspünglichen Trägheitstensor $\boldsymbol{J'}$ wieder durch seine Eigenwerte $\mathcal{J}_i$ und seine Eigenvektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ auszudrücken:

$$\begin{aligned}
& \boldsymbol{J}'\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\lambda} \\
\Rightarrow \quad & \boldsymbol{J}' = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{Q}^\top \\
\Rightarrow \quad & J'_{i,j} = \sum_{k,\ell} Q_{i,k} \underbrace{\lambda_{k,\ell}}_{\mathcal{J}_k \delta_{k,\ell}} Q_{j,\ell} = \sum_k \mathcal{J}_k Q_{i,k} Q_{j,k} = \mathcal{J}_1 u_i u_j + \mathcal{J}_2 v_i v_j + \mathcal{J}_3 w_i w_j \\
\Rightarrow \quad & \boldsymbol{J}' = \mathcal{J}_1 (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \mathcal{J}_2 (\vec{v} \otimes \vec{v}) + \mathcal{J}_3 (\vec{w} \otimes \vec{w})
\end{aligned}$$

Da die Eigenvektoren orthogonal und normiert sind, ist $\boldsymbol{Q}$ unitär.[6] Das bedeutet, dass $\boldsymbol{Q}$ als Drehung aufgefasst werden kann. Diese Drehung nennt man **Hauptachsentransformation**. Die entsprechend gedrehten Größen sind:

$$\vec{\omega}'' = \boldsymbol{Q}^\top \vec{\omega}' \tag{7.27}$$

$$\vec{L}'' = \boldsymbol{Q}^\top \vec{L}' \tag{7.28}$$

$$\vec{D}'' = \boldsymbol{Q}^\top \vec{D}' \tag{7.29}$$

$$\boldsymbol{J}'' = \underbrace{\boldsymbol{Q}^\top \overbrace{\boldsymbol{J}'}^{\boldsymbol{J}(0)} \boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{\lambda}} \tag{7.30}$$

[6] Dies kann wie folgt gezeigt werden: Die Orthonormalität besagt

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v} = 0$$
$$\vec{u}^2 = \vec{v}^2 = \vec{w}^2 = 1$$

Mit

$$(Q^\top Q)_{ij} = \sum_k Q_{ki} Q_{kj} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{Q}^\top} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{Q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}\vec{v} & \vec{u}\vec{w} \\ \vec{v}\vec{u} & \vec{v}^2 & \vec{v}\vec{w} \\ \vec{w}\vec{u} & \vec{w}\vec{v} & \vec{w}^2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{1}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{Q} = \mathbf{1}$$

folgt, dass $\boldsymbol{Q}$ unitär und daher eine Drehung ist.

Durch die Hauptachsentransformation wird der Trägheitstensor diagonal.

$$\boldsymbol{J''} = \boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{J'} \boldsymbol{Q} \stackrel{\text{Gl. 7.25}}{=} \boldsymbol{\lambda} \stackrel{\text{Gl. 7.26}}{=} \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{J}_3 \end{pmatrix}$$

Nun können wir die Bewegungsgleichung Gl. 7.24 für die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}'$ im körpereigenen Bezugssystem auf das Hauptachsensystem transformieren.

Dazu multiplizieren wir die Bewegungsgleichung Gl. 7.24 von links mit $\boldsymbol{Q}^\top$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J'}\dot{\vec{\omega}}' &\stackrel{\text{Gl. 7.24}}{=} -\vec{\omega}' \times \left(\boldsymbol{J'}\vec{\omega}'\right) + \vec{D}' \\
\Rightarrow \qquad \boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{J'} \underbrace{\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^\top}_{\mathbf{1}} \dot{\vec{\omega}}' &= \boldsymbol{Q}^\top \vec{D}' - \boldsymbol{Q}^\top \left[\vec{\omega}' \times \left(\boldsymbol{J'} \underbrace{\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^\top}_{\mathbf{1}} \vec{\omega}'\right)\right] \\
\underbrace{\boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{J'} \boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{J''}} \underbrace{\boldsymbol{Q}^\top \dot{\vec{\omega}}'}_{\partial_t \vec{\omega}''} &= \underbrace{\boldsymbol{Q}^\top \vec{D}'}_{\vec{D}''} - \left[\underbrace{\boldsymbol{Q}^\top \vec{\omega}'}_{\vec{\omega}''} \times \left(\underbrace{\boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{J'} \boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{J''}} \underbrace{\boldsymbol{Q}^\top \vec{\omega}'}_{\vec{\omega}''}\right)\right] \\
\boldsymbol{J''}\dot{\vec{\omega}}'' &= \vec{D}'' - \left[\vec{\omega}'' \times \left(\boldsymbol{J''}\vec{\omega}''\right)\right]
\end{aligned}$$

Wir haben wieder verwendet, dass ein gedrehtes Kreuzprodukt von zwei Vektoren gleich dem Kreuzprodukt der gedrehten Vektoren ist. Beachte aber, dass diese Operation nur mit Drehmatrizen möglich ist. Die resultierende Gleichung hat dieselbe Form wie die ursprüngliche Gleichung, mit dem einzigen Unterschied, dass die gestrichenen Größen durch die zweifach gestrichenen Größen ersetzt wurden. Allerdings hat $\boldsymbol{J''}$ im Gegensatz zu $\boldsymbol{J'}$ Diagonalform. Die Vereinfachung wird erkennbar wenn wir die Gleichung Komponentenweise aufschreiben. Für die erste Komponente gilt

$$\mathcal{J}_1 \dot{\omega}_1'' = D_1'' - \omega_2'' \mathcal{J}_3 \omega_3'' + \omega_3'' \mathcal{J}_2 \omega_2'' = D_1'' + (\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_3)\omega_2''\omega_3''$$

Ergänzen wir das Gleichungssystem mit den übrigen Komponenten erhalten wir die

EULERSCHEN GLEICHUNGEN

Die Bewegungsgleichung des starren Körpers im körpereigenen Hauptachsensystem

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_1'' &= \frac{1}{\mathcal{J}_1} D_1'' + \frac{\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_3}{\mathcal{J}_1} \omega_2''\omega_3'' \\
\dot{\omega}_2'' &= \frac{1}{\mathcal{J}_2} D_2'' + \frac{\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_2} \omega_3''\omega_1'' \\
\dot{\omega}_3'' &= \frac{1}{\mathcal{J}_3} D_3'' + \frac{\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2}{\mathcal{J}_3} \omega_1''\omega_2''
\end{aligned} \tag{7.31}$$

werden auch Eulersche Gleichungen genannt.

Dies ist ein gekoppeltes *nichtlineares* Gleichungssystem.

Rücktransformation (Das Kapitel ist noch ein Schmarrn)

Hat man die Eulerschen Gleichungen gelöst und damit $\vec{\omega}''(t)$ erhalten, moechte man die Orientierung des Körpers zu einer beliebigen Zeit in unserem ursprünglichen Inertialsystem bestimmen.

Zunächst bleiben wir im Hauptachsensystem und bestimmen die zeitabhängige Transformation vom Anfangszustand auf die Bahnkurve.

$$\vec{r}''(t) = \boldsymbol{U''}(t)\vec{r}''(0)$$

Betrachten wir den Zusammenhang zwischen Winkelgeschwindigkeit und Drehmatrix in unserem Inertialsystem erhalten wir

$$\partial_t \boldsymbol{U}(t) \overset{\text{Gl. 5.52}}{=} \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{U}(t) \overset{\text{Gl. 5.54}}{=} \vec{\omega}(t) \times \mathbf{1}\boldsymbol{U}(t) = \vec{\omega}(t) \times \boldsymbol{U}(t)$$

Diese Gleichung kann transformiert werden

$$\dot{\boldsymbol{U}}''(t) = \vec{\omega}''(t) \times \boldsymbol{U}''(t)$$

....

dann erhalten wir die Transformation auf das Inertialsystem durch

$$\begin{aligned} \vec{\omega}'(t) &\overset{\text{Gl. 7.27}}{=} \boldsymbol{Q}\vec{\omega}''(t) \\ \dot{\boldsymbol{U}}(t) &\overset{\text{Gl. 5.52}}{=} \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{U}(t) \overset{\text{Gl. 5.54}}{=} \vec{\omega}(t) \times \mathbf{1}\boldsymbol{U}(t) = \vec{\omega}(t) \times \boldsymbol{U}(t) \\ \vec{\omega}(t) = \boldsymbol{U}(t)\vec{\omega}'(t) & \end{aligned}$$

Nutze auch das Wirkungsprinzip

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left[\dot{\boldsymbol{U}} \sum_n m_n \vec{r}_n(0) \otimes \vec{r}_n(0) \dot{\boldsymbol{U}}^\top\right] - \mathrm{Sp}\left[\left(\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\top - \mathbf{1}\right)\boldsymbol{\Lambda}\right]$$

7.4.2 Lokale Stabilitätsanalyse des kräftefreien Körpers

Nichtlineare Gleichungssysteme sind im Allgemeinen schwierig zu lösen. Deshalb untersuchen wir das qualitative Verhalten der Bewegung anhand der **lokalen Stabilitätsanalyse**. Die lineare Stabilitätsanalyse ist ein allgemein anwendbares Verfahren, das immer am Anfang einer Lösungsstrategie eines nichtlinearen Gleichungssystems steht. In vielen Fällen ist das Ergebnis der lokalen Stabilitätsanalyse bereits ausreichend. Wir nehmen den starren Körper als Beispiel um diese Methode zu demonstrieren.

Wir befinden uns im körperfesten Bezugssystem. So müssten nun zwar stets die gestrichenen Symbole $\bar{x}$ verwendet werden; der Einfachheit halber verzichten wir darauf:

$$\bar{x} \to x$$

Des weiteren sei im Folgenden:

$$c_1 = \frac{\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_3}{\mathcal{J}_1}; \qquad c_2 = \frac{\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_2}; \qquad c_3 = \frac{\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2}{\mathcal{J}_3};$$

sodass die Bewegungsgleichungen des kräftefreien ($\vec{D} = 0$), starren Körpers im Hauptachsensystem die einfache Form

$$\begin{aligned} \dot{\omega}''_1 &= c_1 \omega''_2 \omega''_3 \\ \dot{\omega}''_2 &= c_2 \omega''_1 \omega''_3 \\ \dot{\omega}''_3 &= c_3 \omega''_1 \omega''_2 \end{aligned} \tag{7.32}$$

annnehmen.

Bei der **lokalen Stabilitätsanalyse** bestimmt man zuerst die Fixpunkte der Bewegung aus dem Gleichungssystem. Anschließend betrachtet man die nähere Umgebung dieser Punkte.

1. Bestimme Fixpunkte der Bewegung

   Als **Fixpunkt** bezeichnet man allgemein die Punkte an denen die Zeitableitungen der dynamischen Größen verschwinden. In unserem Fall sind die dynamischen Größen $\vec{\omega}''(t)$.

Für unseren Fixpunkt muss also gelten:

$$\dot{\omega}''_1 = \dot{\omega}''_2 = \dot{\omega}''_3 = 0$$

Daraus folgt die Bedingung

$$\omega''_2\omega''_3 = \omega''_1\omega''_3 = \omega''_1\omega''_2 = 0$$

An einem Fixpunkt verschwinden also mindestens zwei Komponenten von $\vec{\omega}''$. Das wiederum bedeutet, dass die Fixpunke der Bewegung Drehungen um die Hauptachsen sind.

Die Fixpunkte der Bewegung sind also die folgenden Winkelgeschwindigkeiten.

$$\vec{\omega}''_0 = \begin{pmatrix} \omega''_{0,1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{\omega}''_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega''_{0,2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{\omega}''_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega''_{0,3} \end{pmatrix}$$

Das bedeutet, dass ein kräftefreier Körper, der sich um eine seiner Hauptachsen dreht, seine Winkelgeschwindigkeit beibehält.

2. Lineare Analyse in der Umgebung der Fixpunkte

   Wir untersuchen nun als Beispiel einen der möglichen Fixpunkte, nämlich $\vec{\omega}''_0 = (0, 0, \omega''_{0,3})$. Der Körper dreht sich also um die z-Achse.

   Betrachten wir die Bahn der Winkelgeschwindigkeit, der sich in einer Umgebung des Fixpunktes befindet.

$$\vec{\omega}''(t) = \vec{\omega}''_0 + \delta\vec{\omega}''(t) = \begin{pmatrix} \delta\omega''_1(t) \\ \delta\omega''_2(t) \\ \omega''_{0,3} + \delta\omega''_3(t) \end{pmatrix} + O(\delta\omega''\vec{(t)}^2)$$

   Unter der Einschränkung, dass $\delta\vec{\omega}''(t)$ hinreichend klein ist, können wir die Bewegungsgleichung in $\delta\vec{\omega}''(t)$ zu linearer Ordnung entwickeln und Terme höherer Ordnung vernachlässigen. Durch Einsetzen der obigen Entwicklung in Gl. 7.32 erhält man.

$$\begin{aligned} \delta\dot{\omega}''_1 &= c_1\omega''_2\omega''_3 = c_1\omega''_{0,3}\delta\omega''_2 + O(\delta\omega'')^2 \\ \delta\dot{\omega}''_2 &= c_2\omega''_3\omega''_1 = c_2\omega''_{0,3}\delta\omega''_1 + O(\delta\omega'')^2 \\ \delta\dot{\omega}''_3 &= c_3\omega''_1\omega''_2 = O(\delta\omega'')^2 \end{aligned}$$

   Das lineare Gleichungssystem lässt sich jetzt mit Standardverfahren lösen. Zunächst leiten wir die Bewegungsgleichung für $\dot{\omega}''_1$ nochmals nach der Zeit ab und ersetzen anschließend $\delta\dot{\omega}''_2$ durch die Bewegungsgleichung.

$$\begin{aligned} \delta\ddot{\omega}''_1(t) &= c_1\omega''_{0,3}\delta\dot{\omega}''_2 = c_1c_2(\omega''_{0,3})^2\delta\omega''_1(t) \\ \delta\omega''_2(t) &= \frac{1}{c_1\omega''_{0,3}}\delta\dot{\omega}''_1(t) \\ \delta\omega''_3(t) &= 0 \end{aligned}$$

   Die erste Gleichung gleicht der des harmonischen Oszillators. Wir müssen hierbei zwei Fälle unterscheiden, je nachdem ob die "Kraftkonstante" $c_1c_2(\omega''_{0,3})^2$ größer oder kleiner als Null ist.

   Fall 1: $c_1 \cdot c_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 > \mathcal{J}_3$ oder $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 < \mathcal{J}_3$

   Wir betrachten also den Fall, dass sich der Körper ungefähr um die Hauptachse mit dem kleinsten oder dem größten Drehmoment dreht. (Beachte dass wir den Fixpunkt betrachten bei dem $\vec{\omega}''_0$ in die z-Richtung, $\vec{e}_3$ zeigt.)

Verwende das Lösungsprinzip des harmonischen Oszillators:

$$\begin{aligned}
\delta\omega_1''(t) &= A\cos\left(\pm\sqrt{|c_1c_2|}\cdot\omega_{0,3}''t+\phi\right)\\
\delta\omega_2''(t) &= -A\cdot\frac{1}{c_1\omega_{0,3}''}\left(\pm\sqrt{|c_1c_2|}\cdot\omega_{0,3}''\right)\sin\left(\pm\sqrt{|c_1c_2|}\cdot\omega_{0,3}''t+\phi\right)\\
&= -A\cdot\frac{\pm\sqrt{|c_1c_2|}}{c_1}\sin\left(\pm\sqrt{|c_1c_2|}\cdot\omega_{0,3}''t+\phi\right)
\end{aligned}$$

Beachte, dass $\pm$ entweder für das positive oder negative Vorzeichen steht. Die Wahl des Vorzeichens ist beliebig, muss aber konsistent gewählt werden.

Die Winkelgeschwindigkeit durchläuft also Elipsen mit dem Zentrum im Fixpunkt. Diese Bewegung nennt man **Nutation**. Die Nutation ist die Ursache der Flatterbewegung eines Diskus, wenn seine Drehung nicht exakt mit seiner Hauptachse übereinstimmt.

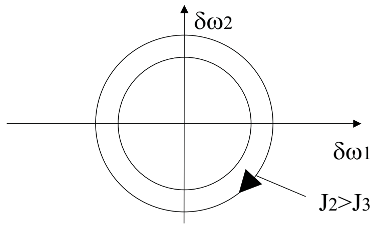


Abb. 7.2: Nutation

`Editor: Das ist etwas kryptisch. Siehe Demtröder` Nutation: Die Rotationsachse dreht sich entweder um die Hauptachse mit dem größten oder die mit dem kleinsten Trägheitsmoment.

Fall 2: $c_1\cdot c_2>0 \quad\Rightarrow\quad \mathcal{J}_1>\mathcal{J}_3>\mathcal{J}_2$ oder $\mathcal{J}_1<\mathcal{J}_3<\mathcal{J}_2$

$$\begin{aligned}
\delta\omega_1''(t) &= A\exp\left\{\pm\sqrt{c_1c_2}\cdot\omega_{0,3}''t\right\}\\
\delta\omega_2''(t) &= \pm A\frac{\sqrt{c_1c_2}}{c_1}\cdot\exp\left\{\pm\sqrt{c_1c_2}\cdot\omega_{0,3}''t\right\}
\end{aligned}$$

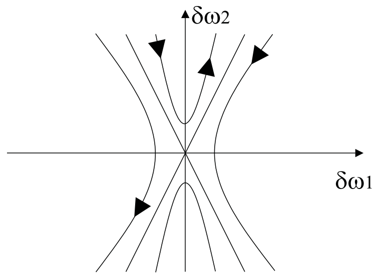


Abb. 7.3: Instabile Bewegung

Die Bewegung ist instabil: Die Drehachse entfernt sich von der Hauptachse mit mittlerem Drehmoment.

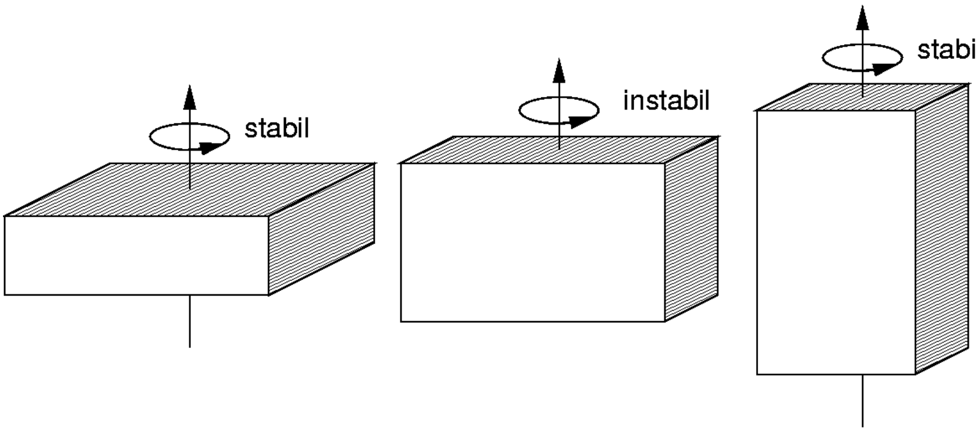


Abb. 7.4: Die Drehung um die Hauptachsen mit den kleinsten und die mit dem größten Drehmoment ist stabil. Die Drehung um die Hauptachse mit dem dazwischenliegendem Drehmoment ist instabil.

Anwendung auf den kräftefreien symmetrischen Kreisel

Ein Kreisel heißt symmetrisch, wenn zwei seiner Trägheitsmomente identisch sind. OBdA wählen wir $J_1 = J_2$.

Mit dieser Wahl haben die Eulerschen Gleichungen Gl. 7.31, im kräftefreien Fall ($\vec{D} = 0$) die Form

$$\dot{\omega}''_1 = -\Omega\omega''_2$$
$$\dot{\omega}''_2 = \Omega\omega''_1$$
$$\dot{\omega}''_3 = 0$$

Dabei ist $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{J_3 - J_1}{J_1}\omega''_3$.

Wir leiten die erste Gleichung nach der Zeit ab und setzen die zweite Gleichung ein:

$$\ddot{\omega}''_1 = -\Omega\dot{\omega}''_2 = -\Omega^2\omega''_1$$

Diese Gleichung ist analog zum harmonischen Oszillator, sodass wir die Lösung direkt hinschreiben können

$$\omega''_1(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$$

Einsetzen in die erste Gleichung und Auflösen nach ω''_2 liefert die Lösung für ω''_2:

$$\omega''_2(t) = -\frac{1}{\Omega}\dot{\omega}''_1 = -\frac{1}{\Omega}\left(-A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)\right) = A\sin(\Omega t) - B\cos(\Omega t)$$

Die letzte Gleichung für ω''_3 sagt einfach, dass ω''_3 konstant ist.

$$\omega''_3(t) = C$$

Dabei sind A, B, C reelle Konstanten, welche durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden müssen.

Die Lösung sagt, dass sich die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}''(t)$ auf einer Kreisbahn um die z-Achse bewegt. Diese Bewegung nennt man Präzession. "Die Drehachse $\vec{\omega}''$ präzessiert um die z-Achse"

`Editor: Diskutiere die resultierende Physik (Kreiselkompass?) Bild!`

Wie wir im nächsten Band ΦSX: Elektrodynamik sehen werden, ist das System ganz analog zu dem eines geladenen Punktteilchens im homogenen magnetischen Feld.

7.5 Symmetrischer Kreisel bei einem Drehmoment: Präzession

Editor: This section is not finished!

Für eine anschauliche Beschreibung sei der Leser an das Lehrbuch von Demtröder Experimentalphysik verwiesen

Betrachten wir einen Kreisel, der sich um eine Achse dreht, die am einen Ende fest aufgehängt ist, aber dessen anderes Ende frei beweglich ist. Die Drehachse sei zu Beginn horizontal. Aufgrund der Schwerkraftg wirkt eine Kraft auf die Achse, die versucht, die Achse in die Vertikale zu verkippen. Eine Verkippung der Drehachse des Kreisels führt jedoch dazu, dass die Massepunkte die sich aufgrund der Drehbewegung vertikal bewegen, ihre Richtung und damit Ihren Impuls ändern müssen. Die Trägheitskraft ist für sich aufwärts und abwärts bewegende Massepunkte entgegengesetzt. Die Kräfte erzeugen daher ein Drehmoment um die vertikale Achse. Der Kreisel **präzessiert** also um die vertikale Achse.

Da die Drehachse des Kreisels aber nun um die vertikale Achse rotiert, tritt ein ähnlicher Effekt wie der oben beschriebene, aber mit einer anderen Achse, auf. Die Verkippung der Drehachse um die Vertikale erfordert, dass die Massepunkte oben und unten auf dem Rad ihre Richtung ändern. Wiederum wird ein Drehmoment erzeugt, das aber nun horizontal ausgerichtet ist und gerade dem ursprünglichen Drehmoment, das durch die Schwerkraft verursacht wurde, entgegenwirkt. Das Herunterkippen des Kreisels wird also verhindert.

Wir betrachten der Einfachheit einen symmetrischen Kreisel mit $J_2 = J_3$, der um seine Achse $\vec{e}_1$ rotiert, d.h. $\vec{\omega}'' = |\omega''|\vec{e}_1$. In diesem Fall haben die Eulerschen Gleichungen, Gl. 7.31, die Form

$$\dot{\omega}_i'' = \frac{1}{\mathcal{J}_i} D_i'' \tag{7.33}$$

Da die Kraft in Richtung $\vec{e}_3$ zeigt, d.h. $\vec{F} = -Mg\vec{e}_3$, ist das Drehmoment $\vec{D}'' = \vec{r} \times \vec{F} = Mgd\vec{e}_2$. Die Winkelgeschwindigkeit präzessiert also mit $\dot{\omega}_2'' = \frac{Mgd}{J_2}$. Dabei ist M die Masse des Kreisels und d der Abstand des Schwerpunkts des Kreisels von Aufhängepunkt.

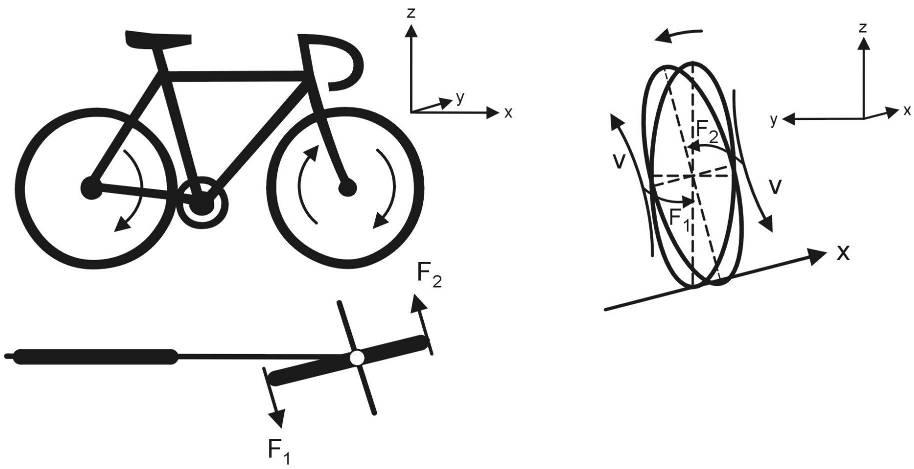


Abb. 7.5: Darstellung der Funktion eines Fahrrads. Kippt das Fahrrad, führt die Präzession des Vorderrads dazu, dass es in die Kurve lenkt und sich dadurch stabilisiert. Die Ursache der Präzession ist die folgende: Kippt das Rad lach links, werden die Massepunkte, die sich hinten am Vorderrad nach oben bewegen nach links abgelenkt. Deshalb üben sie eine Trägheitskraft nach rechts aus. Genauso werden die Massepunkte auf der Vorderseite des Rads nach rechts abgelenkt und führen zu einer Trägheitskraft nach links. Als Resultat dreht das Vorderrad nach links. Wäre das Hinterrad beweglich und das Vorderrad starr, würde sich das Hinterrad nach links verdrehen und damit das Fahrrad aber nach rechts, also aus der Fallbewegung hinaus, lenken. Deshalb sollte man besser nicht freihändig rückwärts fahren.

Chapter 8

Hamilton-Formalismus (4h)

Abb. 8.1: William Rowan Hamilton

Im Zusammenhang mit dem Noethertheorem haben wir die besondere Bedeutung von Energie und Impuls kennengelernt: Alle symmetriebedingten Erhaltungsgrößen lassen sich durch Energie und Impuls darstellen. Es erscheint naheliegend, diese Größen auch zur Grundlage der Beschreibung zu machen. Dies wird im Hamilton-Formalismus erreicht.

Der Hamilton-Formalismus ist dem Lagrangeformalismus equivalent. Er hat aber den Vorteil, dass er auf Differentialgleichungen erster Ordnung führt, und in Größen wie Energie und Impulsen formuliert ist, die in vielen Fällen konstant sind.

Nach einer Eingewöhnungsphase ist der Hamilton-Formalismus anschaulicher als der Lagrangeformalismus. Deshalb ist er sehr weit verbreitet. Das liegt daran, dass man leicht mit Energien vertraut wird und dadurch die Gesamtenergie für viele Systeme gut aufschreiben kann. Die Gesamtenergie wiederum ist die grundlegende Größe für den Hamiltonformalismus.

Die Hamiltonfunktion ist der Ausgangspunkt für die quantenmechanische Beschreibung eines Systems: Aus der Hamiltonfunktion erhält man den Hamiltonoperator der Quantenmechanik und damit die Schrödinger Gleichung.

Der Hamiltonformalismus ist neben dem Lagrangeformalismus und den Newtonschen Bewegungsgleichungen die dritte Art, um die Dynamik zu beschreiben.

8.1 Hamiltonsche Gleichung

Energie und Impuls sind wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
&\text{Impuls} \qquad && p_i \stackrel{\text{Gl. 6.5}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} \\
&\text{Energie} \qquad && E \stackrel{\text{Gl. 6.6}}{=} \underbrace{\sum_i v_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} - \mathcal{L}}_{\substack{\text{Form einer}\\ \text{Lagrange-Transformation}}} \quad = \vec{p}\vec{v} - \mathcal{L}
\end{aligned}
$$

Im folgenden werden wir Bewegungsgleichungen ableiten, welche mit Hilfe diese Größen formuliert werden. Dazu definieren wir zunächst die Hamiltonfunktion, welche die Energie als Funktion der Koordinaten x_i, der Impulse p_i und der Zeit ausdrückt.

Definition 8.1 *HAMILTON-FUNKTION*
Die Hamilton Funktion ist definiert durch

$$\mathcal{H}(\vec{p},\vec{x},t) = \sum_i p_i v_i - \mathcal{L}(\vec{x},\vec{v},t) \tag{8.1}$$

wobei x_i verallgemeinerte Koordinaten sind. Die Geschwindigkeiten $v_i(\vec{p},\vec{x})$ sind als Funktion der Impulse und der Koordinaten dargestellt, die man durch Auflösen von $p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_i}$ erhält.

Aus den Ableitungen der Hamilton-Funktion nach den Impulsen und Koordinaten erhalten wir mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen Bewegungsgleichungen für Koordinaten und Impulse. Diese werden **kanonische Gleichungen** oder **Hamiltonsche Gleichungen** genannt. Aus

$$\mathcal{H}(\vec{p},\vec{x},t) = \sum_i p_i v_i(\vec{p},\vec{x},t) - \mathcal{L}(\vec{x},\vec{v}(\vec{p},\vec{x},t),t)$$

erhält man die Zeitableitungen der Impulse und Koordinaten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i} &= v_i + \sum_j p_j \frac{\partial v_j}{\partial p_i} - \sum_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_j}\frac{\partial v_j}{\partial p_i} \\
&= v_i + \sum_j \underbrace{\left(p_j - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_j}\right)}_{=0} \frac{\partial v_j}{\partial p_i} = v_i = \dot{x}_i \\
\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_i} &= \sum_j p_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i} - \sum_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \\
&= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i} + \sum_j \underbrace{\left(p_j - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_j}\right)}_{=0} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \stackrel{ELG}{=} -\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_i}\right] = -\dot{p}_i
\end{aligned}$$

HAMILTONSCHE ODER KANONISCHE GLEICHUNGEN

$$\dot{x}_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_i} \tag{8.2}$$

Anwendung

Um das Prinzip zu veranschaulichen, wenden wir es auf einen Lagrangian der Form

$$\mathcal{L}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$$

an.

Zunächst bestimmen wir die Hamilton-Funktion

$$\mathcal{H}(p,x) \stackrel{Gl.\ 8.1}{=} p\dot{x} - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) \stackrel{Gl.\ 6.5}{=} \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

Dabei haben wir die Gleichung für den kanonischen Impuls Gl. 6.5 auf die Lagrangefunktion angewandt, und die resultierende beziehung $p = m\dot{x}$ nach $\dot{x}$ aufgelöst und eingesetzt.

Durch Einsetzen in die kanonischen Gleichungen, Gl. 8.2, erhalten wir

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \qquad \wedge \qquad \dot{p} = -\frac{dV}{dx}$$

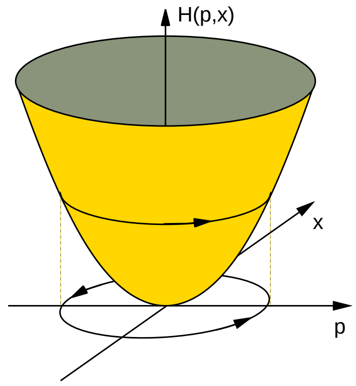


Abb. 8.2: Hamilton-Funktion eines eindimensionalen harmonischen Oszillators $H(p,x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}cx^2$ im Phasenraum und die Bahnkurve, welche aus den Hamiltonschen Gleichungen resultiert.

was der Newtonschen Bewegungsgleichung entspricht.

$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{1}{m}\frac{dV}{dx} = -\frac{1}{m}F \Rightarrow m\ddot{x} = F$$

Äquivalenz von Hamiltonschen Gleichungen und den Euler-Lagrange-Gleichungen

Bisher haben wir die kanonischen Gleichungen aus dem Lagrangeformalismus abgeleitet. Hier zeigen wir, dass wir die Euler-Lagrange-Gleichungen umgekehrt aus den kanonischen Gleichungen ableiten können. Dadurch wird gezeigt, dass der Informationsgehalt der beiden Formalismen absolut identisch ist.

Dazu verwenden wir die kanonischen Gleichungen und die Definitionsgleichungen für Impuls und Hamilton-Funktion.

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}}_{p_i} = \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_j p_j v_j(\vec{p},\vec{x},t) - \mathcal{L}(\vec{x},\vec{v}(\vec{p},\vec{x},t),t)\Big)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}}_{-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}} - \sum_j \underbrace{\left[p_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_j}\right]}_{=0} \frac{\partial v_j(\vec{p},\vec{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}$$

8.2 Phasenraum

Anstelle einer Bewegungsgleichung zweiter Ordnung für jede Koordinate x_i, wie in den Newtonschen Bewegungsgleichungen oder den Euler-Lagrange-Gleichungen, erhalten wir hier jeweils zwei Bewegungsgleichungen erster Ordnung. Die Anfangsbedingungen sind vollständig durch die Werte der Impulse und Koordinaten bestimmt. Dadurch lassen sich alle möglichen Anfangsbedingungen als Punkte im sogenannten Phasenraum darstellen.

Definition 8.2 *PHASENRAUM*
Der Phasenraum ist der $2N$-dimensionale Raum, der von den Koordinaten und den zugehörigen Impulsen aufgespannt wird. Dabei ist N die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems, also die Anzahl der Koordinaten. [a]

[a] Ein System von 5 Teilchen im dreidimensionalen Raum hat 15 Freiheitsgrade.

Der **Zustand** eines mechanischen Systems wird vollständig durch einen Punkt im Phasenraum beschrieben. Der Zustand eines Systems bestimmt, zusammen mit den Bewegungsgleichungen, die zukünftige Entwicklung des Systems eindeutig.

- Die kanonischen Gleichungen sind Differentialgleichungen erster Ordnung im Phasenraum.
- Ein Punkt im Phasenraum als Anfangswert legt die Trajektorien eindeutig fest.

8.3 Dichten, Stromdichten und Teilchenerhaltung

Häufig will man nicht ein einzelnes Teilchen betrachten sondern einen Schwarm von Teilchen. Dieser Schwarm mag eine Menge tatsaechlicher Teilchen sein oder er mag eine Wahrscheinlichkeitsverteilung möglicher Zustände eines Teilchens sein. Eine Wahrscheinlichkeitsbetrachtung ist sinnvoll, wenn man die Auswirkung einer Unsicherheit in den Anfangsbedingungen betrachten möchte.

Die betrachtung eines Schwarms von Teilchen ist dann interessant, wenn man den Transport nicht wechselwirkender Teilchen untersucht. Zum Beispiel ist eine Schwarmbetrachtung in einem 6-dimensionalen Phasenraum deutlich einfacher als die Bestimmung der hochdimensionalen Trajektorie eines Vielteilchensystems. Ist die Wechselwirkung schwach, so kann man die Schwarmbetrachtung erweitern indem man Stöße zwischen den Teilchen mit berücksichtigt. Dies ist dann die sogenannte **Boltzmann Gleichung**.

Ein anderer Begriff für Schwarm in der Wahrscheinlichkeitsdeutung ist das Ensembles. Dabei ist der Begriff nicht auf einen Schwarm von Teilchen beschränkt. Statt eines Schwarms von Teilchens kann man genauso einen Schwarm beliebig anderer Systeme betrachten.

Definition 8.3 *TEILCHENDICHTE IM DREIDIMENSIONALN REALRAUM*
Es sei N_Ω die Anzahl der Teilchen in einem Raumgebiet Ω. Für einen Ort $\vec{r}$ betrachten wir nun einen Folge von Gebieten Ω deren maximaler Durchmesser gegen Null konvergiert, und bei der $\vec{r}$ in jedem der Gebiete enthalten ist. Dann erhalten wir die Teilchendichte $\varrho(\vec{r},t)$ am Ort $\vec{r}$ als Grenzwert der Teilchenzahl pro Volumen.

$$\varrho(\vec{r}) = \lim_{|\Omega|\to 0;\vec{r}\in\Omega} \frac{N_\Omega}{|\Omega|}$$

Mit dieser Definition erhalten wir die Anzahl der Teilchen N_Ω in einem beliebigen Raumgebiet Ω als das Integral der Teilchendichte $\varrho(\vec{r})$ über das Raumgebiet Ω:

$$N_\Omega = \int_\Omega \varrho(\vec{r})\, d^3r$$

8.3.1 Teilchenzahlerhaltung

Bevor wir zu den Hamiltonschen Gleichungen zurückkehren, untersuchen wir die Prinzipien des Teilchenzahlerhaltungssatzes anhand eines einfacheren, und zugleich allgemeineren System.

Es sei ein Flussfeld $\vec{v}(\vec{r},t)$ gegeben und eine Schar von Teilchen, welche die Bewegunggleichungen

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}(\vec{r},t)$$

erfüllen. Zur Zeit $t=0$ besitzen die Teilchen die Dichteverteilung $\varrho(\vec{r},0)$.

Wir wollen nun aus den Bewegungsgleichungen für die Teilchen, eine Bewegungsgleichung für die Dichte $\varrho(\vec{r},t)$ ableiten. Diese wird die Form einer partiellen Differentialgleichung annehmen.

Dazu betrachte man die zeitliche Änderung der Anzahl der Teilchen in einem Volumen Ω zu den Zeiten t und $t+\Delta t$:

$$\begin{aligned} N_\Omega(t+\Delta t) &= N_\Omega(t) + \left.\frac{dN_\Omega}{dt}\right|_t \Delta t + O(\Delta t^2) \\ &= N_\Omega(t) - \oint_{\partial\Omega} \varrho(\vec{r},t)\cdot\vec{v}(\vec{r},t)\Delta t \; d\vec{A} + O(\Delta t)^2 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Dabei ist $\partial\Omega$ die geschlossene Oberfläche des Volumens Ω.

Gl. 8.3 ergibt sich aus der Tatsache, dass sich die Zahl der Teilchen im Volumen Ω nur dadurch ändert, dass Teilchen das Volumengebiet verlassen oder in das Gebiet eintreten. Dabei müssen diese Teilchen die Oberfläche passieren. Die Zahl der Teilchen, die ein Flächenelement $d\vec{A}$ der Oberfläche $\partial\Omega$ in einem infinitesimalen Zeitintervall Δt passieren ist $\varrho d\vec{A}\vec{v}\Delta t$. Dies ist in Abb. 8.3 dargestellt.

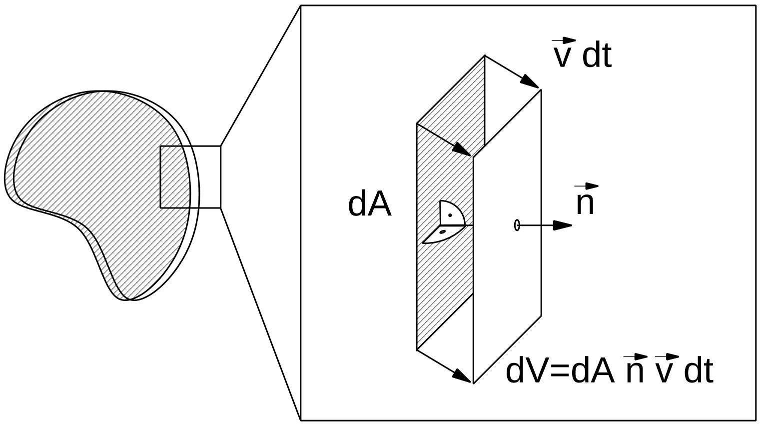


Abb. 8.3: Die Anzahl der Teilchen, die in einem Zeitintervall dt das Volumen Ω durch das Oberflächenelement dA verlassen, ist gleich der Dichte auf der Oberfläche multipliziert mit dem Volumen $dV = dA\vec{n}\vec{v}dt$. Dabei ist $\vec{n}$ der Normalenvektor auf der Oberfläche und $\vec{v}$ ist die Geschwindigkeit der Teilchen auf der Oberfläche. Alle Teilchen, die im Intervall dt durch die Oberflächenelement geflossen sind, liegen im Volumen dV. Durch Integration über die Oberfläche $\partial\Omega$ des Volumens Ω erhalten wir die Gesamtzahl $dN = \oint_{\partial\Omega} d\vec{A}\rho\vec{v}dt$ der Teilchen, die das Volumen im Zeitintervall verlassen. Dabei ist $d\vec{A} = dA\vec{n}$. Wir erhalten also $\dot{N} = \oint_{\partial\Omega} d\vec{A}\rho\vec{v}dt$

Mit Hilfe von Gl. 8.3 führen wir die zeitliche Änderung der Teilchenzahl auf ein Oberfächenintegral zurück.

$$\begin{aligned} \left.\frac{dN_\Omega}{dt}\right|_t &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta N_\Omega}{\Delta t} = -\oint_{\partial\Omega} d\vec{A}\,\varrho\cdot\vec{v} \\ \int_\Omega d^3r\;\dot{\varrho} &= -\oint_{\partial\Omega} d\vec{A}\,\varrho\cdot\vec{v} \end{aligned}$$

Mit dem Gaußschen Satz[1] lässt sich das Volumenintegral in ein Oberflächenintegral überführen.

$$\int_\Omega d^3r\,\Big(\dot{\varrho} + \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\varrho)\Big) = 0$$

[1] Gaußscher Satz

$$\int_\Omega \vec{\nabla}\vec{f}(\vec{r})\,d^3r = \oint_{\partial\Omega} \vec{f}(\vec{r})\,d\vec{A}$$

Da diese Aussage für beliebige Volumen gilt, muss der Integrand verschwinden, wodurch wir die differentielle Form des Erhaltungssatzes erhalten.

$$\dot{\varrho} + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \varrho) = 0 \tag{8.4}$$

Diese Gleichung wird in Anlehnung zur Hydrodynamik auch Kontinuitätsgleichung genannt. Der Erhaltungssatz ist zugleich die Bewegungsgleichung für die Dichte.

Wir nennen diese Aussage Erhaltungssatz, weil er auf der Voraussetzung beruht, dass Teilchen nicht erzeugt oder vernichtet werden. In der Theoretischen Physik spielen Erhaltungssätze genauso wie Symmetrien eine fundamentale Rolle. Es gibt Erhaltungssätze für Teilchen, Energiedichten, Impulsdichten, Ladungsdichten etc. Alle haben eine ähnliche Form wie der Teilchenerhaltungssatz. Die Erhaltungssätze haben manchmal eine etwas unanschauliche Form. Deshalb ist die Analogie zum Teilchenerhaltungssatz nützlich für die Vorstellung.

Der Erhaltungssatz hat die intuitive Bedeutung, dass die Teilchendichte ansteigt, wenn ein Teilchenstrom in ein Volumen hineinfließt. Deshalb nennt man die Größe

$$\vec{j}(\vec{r}, t)) = \vec{v}(\vec{r}, t)\varrho(\vec{r}, t) \tag{8.5}$$

auch **Stromdichte**. Damit erhalten wir die allgemeine Form eines Erhaltungssatzes

ALLGEMEINE FORM EINES ERHALTUNGSSATZES

Die Kontinuitätsgleichung Gl. 8.4 ergibt zusamen mit der Form der Stromdichte Gl. 8.5 die allgemeine Form des Erhaltungssatzes fuer eine kontinuierliche Größe

$$\dot{\varrho} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0 \tag{8.6}$$

ϱ ist die Dichte der Erhaltungsgröße und $\vec{j}$ seine Stromdichte

In vielen Fällen gibt es keinen Erhaltungssatz in dieser Form. Dann stehen anstelle der Null auf der rechten Seite weitere Terme, die man Quellen und Senken der Erhaltungsgröße nennt. Sie entsprechen im Falle von Teilchen der Erzeugung und der Vernichtung von Teilchen.

8.3.2 Bewegungsgleichung der Phasenraumdichte

Jetzt wird der Teilchenzahlerhaltungssatz auf den Fluss im Phasenraum verallgemeinert, der durch die kanonischen Gleichungen gegeben ist. Fassen wir den Teilchenzahlerhaltungssatz als Bewegungsgleichung für die Dichte auf, so erhalten wir damit die Bewegungsgleichung für die Teilchendichte $\varrho(\vec{p}, \vec{x}, t)$ im Phasenraum. Ersetzen wir in der Kontinuitätsgleichung Gl. 8.4 den Positionsvektor durch einen $2N$-dimensionalen Vektor, der durch die Koordinaten $\vec{x}$ und Impulse $\vec{p}$ aufgebaut ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 &= \dot{\varrho} + \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial p_i}\Big(\varrho(\vec{x}, \vec{p}, t) \cdot \underbrace{\dot{p}_i(\vec{x}, \vec{p}, t)}_{-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}}\Big) + \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\varrho(\vec{x}, \vec{p}, t) \cdot \underbrace{v_i(\vec{x}, \vec{p}, t)}_{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}}\Big) \right] \\
&= \dot{\varrho} + \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\varrho \cdot \left[-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}\right]\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varrho \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}\right) \right] \\
&= \dot{\varrho} + \sum_i \left[-\frac{\partial \varrho}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} - \varrho \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x_i p_i} + \frac{\partial \varrho}{\partial x_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} + \varrho \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x_i p_i} \right].
\end{aligned}$$

Die beiden Terme mit dem Vorfaktor ϱ heben sich weg. So bleibt:

BEWEGUNGSGLEICHUNG DER TEILCHENDICHTE IM PHASENRAUM

$$\dot{\varrho} = \sum_i \left[\frac{\partial \varrho}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} - \frac{\partial \varrho}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \right] \tag{8.7}$$

Dies entspricht der Struktur einer Poissonklammer die anschließend (siehe Def. 8.4) definiert wird.

$$\dot{\varrho} = \left\{ \mathcal{H}, \varrho \right\}$$

Definition 8.4 *POISSONKLAMMER*

$$\left\{ A, B \right\} = \sum_i \left[\frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial x_i} \right]$$

Um die Bedeutung der Poissonklammern ein wenig zu verdeutlichen, soll hier eine Anwendung aus der Statistischen Physik angerissen werden: In der statistischen Physik spielen zeitlich konstante Dichten eine besondere Rolle (Gleichgewichtsphänomene). Solche erhält man für ein zeitlich unveränderliches System ($\frac{\partial H}{\partial t} = 0$) durch den Ansatz

$$\varrho(\vec{p}, \vec{x}, t) = f(\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t)) \qquad \text{mit } \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$$

Dann gilt[2]:

$$\dot{\varrho} = \sum_i f' \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - f' \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} = 0$$

In diese Klasse fallen zum Beispiel

- die mikrokanonische Gesamtheit mit $\varrho(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{Z} \delta(H(\vec{x}, \vec{p}) - E)$, die nur aus Zuständen mit derselben Energie E besteht
- die kanonische Gesamtheit mit $\varrho(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{Z} \exp\left[-\frac{1}{k_B T} H(\vec{x}, \vec{p}) \right]$, die eine Verteilung bei konstanter Temperatur beschreibt.

Z, Zustandssumme genannt, ist in beiden Fällen ein Normierungsfaktor.

8.4 Liouville-Theorem (Eigenstudium)

Das Liouville theorem beschreibt eine fundamentale Eigenschaft der Dynamik Hamilton'scher Systeme.

LIOUVILLE-THEOREM

$$\frac{d}{dt} |\Omega(t)| = 0$$

Das Volumen $|\Omega(t)|$ eines Bereichs $\Omega(t)$ im Phasenraum, das sich selbst mit den kanonischen Gleichungen bewegt, bleibt erhalten.

[2] mit $f' = \frac{df}{d\mathcal{H}}$

Das Liouville-Theorem gilt nur für besondere Bewegungsgleichungen, wie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen. Systeme, bei denen das Phasenraumvolumen mit der Zeit schrumpft, nennt man dissipative Systeme. Ein Beispiel dafür sind Teilchen mit Reibung. Mit der Zeit landen alle Pfade eines dissipativen Systems in einem oder mehreren metastabilen Punkten.[3]

Der Einfachheit halber, fassen wir die Orts- und Impulsvektoren in einen 6-dimensionalen Vektor $\vec{x} = (\vec{r}, \vec{p})$ des Phasenraums zusammen. In dieser Darstellung erhalten die Bewegungsgleichungen die einfache Form

$$\dot{\vec{x}} = \vec{v}(\vec{x})$$

Ausgeschrieben lautet diese Gleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\nabla}_p H(\vec{p}, \vec{r}) \\ -\vec{\nabla}_r H(\vec{p}, \vec{r}) \end{pmatrix}$$

Zum Beweis des Liouville theorems betrachten wir die Divergenz der Bewegungsgleichungen im Phasenraum. Stammen die Bewegungsgleichungen aus einem Hamiltonprinzip, dann verschwindet die Divergenz $\vec{\nabla}\vec{v}$ des Geschwindigkeitsfeldes, was man wie folgt sehen kann:

$$\vec{\nabla}\vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{\nabla}_r \\ \vec{\nabla}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\nabla}_p H(\vec{p}, \vec{r}) \\ -\vec{\nabla}_r H(\vec{p}, \vec{r}) \end{pmatrix} = \vec{\nabla}_r \vec{\nabla}_p H(\vec{p}, \vec{r}) - \vec{\nabla}_p \vec{\nabla}_r H(\vec{p}, \vec{r}) = 0 \tag{8.8}$$

Im Folgenden zeigen wir dass die Divergenz eines Geschwindigkeitsfeldes direkt mit der Änderung des Volumens eines Bereiches zusammenghängt.

Dazu betrachten wir einen Phasenraumbereich $\Omega(t)$, der sich mit dem Geschwindigkeitsfeld mitbewegt. Die Form und Lage des Bereichs $\Omega(t)$ verändert sich also gerade so, dass jeder Punkt, der den Bewegungsgleichungen folgt und der sich anfangs in dem Bereich befindet, auf alle Zeiten in dem Bereich bleibt.

Die Änderung des Volumens eines Bereichs Omega, das sich mit einem Geschwindigkeitsfeld mitbewegt ist gleich dem Integral der Divergenz über das Volumen.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|\Omega(t)| &= \frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega(t)} d^6x\ 1\right) \\
&= \lim_{\Delta \longrightarrow 0} \frac{1}{\Delta}\left[\left(\int_{\Omega(t+\Delta)} d^6x\ 1\right) - \left(\int_{\Omega(t)} d^6x\ 1\right)\right] \\
&= \lim_{\Delta \longrightarrow 0} \frac{1}{\Delta}\left[\oint_{\partial\Omega(t)} d\vec{A}\vec{v}\Delta + O(\Delta^2)\right] \\
&= \oint_{\partial\Omega(t)} d\vec{A}\vec{v} \\
&= \oint_{\Omega(t)} d^6x\ \vec{\nabla}\vec{v}
\end{aligned}$$

Damit ist, zusammen mit dem Nachweis dass die Divergenz verschwindet, das Liouville theorem bewiesen.

Der Zusammenhang zwischen Volumenänderung und divergenz ist sehr allgemein und ordnet der **Divergenz** eine anschauliche Bedeutung zu. Ist die Divergenz positiv, dann strebt das Vektor auseinander, ist die positiv, dann streben die Vektorpfeile zusammen.

[3] Der Schluss ist nicht zwingend. Es gibt auch dissipative Systeme, bei denen die Pfade in einen geschlossenen Pfad oder auch komplexere Objekte hineinlaufen, aber nicht auf einem Punkt liegen bleiben.

8.5 Zeitentwicklung von Mittelwerten

Eine Messgröße, oder Observable[4], kann immer als eine Funktion $\mathcal{O}(\vec{p},\vec{q})$ der Koordinaten und Impulse dargestellt werden, da letztere den Zustand eines klassischen Systems vollständig festlegt. Zum Beispiel kann die kinetische Energie durch $E_{kin} = \sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i}$ als Funktion der Impulse ausgedrückt werden.

Definition 8.5 *MITTELWERT*
Der Mittelwert $\langle\mathcal{O}\rangle$ ist durch[a]*:*

$$\langle\mathcal{O}\rangle = \int d^n x \int d^n p \cdot \varrho(\vec{p},\vec{x},t)\mathcal{O}(\vec{p},\vec{x},t)$$

definiert

[a]Zur Notation:

$$\int d^n x = \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_n = \prod_{i=1}^{n} \int dx_i$$

Diese Definition des Mittelwerts ergibt sich aus der bekannten Formel des arithmetischen Mittelwertes $\langle\mathcal{O}\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_n \mathcal{O}_n$ wie folgt: Letztere gibt den Mittelwert von n Messungen der Größe $\mathcal{O}$ an, von denen die n-te Messung den Wert $\mathcal{O}_n$ liefert. Betrachte die Wahrscheinlichkeit, das System an einem gewissen Zustand (Ort (p,q) im Phasenraum) zu finden. Multipliziert man diese Wahrscheinlichkeit mit dem Messwert $\mathcal{O}(p,q)$, welche man erhält, wenn das System sich in diesem Zustand befindet, und integriert über alle möglichen Zustände erhält man denselben Mittelwert, wie durch die Stichprobenanalyse $\langle\mathcal{O}\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_n \mathcal{O}_n$.

Man betrachte die zeitliche Änderung des Mittelwertes:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle\mathcal{O}\rangle &= \int d^n x \int d^n p \left[\frac{\partial\varrho}{\partial t}\mathcal{O} + \varrho\frac{\partial\mathcal{O}}{\partial t}\right] \\
&\overset{Gl.\ 8.7}{=} \int d^n x \int d^n p \left[\left(\sum_i \frac{\partial\varrho}{\partial p_i}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_i} - \frac{\partial\varrho}{\partial x_i}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}\right)\mathcal{O} + \varrho\frac{\partial\mathcal{O}}{\partial t}\right] \\
&\overset{\text{Produktregel}}{=} \int d^n x \int d^n p \cdot \left[\sum_i \left\{ \overbrace{\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\varrho\cdot\mathcal{O}\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_i}\right)}^{=0 \text{ nach Gaussschem Satz}} - \varrho\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\mathcal{O}\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_i}\right)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varrho\cdot\mathcal{O}\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}\right)}_{=0 \text{ nach Gaussschem Satz}} + \varrho\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathcal{O}\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}\right)\right\} + \varrho\frac{\partial\mathcal{O}}{\partial t}\right]
\end{aligned}$$

Bei der Anwendung des Gaussschen Satzes haben wir die Annahme gemacht, dass die Dichte im Unendlichen sowohl im Impulsraum als auch im Realraum verschwindet, und, dass der Mittelwert ein Integral über den ganzen Raum ist. So erhalten wir zum Beispiel für den unteren Term

$$\int_\Omega d^n x \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varrho\mathcal{O}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}\right) = \sum_i \int_{\partial\Omega} dA_i\ \varrho\cdot\mathcal{O}\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}$$

Dies ist gleich Null, wenn ϱ im Unendlichen verschwindet.

[4]Das Symbol $\mathcal{O}$ soll an den Begriffs "Observable" erinnern. Eine Observable ist allgemein eine beobachtbare Größe.

So folgt für die Änderung des Mittelwerts:

$$\frac{d}{dt}\langle\mathcal{O}\rangle = \int d^nx \int d^np \cdot \left[\sum_i \left\{-\varrho\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\mathcal{O}\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_i}\right) + \varrho\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathcal{O}\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}\right)\right\} + \varrho\frac{\partial\mathcal{O}}{\partial t}\right]$$
$$= \int d^nx \int d^np \cdot \varrho \left[-\sum_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\mathcal{O}\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_i}\right)}_{\frac{\partial\mathcal{O}}{\partial p_i}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_i}+\mathcal{O}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial p_i\partial x_i}} + \sum_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathcal{O}\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}\right)}_{\frac{\partial\mathcal{O}}{\partial x_i}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}+\mathcal{O}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial x_i\partial p_i}} + \frac{\partial\mathcal{O}}{\partial t}\right]$$

Die Terme $\mathcal{O}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial x_i\partial p_i}$ heben sich weg. So bleibt bestehen:

$$\frac{d}{dt}\langle\mathcal{O}\rangle = \int d^nx \int d^np \cdot \varrho \cdot \left[-\sum_i \left(\frac{\partial\mathcal{O}}{\partial p_i}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_i} - \frac{\partial\mathcal{O}}{\partial x_i}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}\right) + \frac{\partial\mathcal{O}}{\partial t}\right]$$
$$= \left\langle -\left\{\mathcal{H},\mathcal{O}\right\} + \frac{\partial\mathcal{O}}{\partial t}\right\rangle$$

Damit erhalten wir die

ZEITLICHE ÄNDERUNG DES MITTELWERTES

$$\frac{d}{dt}\langle\mathcal{O}\rangle = \left\langle -\left\{\mathcal{H},\mathcal{O}\right\} + \frac{\partial\mathcal{O}}{\partial t}\right\rangle \tag{8.9}$$

Mit Hilfe diesen Ausdrucks lassen sich zeitlich erhaltene Größen bestimmen. Die Gleichung ist aber keine Differentialgleichung für den Mittelwert von $\langle\mathcal{O}\rangle$, obwohl sie so ähnlich aussieht. Um $\langle\mathcal{O}(t)\rangle$ für lange Zeiten vorherzusagen, muss man die Dichte zu diesen Zeitpunkten kennen. Dafür muss man die Bewegungsgleichung für die Phasenraumdichte lösen.

Chapter 9

Spezielle Relativitätstheorie (6h)

Die Relativitätstheorie und die Quantenmechanik waren die beiden großen Revolutionen unseres physkalischen Weltbilds im 20. Jahrhundert. Die Relativitätstheorie hat unsere Vorstellung von Raum und Zeit umgewälzt, und die Konzepte von Raum und Zeit in gewisser Weise vereinheitlicht. Die Quantentheorie hat die Konzepte von Punktteilchen und der Wellennatur von Materie vereinheitlicht.

Abb. 9.1: Albert Einstein, 1879-1955

Eigentlich gibt es zwei Relativitätstheorien, die spezielle und die allgemeine. Die **spezielle Relativitätststheorie**, die hier vorgestellt wird, beschreibt die Eigenschaften des Raum-Zeitkontinuums. Die **allgemeine Relativitätstheorie** beschreibt die Gravitationswechselwirkung. Sie basiert auf der Annahme, dass das Raum-Zeit-Kontinuum durch die Gegenwart von Massen, oder allgemeiner, Energie gekrümmt wird. Diese Krümmung verursacht eine Beschleunigung, die als Gravitationskraft interpretiert wird.

Die Relativitätstheorie und die Quantenmechanik haben bis heute allen experimentellen Überprüfungen perfekt standgehalten. Dennoch scheinen Sie unvereinbar zu sein.[1] Die Vereinigung von Relativitätstheorie und Quantenmechanik ist daher eine der größten Herausforderungen der modernen Physik.

Die spezielle Relativitätstheorie basiert auf zwei Annahmen[**?**]:

POSTULATE DER SPEZIELLEN RELATIVITÄTSTHEORIE

- Es gibt für einen Beobachter keine Möglichkeit seine Absolutgeschwindigkeit zu bestimmen.
- Die Lichtgeschwindigkeit $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ist für alle unbeschleunigten Beobachter konstant. Der aktuelle Wert der Lichtgeschwindigkeit liegt bei $c_{Vakuum} = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$.[8].

Aus diesen Postulaten lässt sich ableiten[2], dass sich kein physikalisches Objekt und kein informationstragendes Signal schneller als Licht ausbreiten kann.

Die beiden Postulate ergeben sich aus den Maxwellgleichungen der Elektrodynamik, die unter den Galileitransformationen nicht invariant sind. Sie sahen vorher dass Licht eine konstante Geschwindigkeit hat, die unabhängig von der Geschwindigkeit des Beobachters ist. Diese Eigenschaft wurde eindrucksvoll durch das Michelson-Morley Experiment aus dem Jahr 1887 nachgewiesen, das erst viel

[1] In einer quantenmechanische Beschreibung der allgemeinen Relativitätstheorie würde die Struktur von Raum und Zeit auf eine Weise zufällig werden. Die quantenmechanische Beschreibung setzt aber eine Form des Raum-Zeitkontinuums voraus.

[2] Was hier noch nicht gezeigt wird.

später durch Einstein erklärt werden konnte.

Michelson and Morley versuchten die Geschwindigkeit der Erde zu bestimmen, indem sie zwei Lichtstrahlen zur Interferenz brachten, von denen sich einer parallel und der andere senkrecht zur Erdgeschwindigkeit ausbreitete. Wird der Aparat gedreht, sollte sich das Interferenzbild der beiden Lichstrahlen ändern, da sich die Weglängen der beiden Lichtstrahlen verändern. Es wurde aber kein solcher Effekt beobachtet.[9]

9.1 Weltlinien und Lichtkonus

Um Ereignisse darzustellen verwenden wir das **Weltdiagramm**, das von einer Zeitachse und den drei Raumachsen aufgespannt wird. Ein Ereignis ist durch einen Punkt im Weltdiagramm dargestellt, da es an einem Ort und zu einer definierten Zeit stattfindet. Jedes Objekt bildet in diesem Diagramm eine **Weltlinie**. Ein physikalisches Objekt kann sich nach dem Postulat der Relativitätstheorie maximal mit der Lichtgeschwindigkeit bewegen. Eine Weltlinie eines physikalischen Objekts muss im Weltdiagramm mindestens die Steigung $1/c$ besitzen. Zu physikalischen Objekten gehören auch allgemein Signale, die Information austauschen, da Informationen immer an physikalische Objekte gebunden sind.

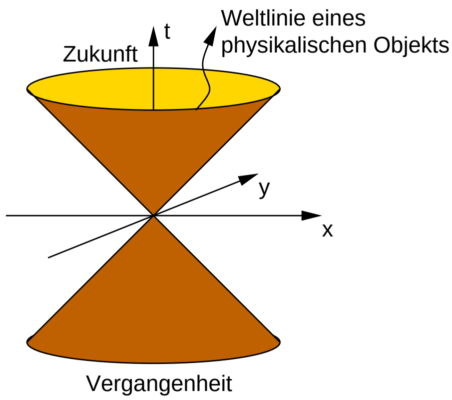


Abb. 9.2: Der Lichtkonus. Der Lichtkonus teilt die Ereignisse in solche ein, welche mit einem Referenzereignis eine Kausalbeziehung haben können, und solche, die das nicht können. Ereignisse, welche von einem Referenzereignis kausal beeinflusst werden können, liegen in der Zukunft. Ereignisse, welche einen kausalen Einfluss auf das Referenzereignis haben können, liegen in der Vergangenheit des Referenzereignisses. Aufgrund der endlichen Lichtgeschwindigkeit gibt es darüber hinaus auch Ereignisse, welche keine Kausalbeziehung mit dem Referenzereignis eingehen können. In einer nichtrelativistischen Welt wäre der Lichkonus aufgrund der unendlichen Lichtgeschwindigkeit undendlich breit, so dass alle Ereignisse miteinander eine Kausalbeziehung eingehen können.

9.2 Relativistische Effekte

Bevor wir eine genaue mathematische Beschreibung der Relativitätstheorie angehen, werden wir zunächst die überraschenden relativistischen Effekte beschreiben.

Dazu betrachten wir einen ruhenden Beobachter "Rudi" und eine bewegte Beobachterin "Betty". Betty fliegt in einem Raumschiff, das relativ zu Rudi die Geschwindigkeit $\vec{V}$[3] hat. Von Betty aus gesehen, bewegt sich demnach Rudi mit der Geschwindigkeit $-\vec{V}$. Beide vergleichen Resultate ihrer Zeit- und Längenmessungen, die sie für ein Experiment erhalten.

[3] Für die Geschwindigkeit zwischen den Systemen "Rudi" und "Betty" wird bewußt der Großbuchstabe $\vec{V}$ verwendet.

9.2.1 Lichtuhr

Um Zeit und Längenmessungen durchzuführen verwenden wir die Lichtuhr, die in Abb. 9.3 dargestellt ist: In einer Lichtuhr wird ein Lichtpuls wiederholt zwischen zwei idealen Spiegeln reflektiert. Die Zeitspanne, die der Lichtpuls benötigt, um vom ersten Spiegel zum zweiten zu gelangen und, von dort reflektiert, wieder zum ersten Spiegel zurueckzukehren wird bestimmt. Da diese Zeitspanne von dem Abstand l der Spiegel abhängt, setzt die Lichtuhr eine Länge l mit einer Zeitspanne Δt durch $c = \frac{2l}{\Delta t}$ in Beziehung. Der Zusammenhang zwischen Zeit und Länge ist gerade durch die Lichtgeschwindigkeit c gegeben.

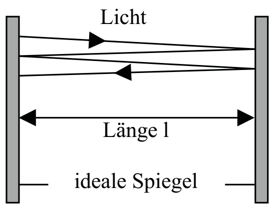


Abb. 9.3: Schematische Darstellung der Lichtuhr. Der Verlauf des Lichtstrahls in der Lichtuhr ist nur zur Verdeutlichung seitlich versetzt dargestellt. Real würde der Stahl in sich reflektiert, also ohne seitlichen Versatz verlaufen. Dieser Umstand ist vor allem bei Vergleichen zwischen ruhenden und bewegten Lichtuhren zu beachten.

9.2.2 Eichung der Lichtuhren

Rudi und Betty haben beide Lichtuhren und müssen sich zunächst auf die Länge ihrer Lichtuhren einigen. Dies ist nicht trivial.

Betty schießt also von ihrem Raumschiff rechts und links zwei Bojen mit Geschwindigkeit $-\vec{V}$ nach hinten ab, sodass diese für Rudi im Raum ruhen. Betty misst den Abstand vor dem Abschuss und Rudi nach dem Abschuss. Sie einigen sich darauf, dass die Bojen in beiden Messungen denselben Abstand besitzen. Dieser Abstand wird zur Eichung der Lichtuhren herangezogen.

9.2.3 Zeitdilatation

Betty führt eine Lichtuhr der Länge l mit sich, die senkrecht zu der Bewegungsrichtung relativ zu Rudi steht.

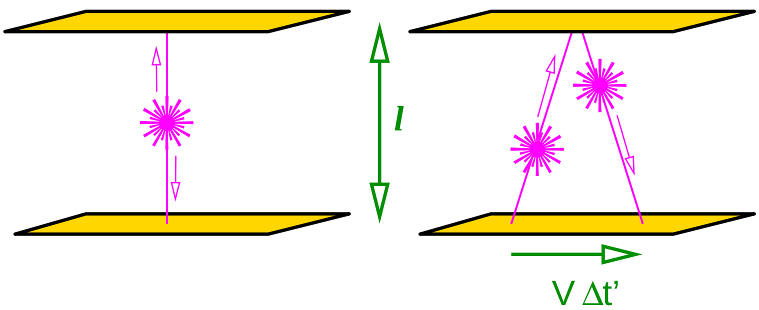


Abb. 9.4: Rechts: Mit Geschwindigkeit V bewegte Lichtuhr aus Sicht eines ruhenden Beobachters (Rudi). Links: Dieselbe Lichtuhr, aber nun aus Sicht eines mitbewegten Beobachters (Betty). Unter der Annahme konstanter Lichtgeschwindigkeit ist die relativ zum Beobachter bewegte Uhr langsamer, weil die Weglänge des Lichtpfades zwischen den Spiegeln länger ist.

Betty bestimmt die Zeit, die das Licht in ihrer Lichtuhr benötigt, um zweimal reflektiert zu werden, bzw. um zu seinem Ursprung zurückzukehren.

$$c = \frac{2l}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t = \frac{2l}{c}$$

Rudi kommt allerdings zu einem anderen Resultat. Der Lichtstrahl in Bettys Raumschiff muss für ihn nicht nur die Strecke zwischen den Spiegeln zurücklegen, sondern außerdem noch der Bewegung von Betty folgen. Rudi misst eine Zeit $\Delta t'$.

$$(2l)^2 + (V\Delta t')^2 = (c\Delta t')^2$$

$$\Delta t' = \frac{2l}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

l	Betty's Länge von Betty's Lichtuhr
l'	Rudi's Länge von Betty's Lichtuhr
Δt	Betty's Zeitinterval von Betty's Lichtuhr
$\Delta t'$	Rudis Zeitinterval von Betty's Lichtuhr

Schluss: Bettys Uhr tickt nicht synchron mit Rudis Uhr. Für Rudi erscheinen deshalb alle Prozesse in Bettys Raumschiff in Zeitlupe abzulaufen. Dies nennt man **Zeitdilatation**.

ZEITDILATATION

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Dabei ist $\Delta t'$ die Zeitspanne zwischen zwei Ereignissen eines mit Geschwindigkeit V bewegten Objekts aus sicht eines ruhenden Beobachters. Δt ist dieselbe Größe aus Sicht eines mit dem Objekt mitbewegten Beobachters.

Die Zeitdilatation liegt dem bekannten **Zwillingsparadoxon** zugrunde. Dabei unternimmt ein Zwilling eine Weltraumreise mit hoher Geschwindigkeit, während der andere auf der Erde lebt. Als der Reisende heimkehrt, ist sein Bruder bereits ein Greis, während der reisende Zwilling nur wenige Jahre älter ist. Aufgrund der Zeitdilatation ist der reisende Zwilling weniger gealtert. Allerdings erscheint dem reisenden Zwilling die Reise auch viel kürzer. Das Paradoxon liegt nun darin, dass sich die Erde vom Raumfahrer aus gesehen sehr schnell bewegt hat, wodurch er selbst schneller altern sollte als der daheimgebliebene. Das Paradoxon wird durch die Allgemeine Relativitätstheorie aufgelöst, welche auch die Beschleunigungsphase des Raumfahrers mit einbezieht.

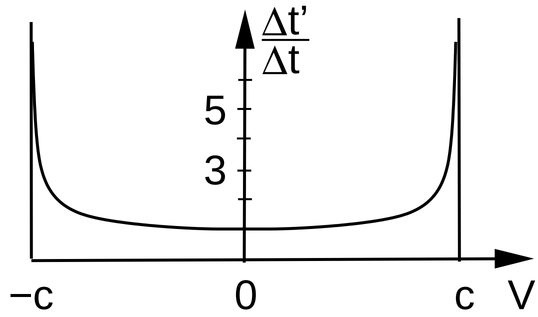


Abb. 9.5: Zeitdilatation: die Abbildung zeigt den Faktor, um den die Prozesse in einem bewegten Objekt langsamer ablaufen, wenn sie von einem ruhenden Beobachter gemessen werden als es ein Mitbewegter Beobachter misst. Die Zeitdilatation ist eine Funktion der Relativgeschwindigkeit.

9.2.4 Eigenzeit

Damit sich Rudi und Betty über Zeiten unterhalten können, führen sie den Begriff der Eigenzeit ein, welche der Zeigerstellung von Bettys Uhr entspricht, unabhängig davon ob Betty oder Rudi der Beobachter ist. Jede Lichtuhr hat ihre eigene Eigenzeit. Die Eigenzeit ist also dem Pfad $x(t)$ zugeordnet, auf dem die Lichtuhr unterwegs ist. Die **Eigenzeit** ist also

Definition 9.1 *EIGENZEIT*

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot t \tag{9.1}$$

wobei $v = \frac{dx}{dt}$ *die Geschwindigkeit des Pfades ist.*

Für Betty gilt $\tau = t$, weil sich ihre Lichtuhr relativ zu ihr selbst in Ruhe befindet, und deshalb $v = 0$ gilt.

Für Rudi gilt allerdings

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \cdot t'$$

weil sich Bettys Lichtuhr für ihn mit der Geschwindigkeit $\vec{V}$ bewegt.

Beide können sich nun darauf einigen, dass zwar die Zeit für einen Tick von Bettys Lichtuhr für beide unterschiedlich ist, dass aber die Eigenzeit zwischen zwei Ticks für Betty und Rudi identisch ist. Mit der Kenntnis der Relativgeschwindigkeit, können nun beide ihre Zeit in die entsprechende Eigenzeit konvertieren.

9.2.5 Längenkontraktion

Betty hat eine zweite Lichtuhr, die sie parallel zu ihrer Geschwindigkeit relativ zu Rudi ausrichtet. Sie stellt die Länge $l_{\|}$ der zweiten Lichtuhr so ein, dass sie synchron mit der Uhr läuft, die senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung steht und die Länge $l_{\perp}$ hat.

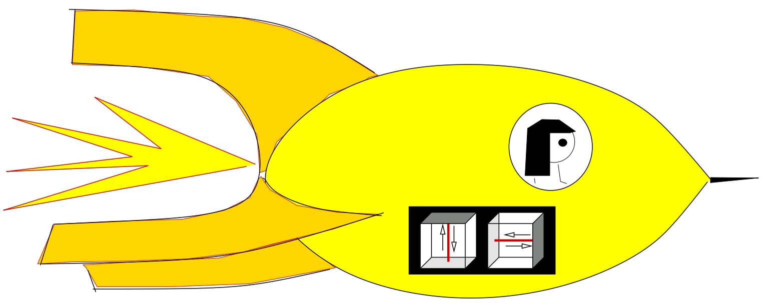


Abb. 9.6: Betty's beide Uhren aus ihrer Sicht

Rudi beobachtet nun die Uhr von Betty. Für ihn ergibt sich eine andere Sicht der Dinge:

Für die parallele Uhr muss Rudi nun Hin- und Rückweg des Lichtstrahls unterscheiden. Auf der linken Seite sind die Zusammenhänge für den Hinweg und auf der rechten Seite die für den Rückweg beschrieben. Siehe dazu auch Abb. 9.8.

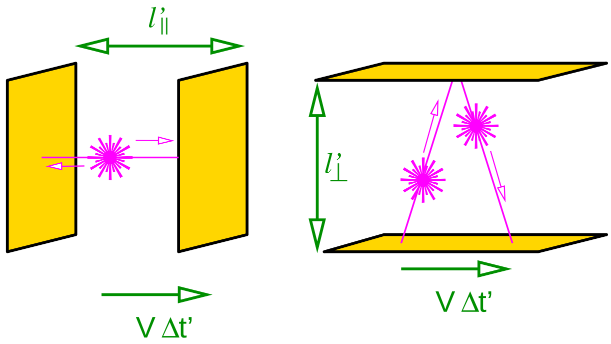


Abb. 9.7: Die bewegten Lichtuhren auf Betty's Raumschiff aus der Sicht eines ruhenden Beobachters (Rudi). Wenn die beiden Lichtuhren im Gleichklang ticken, muss die Uhr mit dem Lichtstrahl in Bewegungsrichtung kürzer sein wie die andere.

Rudi misst nun die Länge l' der neuen Uhr

$$
\begin{aligned}
& x'_2 = x'_1 + l'_{\|} + V(t'_2 - t'_1) = x'_1 + c(t'_2 - t'_1) \qquad && x'_3 = x'_2 - l'_{\|} + V(t'_3 - t'_2) = x'_2 - c(t'_3 - t'_2) \\
\Rightarrow \quad & l_{\|} = (c - V)(t'_2 - t'_1) && -l'_{\|} = -(c + V)(t'_3 - t'_2) \\
\Rightarrow \quad & t'_2 - t'_1 = \frac{l'_{\|}}{c - V} && t'_3 - t'_2 = \frac{l'_{\|}}{c + V}
\end{aligned}
$$

Wir fassen nun die beiden Gleichungen zusammen, um die Gesamtdauer $\Delta t'$ zu bestimmen.

$$
\Rightarrow \quad \Delta t' \stackrel{\text{def}}{=} t'_3 - t'_1 = \frac{l'_{\|}}{c}\left(\frac{1}{1 - \frac{V}{c}} + \frac{1}{1 + \frac{V}{c}}\right) = \frac{2l'_{\|}}{c}\frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \tag{9.2}
$$

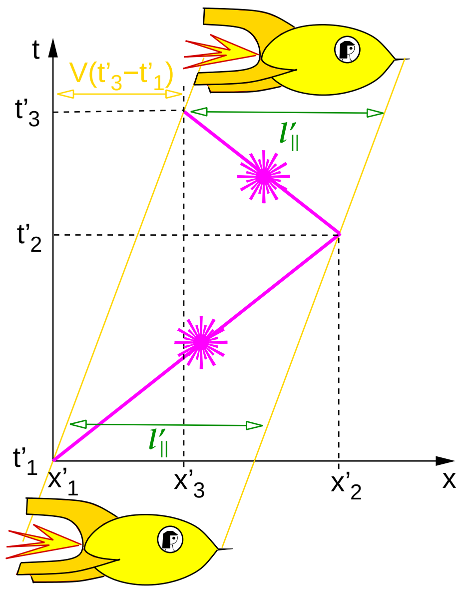


Abb. 9.8: Weltdiagram zur Messung der Längenkontraktion anhand der Lichtuhr mit dem Strahl in der Bewegungsrichtung.

Da beide Uhren synchron ticken, gilt $\Delta t'_{\|} = \Delta t'_{\perp}$. Wir verwenden daher nur ein Symbol, nämlich $\Delta t'$. Für die Uhr senkrecht zur Flugrichtung gilt die folgende Beziehung zwischen Länge und Zeit

(siehe Abb. 9.7)

$$(2l'_\perp)^2 + (V\Delta t')^2 = (c\Delta t')^2 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t' = \frac{2l'_\perp}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{9.3}$$

Damit erhalten wir eine Beziehung zwischen den Längen der beiden Uhren in Rudi's Bezugssystem.

$$\frac{2l'_\perp}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \stackrel{\text{Gl. 9.3}}{=} \Delta t' \stackrel{\text{Gl. 9.2}}{=} \frac{2l'_\parallel}{c} \frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}} \qquad \Rightarrow \qquad l'_\parallel = l'_\perp \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \tag{9.4}$$

Für Rudi sind die Uhren also nicht gleich lang sondern die Uhr parallel zur Flugrichtung ist kürzer. Man nennt diesen Effekt **Längenkontraktion**.

Wir sind von der Annahme ausgegangen, dass die Länge der Lichtuhr, die senkrecht zur Flugrichtung steht, für Rudi und Betty identisch ist, also $l'_\perp = l_\perp$. Außerdem sind beide Lichtuhren in Betty's Bezugssystem gleich lang, also $l_\perp = l_\parallel$. Es gilt also $l'_\perp = l_\parallel$. Mit Gl. 9.4 erhalten wir eine Transformationsgleichung für Längen parallel zur Flugrichtung.

LÄNGENKONTRAKTION

$$l'_\parallel = l_\parallel \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \tag{9.5}$$

$l'_\parallel$ ist die Länge parallel zur Flugrichtung aus Sicht eines ruhenden Beobachters. $l_\parallel$ ist dieselbe Größe aus Sicht des mit Geschwindigkeit V bewegten Beobachters.

9.2.6 Relativität der Gleichzeitigkeit

Betty glaubt Rudi nicht, dass ihr elegantes Raumschiff "pummelig" sein soll, also kürzer ist, als sie es selber gemessen hat.

Deshalb setzt sie an Bug und Heck Bojen mit der Geschwindigkeit $-V$ aus, damit Rudi sich von der Länge ihres Raumschiffs überzeugen kann. Nach dem Abschuss ruhen die Bojen in Rudis Bezugssystem. Natürlich muss sie darauf achten, dass sie die Bojen absolut gleichzeitig abschießt. Sie erreicht das, indem sie den Abschuss durch einen Lichtimpuls aus der Mitte ihres Raumschiffs triggert. Um sicher zu stellen, dass beide Lichtblitze die selbe Weglänge zurücklegen müssen, überprüft sie nach dem Abschuss der Bojen ob die reflektierten Lichtblitze wieder gleichzeitig in der Mitte des Raumschiffs eintreffen, was sie in der Tat auch tun..

Rudi stellt aber fest, dass der Abschuss nicht gleichzeitig erfolgt sein kann, weil das Heck ja dem einen Lichtpuls entgegenfliegt, während der Bug dem anderen Lichtpuls vorausfliegt. Deshalb wird das Heck eher von einem Lichtpuls erreicht als der Bug, und die Heckboje wird früher als die Bugboje abgesetzt. Aus diesem Grund akzeptiert Rudi nicht, dass der Abstand der Bojen die wahre Länge von Bettys Raumschiff wiedergibt.

Gleichzeitigkeit ist also relativ.

Rudi misst dennoch den Abstand der Bojen, die Betty abgesetzt hat. Siehe Abb. 9.9.

Zunächst bestimmt er den Zeitpunkt t'_1 und Position x'_1 des Abschusses der hinteren Boje.

$$x'_1 = x'_0 - \frac{l'_\parallel}{2} + V(t'_1 - t'_0) \qquad \text{und} \qquad x'_1 = x'_0 - c(t'_1 - t'_0)$$

$$\Rightarrow \qquad t'_1 - t'_0 = \frac{l'_\parallel}{2c}\frac{1}{1+\frac{V}{c}} \qquad \text{und} \qquad x'_1 - x'_0 = -c(t'_1 - t'_0) = -\frac{l'_\parallel}{2}\frac{1}{1+\frac{V}{c}} \tag{9.6}$$

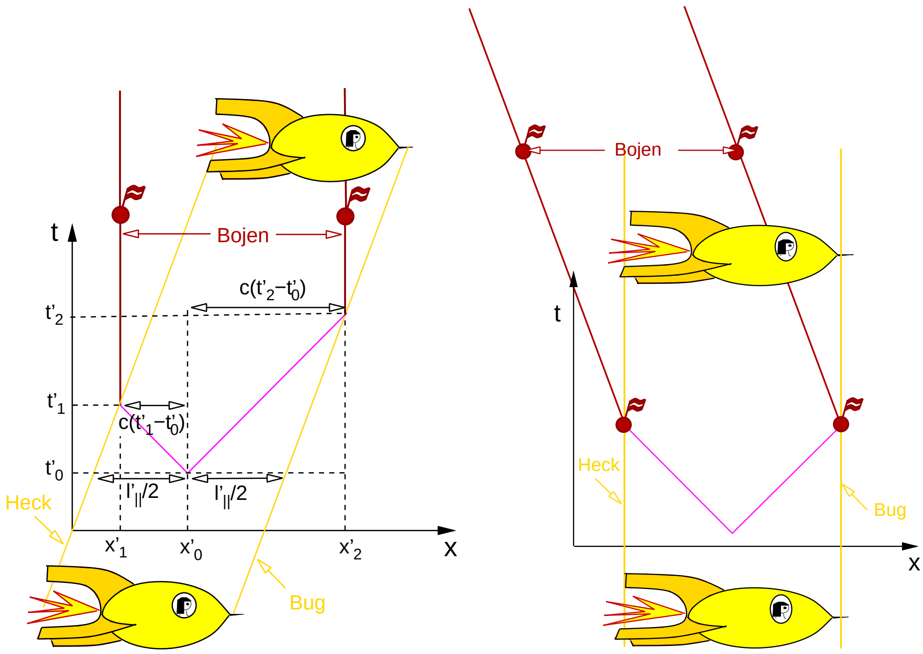


Abb. 9.9: Relativität der Gleichzeitigkeit. Betty wirft aus Ihrer Sicht zwei Bojen gleichzeitig aus. Aus Rudis Sicht wurde die vordere Boje später abgesetzt. Deshalb stimmt in seinem Bezugssystem der Abstand der Bojen nicht mit der Länge von Bettys Raumschiff überein. Rudis Sicht ist links und Bettys Sicht ist rechts dargestellt.

Anschließend bestimmt er den Zeitpunkt t'_2 und Position x'_2 des Abschusses der vorderen Boje.

$$x'_2 = x'_0 + \frac{l'_{\|}}{2} + V(t'_2 - t'_0) \qquad \text{und} \qquad x'_2 = x'_0 + c(t'_2 - t'_0)$$

$$\Rightarrow \qquad t'_2 - t'_0 = \frac{l'_{\|}}{2c}\frac{1}{1-\frac{V}{c}} \qquad \text{und} \qquad x'_2 - x'_0 = c(t'_1 - t'_0) = \frac{l'_{\|}}{2}\frac{1}{1-\frac{V}{c}} \tag{9.7}$$

Durch Kombination der beiden Gleichungen Gl. 9.6 und Gl. 9.7 erhält er den Abstand er Bojen

$$x'_2 - x'_1 = \frac{l'_{\|}}{2}\frac{1}{1-\frac{V}{c}} + \frac{l'_{\|}}{2}\frac{1}{1+\frac{V}{c}} = l'_{\|}\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

Der Abstand der Bojen ist sogar noch länger als Betty's Raumschiff in ihrem Bezugssystem.

$$x'_2 - x'_1 = l'_{\|}\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}} \overset{\text{Gl. 9.5}}{=} l_{\|}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Wenn Betty allerdings den Abstand der Bojen nach dem Start der Bojen nochmals überprüft, erhält sie wegen der Längenkontraktion gerade die Länge Ihres Raumschiffs.[4] Rudi wird das Gefühl nicht los, dass Betty irgendwie mogelt...

9.2.7 Doppler Effekt (Ergänzungsthema)

Der klassische Dopplereffekt ist aus dem Klang eines vorbeifahrenden Polizeiautos bekannt. Fährt das Auto auf uns zu, ist der Klang höher als wenn es von uns wegfährt. Dies kommt daher, dass die

[4]Für Betty bewegen sich die Bojen mit Geschwindigkeit $-V$. Also sind sie in Ihrem Bezugssystem gegenüber Rudi's Messung längenkontrahiert. Skaliert man $x'_2 - x'_1$ mit $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ erhält man gerade l die Länge des Raumschiffs in Betty's Bezugssystem.

Wellenberge einer Schallwelle, die vom Auto nach vorne abgesandt werden, näher beieinander liegen als einer Schallwelle, die nach hinten abgesandt werden. In der Relativitätstheorie wird dieser Effekt mit der Zeitdilatation überlagert.

Der Dopplereffekt kann zur Geschwindigkeitsmessung eingesetzt werden. Betrachtet man einen Stern, so haben die Anregungsfrequenzen bestimmter Atome im Ruhesystem des Sterns dieselbe Frequenz wie ein ruhendes Atom auf der Erde. Bewegt sich der Stern auf uns zu, dann ist die Strahlung des Sterns **blauverschoben**[5] , während die Strahlung eines sich entfernenden Sterns **rotverschoben** ist. Anhand der Frequenzverschiebung können wir die Geschwindigkeit, mit der sich der Stern auf uns zubewegt, ermitteln.

Jetzt wollen wir den relativistischen Dopplereffekt analysieren: Die Lichtuhr von Betty blinkt immer dann, wenn der Lichtstrahl vom Spiegel ihrer Lichtuhr zurückgeworfen wird. Sie sendet also in immer gleichen Zeitabständen ein Lichtsignal an Rudi.

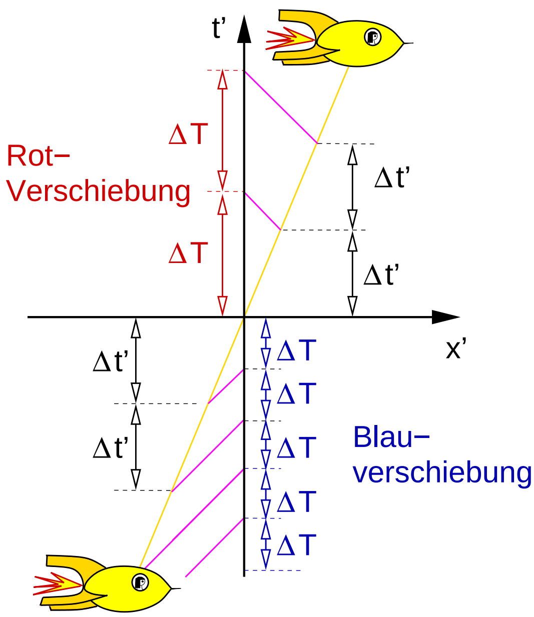
$$t_n = n\Delta t$$

Was sieht Rudi? Bettys Raumschiff blitzt mit einem Zeitintervall, das Betty als Δt gemessen hat. In Rudis Bezugssystem ist dasselbe Zeitintervall länger, nämlich $\Delta t' = \Delta t/\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Für Rudi werden also die Blitze zu den Zeiten

$$t'_n = n\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} t_n$$

ausgesandt. Zu diesen Zeiten befinde sich Betty's Raumschiff an den Orten $x'_n = V t'_n$.

Der Lichtblitz benötigt eine Weile, nämlich $|x'_n/c|$, bis er bei Rudi ankommt. Da sich der Abstand zwischen Rudi und Betty verändert, ändert sich auch die Verzögerung. Die Signale treffen zu den Zeiten T'_n bei Rudi ein.



$$T'_n = t'_n + |\frac{x_n}{c}| = t'_n + |\frac{V}{c} t'_n|$$

Wir unterscheiden nun die Fälle, dass sich Betty auf Rudi zu oder wegbewegt.

- $V > 0$ und $t < 0$: Betty bewegt sich auf Rudi zu.

$$T_n = t'_n - \frac{V}{c} t'_n$$

$$\Delta T = \Delta t'(1 - \frac{V}{c}) = \Delta t \frac{1-\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \Delta t \sqrt{\frac{1-\frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}}}$$

- $V > 0$ und $t > 0$: Betty bewegt von Rudi weg.

$$T_n = t'_n + \frac{V}{c} t'_n$$

$$\Delta T = \Delta t'(1 + \frac{V}{c}) = \Delta t \frac{1+\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \Delta t \sqrt{\frac{1+\frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}}}$$

[5] Blau entspricht dem hochfrequenten Teil des sichtbaren Lichts, und Rot dem tieffrequenten. Deshalb nennt man eine Frequenzverschiebung zu höheren Frequenzen ganz allgemein als Blauverschiebung, und eine zu tieferen Frequenzen als Rotverschiebung

Betrachtet man $1/\Delta T$ als Frequenz, zum Beispiel die einer Emmissionslinie eines Atoms, so sieht man, dass sie vom ruhenden Beobachter als niedriger wahrgenommen wird, wenn sich das Atom vom Beobachter wegbewegt. Man spricht deshalb von Rotverschiebung. Im umgekehrten Fall spricht man von Blauverschiebung.

Die Rotverschiebung von Emmissionslinien war wichtig, um die Expansion des Universums festzustellen. Bei der Entstehung des Universums war der ganze Raum in einem winzigen Volumenbereich zusammengepresst. Der sogenannte **Big Bang** gleicht einer Explosion des frühen Universums und war der Beginn einer wahrscheinlich noch andauernden Phase der Expansion des Universums. Geht man von einer konstanten Expansionsrate des Universums aus und nimmt sie darüber hinaus als räumlich homogen an, dann kann man aus der Rotverschiebung umgekehrt, zunächst die Geschwindigkeit und daraus den Abstand einer entfernten Galaxie bestimmen. Je weiter die Galaxie entfernt ist, desto älter ist Ihr Abbild, welches wir auf der Erde wahrnehmen. Die Rate, mit der sich das Universum ausdehnt, wird durch die **Hubble Konstante** beschrieben[6].

Der aktuelle Wert der Hubble Konstante ist $70 \pm 7 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s \cdot Mpc}}$[11, 12]. Ein **Megaparsec (Mpc)** entspricht $3.2615 \cdot 10^6$ Lichtjahren oder 3×10^{22} m. Ein **Lichtjahr** ist die Strecke, die Licht in einem Jahr zurücklegt. Ein Lichtjahr entspricht etwa etwa $10^{16}\mathrm{m}$. (Genauer 1 Lj=$9,461 \times 10^{15}$ m)

Trägt man $\frac{t_2 - t_1}{2l/c}$ gegen $\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} \overset{!}{=} Y$ auf, so lässt sich der Dopplereffekt darstellen:

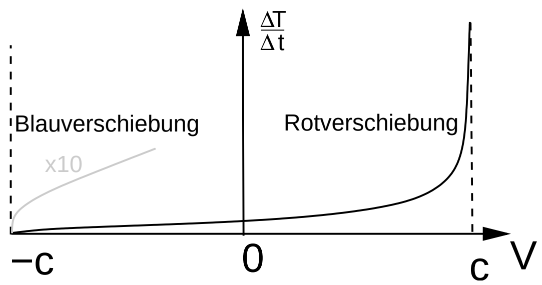


Abb. 9.10: Doppler-Effekt: Verhältnis $Y = \Delta T/\Delta t$ von ΔT zu Δt als Funktion der Geschwindigkeit V. Die Signale werden vom bewegten System mit einem Zeitintervall Δt, vom bewegten System aus gemessen, ausgesendet. Die Signale treffen mit einem Abstand ΔT beim ruhenden System ein. Der klassische Doppler-Effekt liegt in (mittigem) Bereich, bei dem v gegen c klein ist. Das Verhalten für $v \sim -c$ ist im rechten Bild detaillierter dargestellt.

Exkurs: Kosmische Hintergrundstrahlung

Mit dem Dopplereffekt kann man auch die kosmische Hintergrundstrahlung verstehen[13]. Betrachten wir den Anfang des Universums, den "Big-Bang". Anfangs war das Universum so heiss, dass sich noch keine Atome bilden konnten. Elektronen, Protonen und Neutronen bewegten sich weitgehend unabhängig voneinander durch den Raum. Man nennt einen solchen Zustand ein Plasma. Ein Plasma absorbiert Licht und ist daher nicht transparent. Als sich das Universum ausdehnte, wurde es kälter. Etwa 300 000 Jahren nach seiner Entstehung kühlte sich das Universum auf "nur" 3000 Grad ab, sodass die thermische Energie der Elektronen nicht mehr ausreichte um Protonen, Neutronen und Elektronen zu trennen. Es bildeten sich Wasserstoff und Heliumatome. Als Folge davon wurde das Universum transparent. Die Wärmestrahlung des Plasmas konnte sich also ausbreiten und bis zu uns gelangen. Wir können also bis fast in die Anfänge des Universums, das heißt bis etwa 300 000 Jahre nach dem Urknall, zurückblicken. Da sich das Universum ausdehnt, entfernt sich der Rand des Universums mit enormer Geschwindigkeit von uns. Deshalb ist diese Wärmestrahlung extrem

[6] Die Rotverschiebung wird als $\omega = (1+z)\omega_0$ ausgredrückt, wobei ω_0 die Kreisfrequenz einer Spektrallinie im Ruhesystem ist und ω die beobachtete, rotverschobene Kreisfrequenz. Die Hubble-Konstante ist durch $H_0 = c\frac{z}{d}$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit und d der Abstand von der Erde ist.[10]

rotverschoben, sodass seine Frequenz im Mikrowellenbereich liegt, die einer Temperatur von nur 2.728 Kelvin entspricht[14].

Die Mikrowellenstrahlung wurden 1949 von Gamow[7], und Alpher vorhergesagt[15, 16, 17][8]. Für den experimentellen Nachweis der kosmischen Hintergrundstrahlung erhielten Penzias und Wilson den Physiknobelpreis von 1978.

9.3 Lorentz-Transformationen

9.3.1 Minkowski-Raum

Der **Minkowski-Raum** ist ein vierdimensionaler Vektorraum des Raum-Zeit Kontinuums. Die Vektoren in diesem Raum sind $\vec{x} = (ct, x, y, z)$. In einem Vektorraum muss eine Skalarprodukt definiert sein. Das Skalarprodukt erlaubt es uns eine Art Raum-Zeit Abstand zwischen zwei Ereignissen A und B als **Norm**[9] $|\vec{x}_B - \vec{x}_A|$ zu definieren. Das Skalarprodukt ist so definiert, dass zwei beliebige Ereignisse in allen Intertialsystemen denselben "Abstand" besitzen.

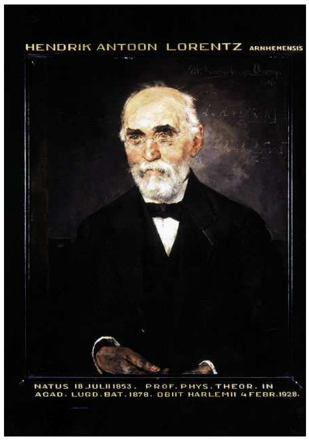


Abb. 9.11: Hendrik Antoon Lorentz 1853-1928, painted in 1916 by Menso Kamerlingh Onnes.

Wir wissen, dass das Interval der Eigenzeit zwischen zwei Ereignissen $\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \Delta t$ invariant ist. Da die Lichtgeschwindigkeit konstant ist, ist daher auch das Betragsquadrat

$$(c\Delta\tau)^2 = (c\Delta t)^2 - (\vec{v}\Delta t)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta\vec{r})^2$$

invariant.

Deshalb definieren wir das Abstandsquadrat als

$$\Delta\vec{x}\boldsymbol{g}\Delta\vec{x} = \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

wobei $\boldsymbol{g}$ der **metrische Tensor** ist. Das Abstandsquadrat ist das Skalarprodukt in diesem Raum. Im dreidimensionalen Raum war das Skalarprodukt durch das Punktprodukt gegeben.

Das Abstandsquadrat kann sowohl positiv als auch negativ sein.

- Ist der Abstand von zwei Ereignissen negativ, d.h. $(c\Delta t) - \Delta\vec{r}^2 < 0$, dann nennen wir ihn **raumartig**. Zwei gleichzeitige Ereignisse sind räumlich aber nicht zeitlich getrennt. Deshalb ist ihr Abstand raumartig. Solche Ereignisse können in keiner Kausalbeziehung zueinander stehen, weil kein Signal von einem der Ereignisse zum anderen gelangen kann. Signale können sich maximal mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Eine **Kausalbeziehung** besteht, wenn das eine Ereignis als Auslöser des anderen betrachtet werden kann.
- Ist der Abstand von zwei Ereignissen positiv, d.h. $(c\Delta t) - \Delta\vec{r}^2 > 0$, nennen wir ihn **zeitartig**. Jedes physikalische Objekt bildet eine zeitartige oder lichtartige (siehe unten) Weltlinie, da es sich in der Zeit bewegt, solange es existiert. Die Weltlinie eines physikalischen Objekts kann nicht zeitartig sein, weil dies bedeuten würde, dass sich das Objekt mit Überlichtgeschwindigkeit bewegt.

[7] George Gamov. Russischer Physiker, geboren 1904 in Odessa, Auch bekannt durch "Physikmärchenbücher" wie "Mr. Tompkins' seltsame r in Wonderland", Mr. Tompkinseise durch Kosmos und Mikrokosmos"

[8] Bethe ist nur wegen einem Witz Mitauthor der Arbeit[17]. Gamow war amüsiert darüber dass die Namen von Alpher und Gamow wie α und γ klangen. Deshalb hat er Bethe, also β, als Mitauthor "in absentia" eingesetzt. Physical Review hat das "in absentia" gestrichen.

[9] Die Norm eines Vektors ist das Skalarprodukt des Vektors mit sich selbst.

- Verschwindet der Abstand von zwei Ereignissen, d.h. $(c\Delta t)^2 - \Delta\vec{r}^2 = 0$, dann nennen wir ihren Abstand **lichtartig**: Zwei lichtartige Ereignisse können von einem geraden Lichstrahl verbunden werden.

Ob zwei Ereignisse gleichzeitig stattfinden ist, wie wir gesehen haben, vom Beobachter abhängt. Die Frage, ob zwei Ereignisse einen raumartigen, lichtartigen oder zweitartigen Abstand haben, hat jedoch für alle Beobachter dieselbe Antwort. Relativ zu einem Ereignis, z.B.: der Beobachter zum momentanen Zeitpunkt, können alle Ereignisse danach eingeteilt werden ob sie zu dem Referenzereignis einen zeitartigen, raumartigen oder lichtartigen Abstand haben. Dies teilt den Raum der möglichen Ereignisse in einen Lichtkonus ein, der in Abb. 9.2 auf S. 178 dargestellt ist.

9.3.2 Lorentz-Transformationen

Um die relativistische Verallgemeinerung der Galilei-Transformationen zu finden, die sogenannten Lorentztransformationen gehen wir analog zu Kapitel 5.6 auf S. 100 vor. Der wesentliche Unterschied zu der Herleitung der Drehmatrizen ist, dass wir hier die vierdimensionale Raum-Zeit und die besondere Form des metrischen Tensors $\boldsymbol{g}$ berücksichtigen.

Definition 9.2 *LORENTZ-TRANSFORMATIONEN*
Die **Lorentz-Transformationen** *sind alle affinen Transformationen im Minkowski-Raum, die das Skalarprodukt $\Delta\vec{x}\boldsymbol{g}\Delta\vec{x}$, des Abstandsvektors $\Delta\vec{x} = (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ von zwei beliebigen Ereignissen $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$, unverändert lassen.*

Als affine Transformation ist die Lorentztransformation durch eine Matrix $\boldsymbol{\Lambda}$ und einen Verschiebungsvektor $\vec{b}$ festgelegt. Sie hat die Form $\vec{x}' = \boldsymbol{\Lambda}\vec{x} + \vec{b}$, oder ausgeschrieben:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_{tt} & \Lambda_{tx} & \Lambda_{ty} & \Lambda_{tz} \\ \Lambda_{xt} & \Lambda_{xx} & \Lambda_{xy} & \Lambda_{xz} \\ \Lambda_{yt} & \Lambda_{yx} & \Lambda_{yy} & \Lambda_{yz} \\ \Lambda_{zt} & \Lambda_{zx} & \Lambda_{zy} & \Lambda_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_t \\ b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \tag{9.8}$$

Dabei beschreibt der Vektor $\vec{b}$ Verschiebungen in Raum und Zeit.

Allerdings ist nicht jede Gleichung der obigen Art auch eine Lorentztransformation. Um die Gleichung auf Lorentztransformationen einzuschränken, muss noch die Forderung der Invarianz des Abstands von Ereignissen gefordert werden.

Aus der Invarianz des Skalarprodukts unter Transformationen $\Delta\vec{x'} = \boldsymbol{\Lambda}\Delta\vec{x}$ erhalten wir eine Bedingung für $\boldsymbol{\Lambda}$.

$$\begin{aligned} & \forall_{\Delta\vec{x}}: \quad \Delta\vec{x'}\boldsymbol{g}\Delta\vec{x'} = \Delta\vec{x}\boldsymbol{g}\Delta\vec{x} \\ \Rightarrow \quad & \forall_{\Delta\vec{x}}: \quad \Delta\vec{x}\boldsymbol{\Lambda}^\top\boldsymbol{g}\boldsymbol{\Lambda}\Delta\vec{x} = \Delta\vec{x}\boldsymbol{g}\Delta\vec{x} \\ \Rightarrow \quad & \boldsymbol{\Lambda}^\top\boldsymbol{g}\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{g} \end{aligned}$$

Der Verschiebungsvektor $\vec{b}$ ist dabei beliebig, da wir nur über Distanzen von Ereignissen sprechen müssen.

Definition 9.3 *LORENTZTRANSFORMATION*
Jede affine Abbildung

$$\vec{x}' = \mathbf{\Lambda}\vec{x} + \vec{b}$$

im Minkowskiraum mit einer Matrix $\mathbf{\Lambda}$, *welche die Gleichung*

$$\mathbf{\Lambda}^\dagger \boldsymbol{g} \mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{g} \tag{9.9}$$

erfüllt, ist eine Lorentztransformation. Diese Bedingung reflektiert die Invarianz des Abstands im Minkowskiraum.

Diese Definition ist ganz analog zur Definition von Drehungen in Kapitel 5.6 auf S. 100. Bei Drehungen haben wir die Invarianz des Abstands $\Delta\vec{r}$ im dreidimensionalen Raum gefordert, was uns auf die Bedingung führte das Drehmatrizen unitär sein müssen, d.h. $\boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{U} = \mathbf{1}$. Die Analogie wird deutlich wenn wir betrachten, dass der metrische Tensor im dreidimensionalen Raum gleich der Einheitsmatrix ist.

Zu den Lorentz-Transformationen gehören

- Raumtranslationen
- Zeittranslationen
- Raumspiegelungen
- Zeitspiegelungen
- Raumdrehungen
- Transformationen zwischen relativ zueinander bewegten Inertialsystemen

Die Lorentz-Transformationen unterscheiden sich nur im letzten Punkt von den Galilei-Transformationen. Deshalb untersuchen wir die Transformation zwischen relativ bewegten Bezugssystemen im Detail. Der Einfachheit halber betrachten wir nur einen zweidimensionalen Unterraum mit einer Zeit- und einer Raumkoordinate und vernachlässigen Translationen.

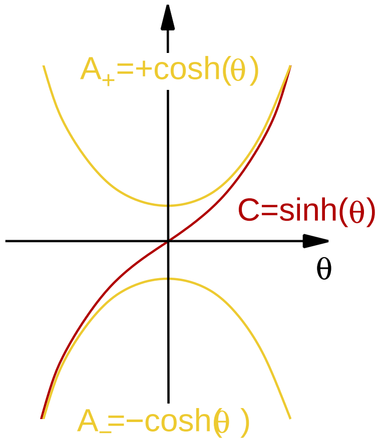
$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{g} &= \mathbf{\Lambda}^\top \boldsymbol{g} \mathbf{\Lambda} \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ -C & -D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 - C^2 & AB - CD \\ AB - CD & B^2 - D^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir müssen also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
A^2 - C^2 &= 1 \\
B^2 - D^2 &= -1 \\
AB - CD &= 0
\end{aligned}$$

auflösen. Da drei Gleichungen für vier Unbekannte vorliegen, gibt es einparametrische Scharen von Lösungen. Da eine quadratische Gleichung vorliegt wird es voraussichtlich mehr als eine Schar von Lösungen geben.



Wir nutzen die Beziehung $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ der Sinus Hyperbolikus- und Cosinus Hyperbolikusfunktionen[10]

1. Ersetze $C = \sinh(\theta)$. Da für jeden Wert von C ein Wert von $\theta = \mathrm{arc}\sinh(C)$ existiert, schränkt diese Transformation den Lösungsraum nicht ein.

2. Aus $A^2 - C^2 = 1$ erhalten wir mit Hilfe der Beziehung $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ die Gleichung $A^2 = 1 + C^2 = 1 + \sinh^2(\theta) = \cosh^2(\theta)$ und damit $A = \pm\cosh(\theta)$. Es gibt also eine zweiparameterige Schar von Lösungen für A, die sich durch das Vorzeichen von A unterscheiden.

3. Wie unter 1. führen wir einen Parameter ψ ein, sodass $B = \sinh(\psi)$

4. Aus $B^2 - D^2 = -1$ erhalten wir wie unter 2. den Ausdruck $D = \pm\cosh(\psi)$. Die Vorzeichenwechsel von A und B sind unabhängig. Es gibt daher insgesamt eine vierparameterige Schar von Lösungen.

5. Aus $0 = AB - CD = \cosh(\theta)\sinh(\psi) - \sinh(\theta)\cosh(\psi)$ folgt $\tanh(\theta) = \tanh(\psi)$ und damit $\theta = \psi$, falls A und D dasselbe Vorzeichen haben. Haben sie unterschiedliches Vorzeichen, dann gilt $\tanh(\theta) = -\tanh(\psi)$ und damit $\theta = -\psi$. Der Vorzeichenwechsel von ψ führt nur zu einem Vorzeichenwechsel von $C = \sinh(\psi)$.

Fassen wir die Resulate zusammen, erhalten wir vier einparameterige Scharen von Lösungen

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \quad ; \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} -\cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & -\cosh(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_3 = \begin{pmatrix} -\cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ -\sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \quad ; \quad \Lambda_4 = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ -\sinh(\theta) & -\cosh(\theta) \end{pmatrix}$$

Alle vier Lösungen lassen sich durch die erste Lösung mit anschließender Raum- oder Zeitspiegelung darstellen, wobei in einigen Fällen auch θ sein Vorzeichen wechseln muss.[11] Die Lorentz-Transformationen enthalten also, genau wie die Galileitransformationen, auch die Raum und Zeitspiegelungen. Der Einfachheit halber gehen wir im Folgenden nicht weiter darauf ein und beschränken uns in der Diskussion auf Λ_1

Physikalische Bedeutung von θ:

[10] $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, woraus $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ folgt

[11] Die zweite Lösung erhalten wir aus der ersten durch gleichzeitige Raum und Zeitinversion und Vorzeichenwechsel von θ. Die dritte Lösung erhalten wir aus der ersten durch Zeitinversion und Vorzeichenwechsel von θ. Die vierte Lösung erhalten wir durch Rauminversion aus der ersten.

Jetzt müssen wir noch die physikalische Bedeutung des Parameters θ finden. Dazu führen wir eine Lorentz-Transformation eines ruhenden Objekts mit Λ_1 durch.

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct\cosh(\theta) + x\sinh(\theta) \\ ct\sinh(\theta) + x\cosh(\theta) \end{pmatrix}$$

Ein Punkt der im bewegten Bezugssystem ruht, also $x(t) = 0$, besitzt die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} t(s) \\ x(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$$

im Minkowskiraum. Dabei ist s ein eindimensionaler Paramter.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} ct'(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct(s) \\ x(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cs \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} cs\cosh(\theta) \\ cs\sinh(\theta) \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} t'(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s\cosh(\theta) \\ cs\sinh(\theta) \end{pmatrix} \\
\frac{dx'}{dt'} &= \underbrace{\frac{dx'}{ds}}_{c\sinh(\theta)} \left(\underbrace{\frac{dt'}{ds}}_{\cosh(\theta)} \right)^{-1} = c\tanh(\theta)
\end{aligned}$$

Da dieser Punkt im bewegten Bezugssytem ruht, bewegt er sich im ruhenden Bezugssystem mit der Geschwindigkeit V des bewegten Beobachters. Die Geschwindigkeit des bewegten Bezugssystems ist deshalb gerade

$$V = \frac{dx'}{dt'} = c\tanh(\theta) \tag{9.10}$$

Wir können also θ mit der Relativgeschwindigkeit in Beziehung setzen:

$$\tanh(\theta) = \frac{V}{c} \qquad \Rightarrow \quad \theta = \operatorname{atanh}(\frac{V}{c})$$

Andererseits können wir die Lorentztransformation durch die Relativgeschwindigkeit ausdrücken. Wir nutzen die Beziehung $\cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta) = 1$, dividieren sie durch $\cosh^2(\theta)$ und erhalten.

$$1 - \tanh^2(\theta) = \frac{1}{\cosh^2(\theta)} \qquad \Rightarrow \qquad \cosh(\theta) = \sqrt{\frac{1}{1-\tanh^2(\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Beim Wurzelziehen kommt nur die Lösung mit dem positiven Vorzeichen in Frage, weil der Cosinus Hyperbolikus nur positive Werte annimmt. Entsprechend erhalten wir den Sinus Hyperbolikus

$$\sinh(\theta) = \tanh(\theta)\cosh(\theta) \overset{\text{Gl. 9.10}}{=} \frac{V/c}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Nun können wir die Lorentztransformation durch die Relativgeschwindigkeit ausdrücken.

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{V}{c} \\ \frac{V}{c} & 1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also die Lorentz-Transformation der Koordinaten eines ruhenden Betrachters (t, x) in die eines bewegten Betrachters (x', t') als

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{V}{c^2} \\ V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

Betrachten wir nun den nichtrelativistischen Grenzfall, d.h. $c \to \infty$, erhalten wir gerade die entsprechende Galilei-Transformation. Dazu bilden wir die Taylor-Entwicklung der Lorentztransformtion in $\frac{1}{c^2}$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} + O(\frac{1}{c^2})$$

Der von $\frac{1}{c^2}$ unabhängige Term ist gerade die Galilei-Transformation Gl. 5.28 auf S.106.

9.3.3 Lorentz-Skalar, Lorentz-Vektoren

Mann nennt eine Größe, die mathematisch ein Skalar ist und unter Lorentz-Transformationen invariant ist einen **Lorentz-Skalar**.

Eine vektorielle Größe, die sich unter den Lorentz-Transformationen wie der Distanzvektor von zwei Ereignissen, transformiert, nennt man einen **Lorentz-Vektor**.

9.3.4 Schreibweisen

Es gibt unterschiedliche Schreibweisen für Vierervektoren. Wir wollen diese kurz ansprechen.

- Komplexe Schreibweise: $\vec{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ict, x, y, z)$. Durch das Einführen einer imaginären zeitartigen Koordinate kann der metrische Tensor gleich der Einheitmatrix, genau wie im kartesischen Raum, gewählt werden, d.h. $\Delta s^2 = \Delta x_0^2 + \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2$
- Ko-und Kontravariante Schreibweise: In der ko- und kontravarianten Schreibweise werden die Indizes einmal oben und einmal unten geschrieben. Wir definieren
  - einen kontravarianten Vektor $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$
  - einen kovarianten Vektor $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z)$, das heißt $x_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} g_{\mu,\nu} x^\nu$
  - das Skalarprodukt $\Delta s^2 = \sum_{\mu=0}^{3} \Delta x_\mu \Delta x^\mu$

  In der **Einsteinschen Summenkonvention** wird immer über gleiche Indizes summiert, wobei der eine Index kovariant und der andere kontravariant sein muss. Das Summenzeichen wird dann einfach weggelassen. Man schreibt deshalb $\Delta s^2 = \Delta x_\mu \Delta x^\mu$

9.4 Relativistisches Wirkungsprinzip

Ich empfehle, an dieser Stelle die ko- und kontravariante Vektornotation aus Kapitel 5.4 auf Seite 91 zu wiederholen

Das klassisches Wirkungsprinzip

$$S\left[\vec{r}(t)\right] = \int_{t_1, \vec{r}_1}^{t_2, \vec{r}_2} dt\, \mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

mit der Lagrangefunktion für ein freies Teilchen

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$$

führt zu keiner Lorentz-invarianten Beschreibung. In der Relativitätstheorie sind Raum und Zeit nicht mehr gegeneinander ausgezeichnet. Deshalb müssen wir das Wirkungsprinzip verallgemeinern.

Zunächst liegt es nahe, das Zeitintegral durch ein Integral über die Eigenzeit zu ersetzen. Darüber hinaus verallgemeinern wir die Geschwindigkeit auf die **Vierergeschwindigkeit**

Definition 9.4 *VIERERGESCHWINDIGKEIT*
Die Vierergeschwindigkeit u^μ ist die relativistische Verallgemeinerung der normalen Geschwindigkeit und ist durch

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx^\mu}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\,(c, v_x, v_y, v_z) \tag{9.11}$$

definiert, wobei $v_i = \frac{dx_i}{dt}$ die normale Geschwindigkeit ist.

Das Skalarprodukt der Vierergeschwindigkeit ist eine Konstante, nämlich $u_\mu u^\mu = c^2$. Selbst wer auf einer (ruhenden) Couch sitzt, rast also mit Lichtgeschwindigkeit in die Zukunft. Wer durch die Gegend rast, bewegt sich langsamer in die Zukunft, was sich in der Zeitdilatation äußert.

Nun können wir mit Hilfe der relativistischen Vektoren x^μ, u^μ und der Eigenzeit τ eine relativistisch invariante Wirkung beschreiben. Die Wirkung muss also ein Lorentz-Skalar sein, darf also seinen Wert bei einer Lorentztransformation aller physikalischen Größen, die in die Wirkung eingehen, nicht verändern.

Definition 9.5 *RELATIVISTISCHE WIRKUNG*
Der relativistische Ausdruck für die Wirkung ist

$$S[x^\mu(\tau)] = \int_{a^\mu}^{b^\mu} d\tau\; \mathcal{F}(x^\mu(\tau), u^\mu(\tau)),$$

wobei $\mathcal{F}$ ein Lorentz-Skalar ist, also unter den Lorentz-Transformationen unverändert bleibt. Dabei ist x^μ der Vierervektor eines Ereignisses. Der Pfad im Minkowski-Raum $x^\mu(\tau)$ ist eine kontinuierliche Folge von Ereignissen, die durch die Eigenzeit parameterisiert sind. u^μ ist die Vierergeschwindigkeit des Pfades. Die Randwerte sind die beiden Ereignisse $a^\mu = x^\mu(\tau_1)$ und $b^\mu = x^\mu(\tau_2)$.

Durch Vergleich mit dem nichtrelativistischen Ausdruck für die Wirkung, erhalten wir die Lagrangefunktion eines relativistischen Systems

$$S[x^\mu(\tau)] = \int_{a^\mu}^{b^\mu} d\tau\; \mathcal{F}(x^\mu(\tau), u^\mu(\tau)) = \int_{t_a,\vec{r}_a}^{t_b,\vec{r}_b} dt\; \underbrace{\frac{d\tau}{dt}\mathcal{F}(x^\mu(\tau), u^\mu(\tau))}_{\mathcal{L}}$$

RELATIVISTISCHE LAGRANGEFUNKTION

Die Lagrangefunktion eines relativistischen Systems ist selber kein Lorentzskalar, sondern hat die Form

$$\mathcal{L}(x^\mu, u^\mu) = \frac{d\tau}{dt}\mathcal{F}(x^\mu, u^\mu) \overset{Gl.\,9.1}{=} \sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}\mathcal{F}(x^\mu, u^\mu) \tag{9.12}$$

Dabei ist $\mathcal{F}$ ein Lorentzskalar.

Man mag sich fragen, warum wir nicht einfach den Lorentz-Skalar als Lagrangefunktion betrachtet haben, und bei der Herleitung der Euler-Lagrange Gleichungen die Zeit durch die Eigenzeit ersetzt haben. Dies sollte eine relativistisch invariante Form der Bewegungsgleichungen liefern. Der Grund ist folgender: Betrachten wir die Variation eines Pfades zwischen zwei festen Ereignissen, dann ist die Weglänge verschiedener Pfade unterschiedlich. Deshalb enden die Wegintegrale nicht an denselben

Punkten von τ, sodass wir die üblichen Schritte der Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen nicht mehr anwenden können. Wenn wir aber das Eigenzeitintegral erst in ein konventionelles Zeitintervall umwandeln, dann haben wir ein festes Integrationsinterval von t_a nach t_b.

Freies Teilchen

Jeder Physiker fragt sich irgendwann, warum die Lagrangefunktion die Form "kinetische weniger potentieller Energie" hat. Die Erklärung ist, dass dies die einfachste Form ist, die mit der Relativitätstheorie kompatibel ist. Das wird klar, wenn wir uns die relativistische Gleichung für ein freies Teilchen ansehen.

Wir setzen den wohl einfachsten Ausdruck für die relativistische Wirkung an, den man sich ausdenken kann, indem wir $\mathcal{F}$ gleich einer Konstante setzen. Die Konstante bezeichnen wir durch

$$\mathcal{F} = -m_0 c^2 \,.$$

Wir nennen m_0 die **Ruhemasse** des Teilchens.[12]

Wir werden sehen, dass die entsprechende Wirkung gerade ein freies Teilchen beschreibt.

WIRKUNG UND LAGRANGEFUNKTION EINES FREIEN RELATIVISTISCHEN TEILCHENS

.

$$S[x^\mu(\tau)] = -m_0 c^2 \int d\tau \tag{9.13}$$

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}, t) \overset{\text{Gl. 9.12}}{=} -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} \tag{9.14}$$

Die Wirkung ist also, bis auf die Konstante $m_0 c^2$, nur ein Mass der Weglänge im Minkowskiraum.

Der Ausdruck mit der Wurzel sieht ungewöhnlich aus. Um uns zu überzeugen, dass wir mit dieser Wirkung tatsächlich ein freies Teilchen beschreiben, bilden wir den klassischen Grenzfall der Wirkung

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}, t) &= -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} = -m_0 c^2 \left[1 - \frac{1}{2}\frac{\vec{v}^2}{c^2} + O\left(\left(\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^2\right)\right] \\ &= -m_0 c^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m_0 \vec{v}^2}_{\text{n. rel. } E_{kin}} + \underbrace{m_0 c^2 \cdot O\left(\left(\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^2\right)}_{\text{relativistische Korrekturen}}\end{aligned}$$

Bis auf die Konstante $-m_0 c^2$, welche die Euler-Lagrange Gleichungen nicht beeinflusst, erhalten wir die klassische Wirkung eines freien Teilchens. Die Konstante $m_0 c^2$ ist die **Ruheenergie**. Da die Ruheenergie eine Art der potentiellen Energie ist, erhalten wir hier eine Motivation dafür, die Lagrangefunktion als "kinetische Energie minus potentieller Energie" zu schreiben.

9.5 Dispersionrelation

Dispersionsrelationen sind ein ungemein nützliches Werkzeug in der Physik. Eine **Dispersionrelation** ist der Energie-Impuls Zusammenhang eines kräftefreien Teilchens. Kennt man diesen Zusammenhang, dann kann man aus der Dispersionsrelation ableiten, wie sich das Teilchen unter dem Einfluss von Kräften bewegt. Für die Teilchen, die wir bisher kennengelernt haben, ist dieser Zusammenhang so einfach, dass die Dispersionsrelation wenig Neues beiträgt. In der Festkörperphysik betrachten

[12] Wir werden später noch den Begriff der relativistischen Masse einführen, der sich von der Ruhemasse unterscheidet. Die Ruhemasse ist gerade die übliche Masse eines Teilchens.

wir zusammengesetzt Teilchen, sogenannte **Quasiteilchen**, mit extrem komplizierten Bewegungsgleichungen. Dort ist die Dispersionsrelation, dann oft **Bandstruktur** genannt, ein unersetzliches Hilfsmittel um die Bewegung zu verstehen. Deshalb wollen wir uns hier die Dispersionsrelation eines relativistischen freien Teilchens ansehen.

Energie und Impuls haben wir im Zusammenhang mit dem Noethertheorem definiert. Das Noethertheorem, Gl. 6.7, sagt dass die Größe

$$Q(x(t), \dot{x}(t), t) = \vec{p}\, \frac{\partial \vec{x}'}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\epsilon=0} - \vec{E}\, \frac{\partial t'}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\epsilon=0}$$

erhalten ist, wenn die Wirkung unter der Transformation $(\vec{x}'(\vec{x}, t, \varepsilon), t'(\vec{x}, t, \varepsilon))$ invariant ist. Dabei waren kanonischer Impuls, Gl. 6.5 und Energie, Gl. 6.6 wie folgt definiert

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} \\ E &= \vec{p}\vec{v} - \mathcal{L} \end{aligned}$$

Wir werden jetzt versuchen, diese Größen auf Vierervektoren zu verallgemeinern. Die transformierten Koordinaten fassen wir wie üblich zum Vierervektor $x'^{\mu} = (ct', \vec{x}')$ zusammen. Die Erhaltungsgröße erhält die Form

$$Q(x^{\mu}(t), u^{\mu}(t)) = -\left[\underbrace{\frac{E}{c}}_{=p^0} \frac{\partial x'^0}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} - \vec{p}\, \frac{\partial \vec{x}'}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\right] = -p_{\mu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \tag{9.15}$$

wobei der **kanonische Viererimpuls** wie folgt definiert ist

Definition 9.6 *KANONISCHER VIERERIMPULS*

$$p^{\mu} :\hat{=} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \tag{9.16}$$

Die zeitliche Komponente ist die Erhaltungsgröße, welche aus Zeittranslationsinvariant folgt, und die räumliche Komponente des Viererimpulses resultiert aus einer Raumtranslationsinvarianz.

Obwohl der Ausdruck für die Erhaltungsgröße eine kovariante Form hat, bedeutet das noch nicht, dass der Viererimpuls auch ein Lorentzvektor ist. Um dies zu zeigen benötigen wir zwei Aussagen:

- Bildet das Skalarprodukt von einem Vektor mit einer Größe, die ein Lorentz-Vektor ist, einen Lorentz-Skalar, dann ist dieser Vektor ein Lorentz-Vektor.

  Wir gehen von den folgenden Annahmen aus

$$\forall_{\vec{b} \text{ mit } \vec{b}'=\boldsymbol{\Lambda}\vec{b}} \quad \vec{a}\boldsymbol{g}\vec{b} = \vec{a}'\boldsymbol{g}\vec{b}' \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{g} \overset{\text{Gl. 9.9}}{=} \boldsymbol{\Lambda}^{\top}\boldsymbol{g}\boldsymbol{\Lambda} \tag{9.17}$$

  und zeigen dass

$$\vec{a}' = \boldsymbol{\Lambda}\vec{a}$$

  Beweis: Zunächst erzeugen wir eine Relation, die wir später benötigen

$$\boldsymbol{\Lambda}^{\top}\boldsymbol{g}\boldsymbol{\Lambda} \overset{\text{Gl. 9.9}}{=} \boldsymbol{g} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\Lambda}^{\top} = \boldsymbol{g}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{g}^{-1} \tag{9.18}$$

Nun kommen wir zum eigentlichen Beweis:

$$\begin{aligned}
\forall_{\vec{b} \text{ mit } \vec{b}'=\Lambda\vec{b}} \quad \vec{a}\boldsymbol{g}\vec{b} &\overset{\text{Gl. 9.17}}{=} \vec{a}'\boldsymbol{g}\vec{b}' \overset{\text{Gl. 9.17}}{=} \vec{a}'\boldsymbol{g}\boldsymbol{\Lambda}\vec{b} \\
\Rightarrow \vec{a}\boldsymbol{g} &= \vec{a}'\boldsymbol{g}\boldsymbol{\Lambda} \\
\Rightarrow \vec{a}' &= \vec{a}\boldsymbol{g}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{g}^{-1} \overset{\text{Gl. 9.18}}{=} \vec{a}\boldsymbol{\Lambda}^{\top} = \boldsymbol{\Lambda}\vec{a}
\end{aligned}$$

q.e.d.

- Die Erhaltungsgröße Q ist ein Lorentz-Skalar.

  Um dies zu sehen, betrachten wir nochmals die Herleitung des Noethertheorems.

$$\left.\frac{dS}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0,\delta S[x(t)]=0} \overset{\text{Gl. 6.12}}{=} \int dt \frac{dQ(x(t),\dot{x}(t))}{dt} \tag{9.19}$$

  Dabei ist ε der Parameter einer kontinuierlichen Symmetrietransformation, welche die Wirkung invariant lässt. Der Zusatz $\delta S[x(t)] = 0$ bedeutet, dass die Identität nur für Bahnen gilt, welche die Euler-Lagrange-Gleichungen und damit das Extremalprinzip erfüllen. Liegt eine Symmetrietransformation vor, dann gilt $\frac{dS}{d\epsilon} = 0$. Da der Ausdruck auf der linken Seite verschwindet, haben wir geschlossen, dass Q invariant ist.

  Das Zeitintegral auf der rechten Seite von Gl. 9.19 lässt sich durch ein Eigenzeitintegral ausdrücken.

$$\int dt \frac{dQ}{dt} = \int d\tau \, \frac{dQ}{d\tau}$$

  Wäre Q kein Lorentz-Skalar, dann wäre das Eigenzeitintegral auch kein Lorentz-Skalar, was der Voraussetzung wiederspricht, dass S ein Lorentz-Skalar ist. Also schlïeßen wir dass Q ein Lorentz-Skalar ist.

Viererimpuls eines freien Teilchens

Nun bestimmen wir die Dispersionsrelation $E(\vec{p})$ des relativistischen, freien Teilchens anhand der entsprechenden Lagrangefunktion Eq. 9.14. Zunächst bestimmen wir Energie und Impuls des freien Teilchens.

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} \overset{\text{Gl. 9.14}}{=} \frac{\partial}{\partial v_i}\left(-m_0 c^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}\right) = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \tag{9.20}$$

$$\begin{aligned}
E = \vec{p}\vec{v} - \mathcal{L} &\overset{\text{Gl. 9.14}}{=} \frac{m_0\vec{v}^2}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} - \left(-m_0 c^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\left[m_0\vec{v}^2 + m_0 c^2\left(1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)\right] = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \qquad (9.21)
\end{aligned}$$

Der **kinetische Viererimpuls** , also der kanonische Viererimpuls des freien Teilchens ist daher

$$p^\mu \overset{\text{Gl. 9.16}}{\hat{=}} \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} m_0 c \\ m_0\vec{v} \end{pmatrix} \overset{\text{Gl. 9.11}}{\hat{=}} m_0 u^\mu$$

KINETISCHER VIERERIMPULS

Der kinetische Viererimpuls also der Viererimpuls eines freien Teilchens ist das Produkt aus Ruhemasse m_0 und Vierergeschwindigkeit u^μ

$$p^\mu_{kin} = m_0 u^\mu \tag{9.22}$$

Nun müssen wir Geschwindigkeiten noch durch die Impulse ausdrücken.

$$\vec{p}^2 = \frac{m_0^2 \vec{v}^2}{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} \Rightarrow p^2 = m_0^2\vec{v}^2 + \vec{p}^2\frac{\vec{v}^2}{c^2} = \left(m_0^2 + \frac{\vec{p}^2}{c^2}\right)\vec{v}^2$$
$$\Rightarrow \vec{v}^2 = \frac{\vec{p}^2 c^2}{m_0^2 c^2 + \vec{p}^2}$$
$$\Rightarrow 1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2} = 1 - \frac{\vec{p}^2}{m_0^2c^2+\vec{p}^2} = \frac{m_0^2c^2}{m_0^2c^2+\vec{p}^2} = \frac{1}{1+\frac{\vec{p}^2}{m_0^2c^2}}$$

Damit erhalten wir die Energie

$$E \overset{Gl.\ 9.21}{=} \pm m_0 c^2 \sqrt{1+\frac{\vec{p}^2}{m_0^2c^2}} = \pm\sqrt{m_0^2c^4+\vec{p}^2c^2}$$

was sich auf die bekanntere, folgende Form bringen lässt.

RELATIVISTISCHE DISPERSIONRELATION EINES FREIEN TEILCHENS

$$E^2 = m_0^2c^4 + \vec{p}^2c^2 \tag{9.23}$$

Die Energie $\pm m_0c^2$ ist die Ruheenergie des Teilchens. Die Dispersionsrelation ist in Abb. 9.12 graphisch dargestellt.

Dies ist gerade die Einsteinsche Formel für die relativistische Dispersionsrelation eines freien Teilchens. Sie hat gezeigt, dass Masse mit Energie gleichzusetzen ist, und war daher der Ansatzpunkt für die Entwicklung der Kernenergie und der Atombombe, bei der Masse in Wärmeenergie umgewandelt wird.

Darüber hinaus gibt es auch Zustände mit negativer Energie, die später als Antimaterie gedeutet worden sind. Positronen sind zum Beispiel die Antiteilchen von Elektronen. Bringt man ein Positron und ein Elektron zusammen, dann zerstrahlen sie in zwei Photonen, d.h. Licht. Das Licht hat gerade die Frequenz, die benötigt wird um die Energie wegzutragen. Die Positronenannihilation ist eine experimentelle Technik, bei der man aus der Frequenz und Richtung der beiden Photonen auf den Energie und Impulshaushalt der Elektronen in einem Festkörper schließt.

Nach Gl. 9.23 gilt für die Enerige

$$E(\vec{p}) = \pm\sqrt{m_0^2c^4+\vec{p}^2c^2} = m_0c^2\sqrt{1+\left(\frac{\vec{p}}{m_0c}\right)^2}$$
$$\approx m_0c^2 + \frac{1}{2}\frac{\vec{p}^2}{m_0} + O(\vec{p}^2)$$

Wir erhalten also für kleine (klassische) Impulse gerade die klassische Dispersionsrelation $E_{klass} = \vec{p}^2/(2m_0)$, mit dem Unterschied der Ruheenergie.

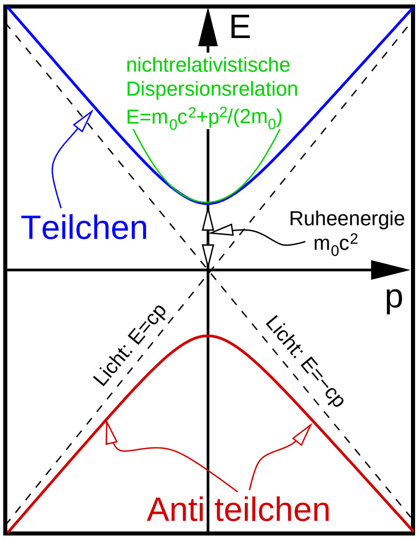


Abb. 9.12: Relativistische Dispersionsrelation: Es gibt zwei Zweige der Dispersionsrelation eines relativistischen Teilchens. Der Zweig mit positiven Energien beschreibt die Teilchen und der Zweig mit negativen Energien die Antiteilchen. Selbst ohne Impuls besitzen die (Anti)Teilchen eine Energie, nämlich die Ruheenergie m_0c^2. Bei kleinen Impulsen, d.h. für langsame Teilchen kann die Dispersionsrelation durch eine Parabel angenähert werden. Dies ist gerade die nicht-relativistische Näherung. Für grosse Impulse wird die Dispersionsrelation linear, ähnlich zu der von Licht, was die endliche Lichtgeschwindigkeit wiederspiegelt.

Bedeutung von Dispersionrelationen

Die Bedeutung von Dispersionsrelationen kommt daher, dass die Energie, durch den Impuls ausgedrückt gerade die Hamiltonfunktion ist. Damit können wir die Dispersionsrelation mit Hilfe der Hamiltonschen Gleichungen interpretieren.

- Die Steigung der Dispersionsrelation ist die Geschwindigkeit des Teilchens für den gegebenen Impuls. Dies ergibt sich aus der Hamiltonschen Gleichung

$$v = \dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{\partial E}{\partial p}$$

- Eine konstante Kraft verschiebt den Impuls propotional zur Kraft. Dies ergibt sich aus der anderen Hamiltonschen Gleichung

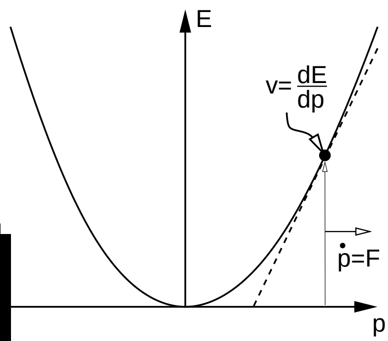
$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = F$$

Auf diese Weise kann man sich bereits rein graphisch einen Eindruck von der Bewegung eines Teilchens machen.

Wenden wir diese Aussagen auf das freie relativistische Teilchen, erkennen wir sofort, dass ein relativistisches Teilchen nicht schneller als die Lichtgeschwindigkeit sein kann, da die Steigung niemals größer als c ist. Eine Kraft führt bei einem schnellen Teilchen zu einer geringeren Beschleunigung als bei einem langsamen: Ein schnelles teilchen hat einen großen Impuls. Für große Impulse steigt die Geschwindigkeit, die Steigung der Dispersionsrelation, geringer an als für kleine Impulse. Es erscheint, als hätte das schnellere Teilchen eine grössere Masse.

9.6 Verallgemeinerung der Newtonschen Bewegungsgleichung

Zunächst verallgemeinern wir das Newtonsche Kraftgesetz und untersuchen seine Bedeutung durch Vergleich mit dem nichtrelativistischen Grenzfall. Dazu definieren wir uns zunächst die Viererkraft. Um einen Lorentzvektor als Viererkraft zu erhalten, können wir den Viererimpuls nicht nach der Zeit ableiten, da die Zeit kein Lorentzskalar ist. Deshalb leiten wir den Viererimpuls, der ein Lorentzvektor ist, nach der Eigenzeit, ein Lorentzskalar, ab und erhalten damit die Viererkraft als Lorentzvektor.



Definition 9.7 *VIERERKRAFT*

$$K^\mu \overset{def}{=} \frac{dp^\mu}{d\tau} \tag{9.24}$$

Dabei ist τ die Eigenzeit, Gl. 9.1. Diese Definition ist gleichzeitig die relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen Bewegungsgleichung.

Die räumlichen Komponenten der Viererkraft erhalten wir

$$\begin{pmatrix}K^0\\ \vec{K}\end{pmatrix} \overset{Gl.\ 9.24,9.16}{=} \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}E/c\\ \vec{p}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}E/c\\ \vec{p}\end{pmatrix}$$

$$\overset{\dot{\vec{p}}=\vec{F};\ \dot{E}=P}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}\begin{pmatrix}P/c\\ \vec{F}\end{pmatrix}$$

Dabei ist $P \overset{\text{def}}{=} \frac{dE}{dt}$ die Leistung, die von der Kraft am System verrichtet wird. Die Leistung ist nicht mit dem Impuls zu verwechseln. Im einen Fall wird ein kleines $\vec{p}$ im anderen ein großes P verwendet.

Der räumliche Teil des Kraftgesetzes Gl. 9.24 stimmt also, nachdem ein Faktor auf beiden Seiten weggekürzt wurde, mit dem Newtonschen Kraftgesetz

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

überein. Newton hat sein Kraftgesetzes nicht durch $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$, sondern als $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ ausgedrückt. Die beiden Formen unterscheiden sich dadurch, dass im einen Fall der kinetische anstelle des kanonischen Impulses verwendet wurde, was eine Einschränkung auf bestimmte Systeme nach sich führt.

Der relativistische Zusammenhang des kinetischen Impulses mit der Geschwindigkeit unterscheidet sich allerdings vom nichtrelativistischen Ergebnis $\vec{p} = m\vec{v}$. Betrachten wir ein freies Teilchen, bei dem der kanonische Impuls gleich dem kinetischen Impuls ist, erhalten wir

RELATIVISTISCHE NEWTONSCHE BEWEGUNGSGLEICHUNG FÜR EIN FREIES TEILCHEN

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} = \frac{d}{dt}M(|\vec{v}|)\vec{v} = \vec{F}$$

Um die Analogie mit der Newtonschen Bewegungsgleichung wieder herzustellen führt man die geschwindigkeitsabhängige **relativistische Masse** ein.

Definition 9.8 *RELATIVISTISCHE MASSE*

$$M(|\vec{v}|) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$$

Im Gegensatz zur Ruhemasse m_0 nimmt die relativistische Masse M eines relativistischen Teilchens also mit der Geschwindigkeit zu. Es wird also zunehmend schwieriger die Geschwindigkeit eines schnellen Teilchens weiter zu erhöhen, sodass die Lichtgeschwindigkeit niemals überschritten werden kann.

9.6.1 Additionstheorem für Geschwindigkeiten

Editor: This is not finished. It is useless!

Betty treibe ihr Raumschiff mit einer konstanten Kraft an. Sie kann die Beschleunigung aus der Menge bekannten Treibstoffs bestimmen und damit den Anstieg ihrer Geschwindigkeit. Wir wagen uns jetzt ein wenig auf Glatteis und nehmen an dass einige der Regeln für Inertialsysteme auch für Betty's beschleunigtes Bezugssystem gelten: Betty erfährt also eine konstante Beschleunigung und damit einen quadratischen Anstig ihrer eigenen Geschwindigkeit sogar über die Lichtgeschwindigkeit hinaus. Wie kann das geschehen? Betrachtet Betty ihren Heimatplaneten wird sich der aber nie mit Überlichtgeschwindigkeit von Ihr entfernen.

$$K^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} \dot{E}c \\ \vec{F} \end{pmatrix} \overset{\vec{v}=0}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F} \end{pmatrix}$$

Nun transformieren wir die Kraft in Rudi's Bezugssystem

Die Lorentztransformation ist

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\vec{V}}{c} \\ -\frac{\vec{V}}{c} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

wobei wir $V = -\vec{v}$ wählen müssen da wir von Bettys Bezugssytem wirder in Rudi's transformieren müssen. $\vec{v}$ ist dabei die geschwindigkeit von betty in Rudi's Bezugssystem.

Editor: Die Wahl der gestrichenen und ungestrichenen Größen sollte vertauscht werden. Es ist besser wenn die ungestrichenen Größen dem ruhenden Bezugssystem zugeordnet werden.

$$K'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu K^\nu$$

$$\begin{pmatrix} K'^0 \\ \vec{K}' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\vec{v}}{c} \\ \frac{\vec{v}}{c} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^0 \\ \vec{K} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} K^0 + \frac{\vec{v}}{c}\vec{K} \\ \vec{K} + \frac{\vec{v}}{c}K^0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} \dot{E}'/c \\ \vec{F}' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{V}}{c}\vec{F} \\ \vec{F} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F}' = \vec{F} \qquad \wedge \qquad \dot{E}' = \vec{v}\vec{F}$$

Die Kraft ist also im Gegensatz zur Viererkraft in beiden Bezugssystemen identisch. Dennoch ist die Beschleunigung in beiden Bezugssystemen unterschiedlich, weil die relativistische Masse von Betty's Raumschiff in Rudi's Bezugssystem größer ist als in Betty's Bezugssystem. In letzterem ist die relativistische Masse gleich der Ruhemasse.

Hier scheint ein Paradox vorzuliegen, da Betty sich scheinbar auf Überlichtgeschwindigkeit beschleunigen kann, Rudi aber nur eine endliche Grenzgeschwindigkeit wahrnimmt.

Betty kann ihre Geschwindigkeit überprüfen, indem sie einen Lichtpuls zurück auf einen Spiegel auf ihren Heimatplaneten sendet und aus der Laufzeit ihren Abstand misst. Erreicht Betty Überlichtgeschwindigkeit, wird sie der Impuls nicht mehr erreichen. Nach unendlich langer Zeit kann sie zurückrechnen, wann sie Lichgeschwindigkeit überschritten hat.

9.7 Exkurs: Wick-Rotation

Die Relativitätstheorie zeigt dass die Unterscheidung von Raum und Zeit keine absolute ist, sondern von Standpunkt des betrachters abhängt. Damit stellt die Relativitätstheorie eine Vereinheitlichung der Konzepte von Raum und Zeit dar. Dennoch unterscheiden sich zeitliche und räumliche Koordinaten, durch die unterschiedlichen Vorzeichen im metrischen Tensor.

Um die Symmetrie von Raum und Zeit noch deutlicher zu machen kann man eine **Wick-Rotation** durchführen, indem man eine imaginäre Zeitvariable einführt. $\bar{x}^0 = ict$.

Wir führen nun neue Vektoren $\bar{x}^\mu$ ein, die sich von den bekannten Vektoren x^μ dadurch unterscheiden, dass die zeitliche Komponente einen zusätzlichen Faktor i erhält.

$$\bar{x}^\mu \hat{=} \begin{pmatrix} \bar{x}^0 \\ \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} ict \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt für die neuen Vektoren entspricht dem des vierdimensionalen Cartesischem Raum.

$$\bar{x}_\mu \bar{x}^\mu = (\bar{x}^0)^2 + (\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^2)^2 + (\bar{x}^3)^2$$

Dies bedeutet, dass der metrische Tensor $g_{\mu,nu} = \delta_{\mu,\nu}$ gerade die Einheitsmatrix ist.

Die Lorentztransformationen sind also nichts weiter wie Drehungen dieser Vektoren im vierdimensionalen kartesischen Raum.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} ict' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}'^0 \\ \bar{x}'^1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}^0 \\ \bar{x}^1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ict0 \\ x \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\phi) & i\sin(\phi) \\ i\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit Raum und Zeitkoordinaten immer noch reell bleiben, müssen wir den Winkel rein imaginär wählen, also

$$\phi = -i\theta$$

wobei θ rein reell ist. Damit ist

$$\begin{aligned}
i\sin(\phi) &= i\frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} = \sinh(\theta) \\
\cos(\phi) &= \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} = \cosh(\theta)
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die bekannte Lorentz-Transormation von Raum und Zeitkoordinaten

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Die Wick-Rotation steht zwischen der Quantenmechanik und der statistischen Mechanik. Betrachten wir die Schrödinger Gleichung

$$i\hbar\partial_t \Psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(r) \right] \Psi(\vec{r}, t)$$

dann erhalten wir unter der Wick-Rotation die eine Art der Diffusionsgleichung

$$\partial_{\bar{t}} P(\vec{r}, \bar{t}) + D\vec{\nabla}^2 P(\vec{r}, \bar{t}) = \frac{1}{\hbar} V(r) P(\vec{r}, \bar{t})$$

wobei $\bar{t} = it$. Das Feld $P(\vec{r}, \bar{t}) = \Psi(\vec{r}, t)$ beschreibt die Teilchendichte. Der Faktor $D = \frac{\hbar}{2m}$ spielt jetzt die Rolle einer Diffusionskonstante. Der term auf der rechten Seite der Gleichung beschreibt die Erzeugung von Teilchen.

Die Wick-Rotation ist ein wichtiges Hilfsmittel um komplizierte quantenmechanische Probleme zu lösen, indem man zunächst das, häufig einfachere, statistische Problem löst und dann eine Rückwärts-Wickrotation des Resultats durchführt. Eine Beispiel, das darauf basiert, ist die **Quanten-Monte-Carlo Methode**.

9.8 Zusammenfassung

Chapter 10

Kontinuierliche Systeme (6h)

In diesem Kapitel verallgemeinern wir die Punktdynamik auf **Felder**. Anstelle von Positionen betrachten wir Funktionen, die vom Ort abhängen. Beispiele für Felder sind die elektromagnetischen Felder und die Wellenfunktion der Quantenmechanik.

Die Behandlung von Feldern wird uns auf den Übergang zur Quantenmechanik leiten. Betrachten wir die Bewegung von Wellenpaketen eines Feldes erhalten wir Gleichungen die den Hamiltonschen Gleichungen analog sind. Dies erlaubt es uns die Punktteilchen der Klassischen Mechanik durch winzige Wellenpakete zu ersetzen. Auf diese Weise lassen sich Interferenzeffekte in die Theorie einführen, die experimentell auf kleinen Längenskalen beobachtet werden. Das Resultat ist die Quantenmechanik.

Darüber hinaus ergibt sich aus Feldgleichungen in natürlicher Weise eine Grenzgeschwindigkeit, welche der Lichtgeschwindigkeit entspricht. Eine Grenzgeschwindigkeit folgt zwar nicht zwingend aus einer Wellengleichung, aber die einfachen Wellengleichungen weisen eine solche Grenzgeschwindigkeit auf. Damit erhalten wir ausserdem eine natürliche Begründung der Relativitätstheorie. In der Tat entstand die Relativitätstheorie aus dem Dilemma dass die Feldgleichungen der Elektrodynamik, die Maxwellgleichungen, nicht Galilei-invariant sind.

10.1 Diskrete lineare Kette

In einem Material haben die Atome einen durch den Bindungsabstand vorgegebenen Gleichgewichtsabstand. Wird ein Atom verschoben, dann wirken Bindungskräfte auf die Nachbaratome. Die kollektiven Schwingungen des Materials sind die Schallwellen. Das einfachste Modellsystem für diese Gitterschwingungen ist die lineare Kette.

Wir betrachten zunächst eine **diskrete lineare Kette** :

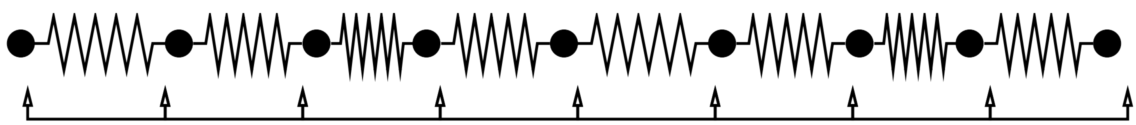
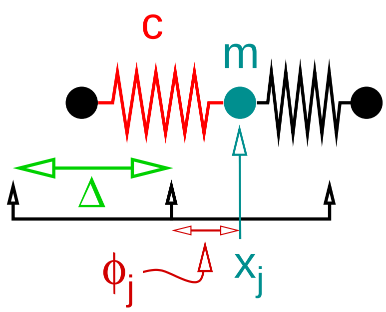


Abb. 10.1: Lineare Kette

Die Positionen der Glieder (Massepunkte) in der Kette sind durch

$$x_\mu = \Delta \cdot \mu + \phi_\mu$$

gegeben, wobei Δ der Abstand der Ruhelagen der Glieder ist und ϕ_μ deren Auslenkung. Der Index μ des entsprechenden Gliedes kann eine beliebige ganze Zahl sein.



Um die Bewegungsgleichungen der Glieder zu erhalten, stellen wir zunächst die Lagrangefunktion für das System auf. Sie hat in diesem einfachen Fall die Form "kinetische Energie weniger potentieller Energie".[1]

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\mu} m\dot{\phi}_{\mu}^{2}}_{\text{kin. Energie}} - \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\mu} c(\phi_{\mu+1}-\phi_{\mu})^2}_{\text{pot. Energie}} \tag{10.1}$$

Die resultierende Euler-Lagrange-Gleichung hat die Form [2]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_{\mu}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{\mu}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\sum_{\nu} m\dot{\phi}_{\nu}\underbrace{\frac{d\dot{\phi}_{\nu}}{d\dot{\phi}_{\mu}}}_{\delta_{\mu,\nu}}\right) + \sum_{\nu} c(\phi_{\nu+1}-\phi_{\nu})\left(\underbrace{\frac{d\phi_{\nu+1}}{d\phi_{\mu}}}_{\delta_{\mu,\nu+1}} - \underbrace{\frac{d\phi_{\nu}}{d\phi_{\mu}}}_{\delta_{\mu,\nu}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{\phi}_{\mu} - c\Big(\phi_{\mu+1} - 2\phi_{\mu} + \phi_{\mu-1}\Big) = 0 \tag{10.2}$$

Das System ist zeittranslationsinvariant und besitzt eine diskrete Raumtranslationssymmetrie. Deshalb wählen wir als Lösungsansatz für eine Partiallösung eine Exponentialfunktion in Raum und Zeit:

$$\phi_{\mu}(t) = e^{i(k\Delta\mu - \omega t)}$$

Dabei ist k der **Wellenvektor**[3] und ω die Kreisfrequenz.

Wir ersetzen

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}_{\mu}(t) &= -\omega^2\phi_{\mu}(t)\\ \phi_{\mu+1}(t) &= e^{ik\Delta}\phi_{\mu}(t)\\ \phi_{\mu-1}(t) &= e^{-ik\Delta}\phi_{\mu}(t)\end{aligned}$$

in der Euler-Lagrange-Gleichung Gl. 10.2 und erhalten

$$0 = \left\{-m\omega^2 - c\left[e^{ik\Delta} - 2 + e^{-ik\Delta}\right]\right\} e^{i(k\Delta\mu - \omega t)}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = -\frac{c}{m}\left(\underbrace{e^{ik\frac{\Delta}{2}} - e^{-ik\frac{\Delta}{2}}}_{=2i\sin(k\Delta/2)}\right)^2 = \frac{c}{m}\left(2\sin\frac{k\Delta}{2}\right)^2$$

Wurzelziehen liefert die

[1] Die Auslenkung der Feder ist

$$x_{j+1} - x_j - \Delta = (j+1)\Delta + \phi_{j+1} - j\Delta - \phi_j - \Delta = \phi_{j+1} - \phi_j$$

[2] Hinweis: Betrachte das konkrete Beispiel:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\phi_2}\left[\ldots - \frac{1}{2}c(\phi_2-\phi_1)^2 - \frac{1}{2}c(\phi_3-\phi_2)^2 - \frac{1}{2}c(\phi_4-\phi_3)^2 - \ldots\right] &= -c(\phi_2-\phi_1) + c(\phi_3-\phi_2)\\ &= c(\phi_3 - 2\phi_2 + \phi_1)\end{aligned}$$

[3] Im Eindimensionalen ist der Wellenvektor nur eine Zahl. In höheren Dimensionen wird aus k ein Vektor $\vec{k}$.

DISPERSIONSRELATION DER DISKRETEN LINEAREN KETTE

$$\omega(k) = \pm\sqrt{\frac{c}{m}}2\sin\left(\frac{k\Delta}{2}\right)$$

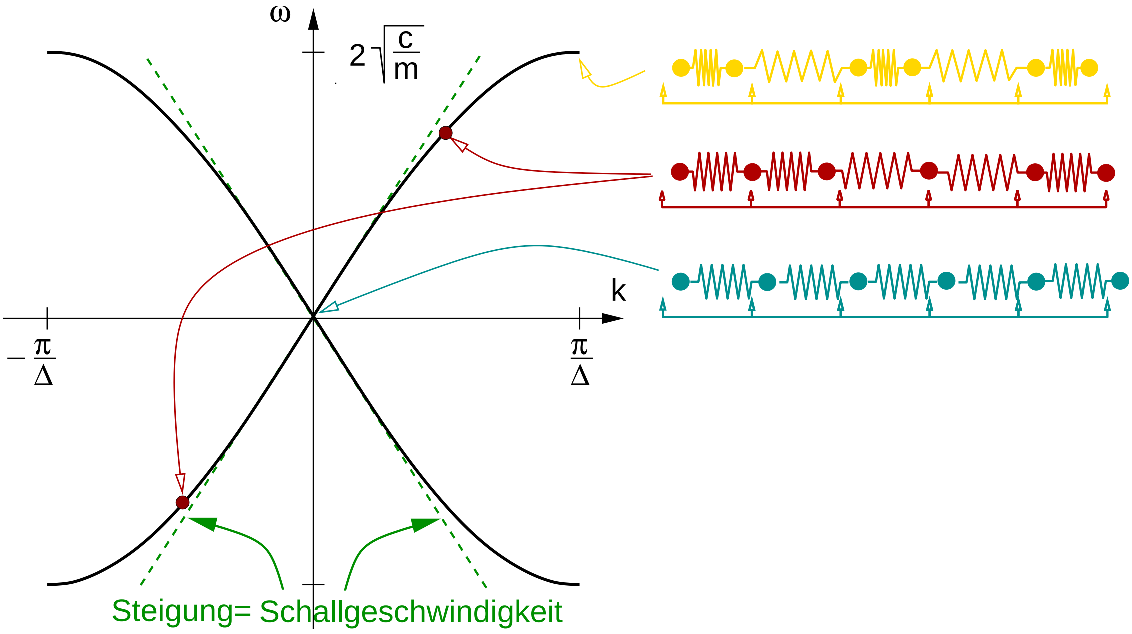


Abb. 10.2: Dispersionsrelation der diskreten linearen Kette. Die Dispersionsrelation die zugehörigen Wellen wiederholt sich mit Periode $2\pi/Delta$ im reziprokem Raum.

Die Partiallösungen, welche wir zur Konstruktion der Auslenkungen gewählt haben sind komplex. Um wir reelle Lösungen erzeugen müssen wir zwei dieser Partialwellen überlagern. Und zwar muss eine Welle mit (k,ω) mit einer weiteren mit $(-k,-\omega)$ entweder mit positiven oder negativen Vorzeichen überlagert werden.

$$\phi_\mu(t) = \frac{e^{i(k\Delta\mu-\omega t)} + e^{-i(k\Delta\mu-\omega t)}}{2} = \cos(k\Delta\mu - \omega t)$$
$$\phi_\mu(t) = \frac{e^{i(k\Delta\mu-\omega t)} - e^{-i(k\Delta\mu-\omega t)}}{2i} = \sin(k\Delta\mu - \omega t)$$

Dispersionsrelationen haben wir bereits in der Relativitätstheorie als Energie-Impulszusammenhang kennengelernt. Hier ist es der Zusammenhang zwischen Kreisfrequenz und Wellenvektor. Der Zusammenhang wird später deutlich, wenn wir lernen werden, dass in der Quantenmechanik Energie und Frequenz über $E = \hbar\omega$ zusammenhängen und Impuls und Wellenvektor über $p = \hbar k$. Dabei wird $h = 2\pi\hbar$ das Plancksche Wirkungsqantum genannt. Es ist eine Fundamentalkonstante.

10.2 Kontinuierliche lineare Kette

Nun betrachten wir eine Kette, bei der der Abstand immer kleiner wird, sodass wir am Ende eher eine Saite beschreiben. Den Grenzübergang kann man auf unterschiedliche Weisen vornehmen, da wir die Parameter Abstand, Masse, und Federkonstante unabhängig variieren können. Ändern wir zum

Beispiel nur den Abstand und halten die anderen Parameter fest, resultiert ein unphysikalisches System. In der Praxis sollte man sich daher an den tatsächlichen Gegebenheiten orientieren. Hier wählen wir einen typisch theoretischen Zugang: Wir untersuchen unterschiedliche Arten des Grenzübergangs, und erlauben nur solche, die keine Divergenzen erzeugen oder auf triviale Systeme führen.

Wir beginnen mit der Wirkung der diskreten linearen Kette und bilden den Grenzübergang $\Delta \to 0$ mit den Nebenbedingungen[4] $m(\Delta) = \rho\Delta$ und $c(\Delta) = \gamma\Delta^{-1}$.

$$S\Big[\{\phi_\mu(t)\}\Big] = \int_{\{\phi^i_\mu\},t^i}^{\{\phi^f_\mu\},t^f} dt \; \underbrace{\sum_\mu \left[\frac{m}{2}\dot{\phi}_\mu^2 - \frac{1}{2}c\Delta^2\left(\frac{\phi_{\mu+1}-\phi_\mu}{\Delta}\right)^2\right]}_{\mathcal{L} \text{ aus Gl. } 10.1}$$

$$= \int dt \underbrace{\sum_\mu \Delta}_{\to\int dx} \left[\underbrace{\frac{m}{2\Delta}}_{\frac{\varrho}{2}} \dot{\phi}_\mu^2 - \underbrace{\frac{c\Delta}{2}}_{\frac{\gamma}{2}} \underbrace{\left(\frac{\phi_{\mu+1}-\phi_\mu}{\Delta}\right)^2}_{\to\frac{d\phi}{dx}}\right]$$

Indem wir nun den Abstand Δ der Gleichgewichtspositionen verschwinden lassen, wobei $\phi_\mu \to \phi(\mu\Delta)$, erhalten wir die **Wirkung für die kontinuierliche lineare Kette.**

$$S\Big[\phi(x,t)\Big] = \underbrace{\int dt \int_\Omega dx \; \underbrace{\left[\frac{1}{2}\varrho\dot{\phi}^2(x,t) - \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{d\phi}{dx}\Big|_{x,t}\right)^2\right]}_{\text{Lagrange-Dichte} \quad \ell}}_{\text{Lagrange-Funktion} \quad \mathcal{L}}$$

Die Wirkung hängt jetzt nicht mehr von einem Vektor $\{\phi_\mu\}$, sondern von einer Funktion $\phi(x)$, einem Feld, ab.

Beachte, dass nun die Raum– und Zeitkoordinaten gleichberechtigt vorkommen. Das scheint im Hinblick auf die Relativitätstheorie sinnvoll zu sein, da Raum und Zeitkoordinaten in der Relativitätstheorie ineinander überführt werden können, also als zwei Aspekte einer Größe aufzufassen sind.

10.3 Wirkungsprinzip für kontinuierliche Systeme

Wir betrachten nun ein ganz allgemeine Wirkung für Felder, und leiten daraus die Euler-Lagrange-Gleichungen ab.

Wichtig sind dabei die Randbedingungen bei der Variation. So wie bei der diskreten Kette die Anfangs und Endkoordinaten festgehalten werden, so werden nun die Felder zu Anfang und zu Ende festgehalten. Genauer ausgedrückt, sollten die Felder am Rand des Raum-Zeit Gebiets, in dem die Integration ausgeführt wird, festgehalten werden. Üblicherweise verlangt man, dass die Felder im Unendlichen verschwinden, wenn die Integration über den ganzen Raum ausgeführt wird. Deshalb tragen nur Anfangs- und Endwert bei.

Mit den Randbedingungen in $\vec{r}$ und t sowie ℓ als **Lagrange-Dichte** sei die Wirkung:

$$S\Big[\phi(\vec{r},t)\Big] = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_\Omega d^3r \; \ell(\phi, \dot{\phi}, \vec{\nabla}\phi, \dot{\vec{r}}, t)$$

Die Wirkung ist also ein Integral über das vierdimensionale Raum-Zeit-Volumen, dem Produkt aus dem Zeitintervall $[t_i, t_f]$ und dem Raumgebiet Ω.

[4] Nur mit diesen Nebenbedingungen führt der Grenzübergang zu einem definierten und dennoch nichttrivialen Resultat

Nun leiten wir die Bewegungsgleichungen aus dem Wirkungsprinzip her.

$$
\begin{aligned}
S\Big[\phi(\vec{r},t)+\delta\phi(\vec{r},t)\Big] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega d^3r\; \ell(\phi,\dot{\phi},\vec{\nabla}\phi,\dot{r},t) \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega d^3r\; \left[\frac{\partial \ell}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \ell}{\partial \dot{\phi}}\delta\dot{\phi} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \ell}{\partial \nabla_i\phi}\vec{\nabla}\delta\phi\right] + O(\delta\phi)^2
\end{aligned}
$$

Wir vereinfachen die Variation δS der Wirkung weiter, indem wir die Ableitungen welche auf die Variation $\delta\phi$ wirken mittels partieller Integration auf die anderen abwälzen. Auf diese Weise erhalten wir die Funktionalableitung als Vorfaktor von $\delta\phi$ im Integranden der Variation der Wirkung.

$$
\begin{aligned}
\delta S &\stackrel{\text{def}}{=} S\Big[\phi(\vec{r},t)+\delta\phi(\vec{r},t)\Big] - S\Big[\phi(\vec{r},t)\Big] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega d^3r\; \Bigg[\frac{\partial \ell}{\partial \phi}\delta\phi - \delta\phi\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \ell}{\partial \dot{\phi}}\right) - \delta\phi\sum_{i=1}^{3}\nabla_i\frac{\partial \ell}{\partial \nabla_i\phi} \\
&\quad + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{\phi}}\delta\phi\right) + \sum_i \nabla_i\left(\frac{\partial \ell}{\partial \nabla_i\phi}\delta\phi\right)\Bigg] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega d^3r\; \delta\phi\left[\frac{\partial \ell}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \ell}{\partial \dot{\phi}} - \sum_{i=1}^{3}\nabla_i\frac{\partial \ell}{\partial(\nabla_i\phi)}\right] \\
&\quad \underbrace{+ \int_\Omega d^3r\; \frac{\partial \ell}{\partial \dot{\phi}}\delta\phi\Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \overbrace{\sum_i \oint_{\partial\Omega} dA_i\left[\frac{\partial \ell}{\partial \nabla_i\phi}\delta\phi\right]}^{\text{Gauß: } \int_\Omega d^3r\vec{\nabla}\vec{x}=\int d\vec{A}\vec{x}}}_{=0}
\end{aligned}
$$

da wegen den Randbedingungen $\delta\phi(\vec{r},t)=0$ für $\vec{r}\in\delta\Omega$ und für $t=t_1$ sowie $t=t_2$ gilt.

Da nun die Variation der Wirkung Null ergeben muss, folgt die

EULER-LAGRANGE-GLEICHUNG FÜR FELDER

$$
\frac{\partial \ell}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \ell}{\partial \dot{\phi}} - \sum_{i=1}^{3}\nabla_i\frac{\partial \ell}{\partial \nabla_i\phi} = 0
$$

Editor: vergleiche diesen Ausdruck mit dem für Teilchen.

10.4 Bewegungsgleichung der kontinuierlichen linearen Kette

Als Beispiel wenden wir nun das Wirkungsprinzip auf die kontinuierliche lineare Kette an.

$$
S\Big[\phi(\vec{x},t)\Big] = \int dt \int dx \left[\frac{1}{2}\varrho\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2\right]
$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung beschreibt die Dynamik der Kette.

$$
0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \ell}{\partial \dot{\phi}} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \ell}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x}} \qquad \Rightarrow \qquad 0 = \varrho\ddot{\phi} - \gamma\frac{d^2\phi}{dx^2}
$$

Dies ist die Bewegungsgleichung für die kontinuierliche lineare Kette.

Um die Dispersionsrelation zu bestimmen wählen wir wieder den Ansatz

$$\phi(x,t) = \mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}$$

einer Partiallösung.

$$0 = -\varrho\omega^2 + \gamma k^2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega(k) = \pm\sqrt{\frac{\gamma}{\varrho}}k \tag{10.3}$$

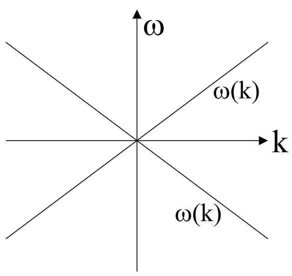


Abb. 10.3: Dispersionsrelation $\omega(k)$ der kontinuierlichen linearen Kette.

Die kontinuierliche lineare Kette hat eine lineare Dispersionrelation. Eine lineare Dispersionsrelation ist typisch für Licht und Schall, also Photonen und Phononen. Was wir mit Wellenphänomene auffassen hat häufig eine lineare Dispersionsrelation.

Eine lineare Dispersionrelation ist wichtig für die Signalübertragung, da die Signale andernfalls ihre Form verändern würden.

10.5 Gruppen- und Phasengeschwindigkeit

Gruppen- und Phasengeschwindigkeit sind Eigenschaften von Wellenpaketen. Ein **Wellenpaket**

$$\phi(x,t) = \chi(x,t)e^{i(k_0x-\omega(k_0)t)} \tag{10.4}$$

ist eine ebene Welle $e^{i(kx-\omega(k)t)}$, welche von einer langsam veränderliche Umhüllungsfunktion $\chi(x,t)$ moduliert wird.

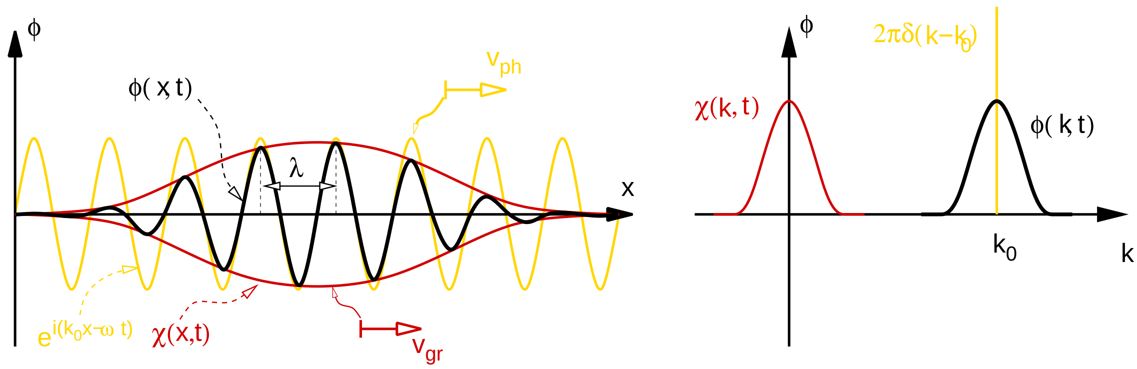


Abb. 10.4: Wellenpaket im Real und im Fourierraum. Das Wellenpaket $\phi(x,t)$ (schwarz) besteht aus einer ebenen Welle (gelb), welche von einer Umhüllungsfunktion $\chi(x,t)$ (rot) moduliert wird. Der Abstand der Wellenberge ist die Wellenlänge λ. Die ebene Welle, bzw. die Wellenberge, bewegt sich mit der Phasengeschwindigkeit v_{ph}. Die Geschwindigkeit der Umhüllungsfunktion ist die sogenannte Gruppengeschwindigkeit. Rechts sind die Wellenpaket, ebene Welle und Umhüllungsfunktion im Fourierraum dargestellt.

Im Folgenden werden wir eine besondere Eigenschaft der Fouriertransformation benötigen, nämlich, dass die Umhüllende im reziproken Raum bei $k = 0$ lokalisiert ist. Dies soll zunächst gezeigt werden:

Die Fouriertransformierte $\chi(k,t)$ ist durch

$$\chi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int \chi(k,t)e^{ikx}dk$$

mit der Funktion $\chi(x,t)$ verknüpft. Man nennt die Fouriertransformierte einer Funktion auch "die Funktion im reziproken Raum". Der reziproke Raum wird durch die Wellenvektoren k aufgespannt. Beachte, dass $\chi(x,t)$ und $\chi(k,t)$ unterschiedliche Funktionen sind. Sie werden durch dasselbe Symbol χ dargestellt, weil sie dasselbe physikalische Objekt beschreiben. Sie sind nur durch zu unterscheiden, wenn auch die Argumente eindeutig definiert sind.

Wir strecken die Umhüllende im Realraum, indem wir einen Parameter $\lambda < 1$ einführen, um dann zu zeigen, dass die entsprechende Fouriertransformierte bei $k = 0$ zusammengestaucht wird.

$$\chi_\lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} \chi_1(\lambda x) = \int \frac{dk}{2\pi}\chi_1(k)e^{ik\lambda x} \stackrel{k'=\lambda k}{=} \int \frac{dk'}{2\pi}\underbrace{\frac{1}{\lambda}\chi_1\left(\frac{k'}{\lambda}\right)}_{\chi_\lambda(k)} e^{ik'x} = \int \frac{dk'}{2\pi}\chi_\lambda(k)e^{ik'x}$$

Es gilt also für die λ-abhängige Umhüllungsfunktion

$$\chi_\lambda(x) = \chi_1(\lambda x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \chi_\lambda(k) = \frac{1}{\lambda}\chi_1(\frac{1}{\lambda}k)$$

Machen wir also λ kleiner, d.h. $\lambda \to 0$,

- wird die Umhüllende im Realraum $\chi_\lambda(x,t)$ immer breiter und glatter,
- während sie im Fourierraum, d.h. $\chi_\lambda(k,t)$, immer mehr am Ursprung lokalisiert wird.

Dies ist in Abb. 10.5 dargestellt.

Kennt man die Fouriertransformierte der Umhüllungsfunktion, kann man über den Verschiebungssatz, Gl. D.97 auf S. 297,

$$g(x) = f(x)e^{ikx} \qquad \Leftrightarrow \qquad G(k) = F(k-k_0)$$

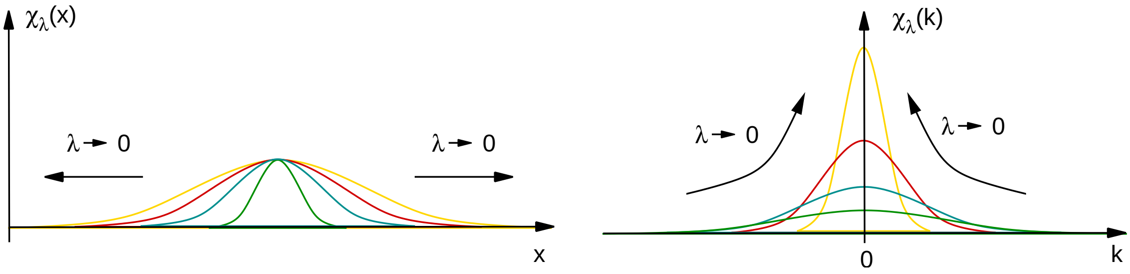


Abb. 10.5: Wird eine Funktion im Realraum glatter, dann lokalisiert sich ihre Fouriertransformierte bei $k = 0$.

die Fouriertransformierte des Wellenpakets bestimmen.

$$\begin{aligned}
\phi(x,0) &\overset{\text{Gl. 10.4}}{=} \chi(x,0)\mathrm{e}^{ik_0x} \\
\Rightarrow \int \frac{dk}{2\pi}\phi(k,0)\mathrm{e}^{ikx} &= \left[\int \frac{dk'}{2\pi}\chi(k')\mathrm{e}^{ikx}\right]\mathrm{e}^{ik_0x} = \int \frac{dk'}{2\pi}\chi(k',0)\mathrm{e}^{i(k'+k_0)x} \\
&\overset{k=k'+k_0}{=} \int \frac{dk}{2\pi}\chi(k-k_0,0)\mathrm{e}^{ikx} \\
\Rightarrow \phi(k,0) &= \chi(k-k_0,0)
\end{aligned}$$

Der letzte Schluss enthält einen subtilen Punkt, der leicht übersehen werden kann. Wir haben implizit die lineare Unabhängigkeit von Ebenen Wellen ausgenützt. Diese bedeutet, dass man ebene Wellen nur dann zu einer Null-Funktion[5] kombinieren kann, wenn deren Vorfaktoren alle verschwinden. Die lineare Unabhängigkeit von Ebenen Wellen führt dazu, dass die Fouriertransformation eineindeutig[6] ist.

Ist also die Umhüllende glatt, hat sie im Fourierraum nur in der Umgebung von k=0 einen wesentlichen Beitrag und daher trägt das Wellenpaket im Fourierraum $u(k,0)$ nur in der Umgebung $k = k_0$ bei.

Nun bestimmen wir die Dynamik des Wellenpakets. Stellen wir das Wellenpaket als Überlagerung von ebenen Wellen dar, können wir jede Ebene Welle mit Hilfe einer bekannten Dispersionrelation $\omega(k)$ in die Zukunft projezieren und erhalten so die zeitliche Entwicklung des Wellenpakets entsprechend dem Ansatz Gl. **??** einer allgemeinen Lösung einer Differentialgleichung. Mit der Annahme einer glatten Umhüllungsfunktion lässt sich der Ausdruck für $\phi(x,t)$ auf eine einfache Form bringen.

$$\begin{aligned}
\phi(x,t) &= \int \frac{dk}{2\pi}\phi(k,0)\mathrm{e}^{i(kx-\omega(k)t)} \\
&\overset{k'=k-k_0}{=} \int \frac{dk'}{2\pi}\underbrace{\phi(k_0+k',0)}_{\chi(k',0)}\exp\left\{i\Big[(k_0+k')x-\omega(k_0+k')t\Big]\right\} \\
&\overset{\text{Taylor}}{=} \int \frac{dk'}{2\pi}\chi(k',0)\exp\left\{i\left[(k_0+k')x-\left(\omega(k_0)+\frac{d\omega}{dk}\Big|_{k_0}k'+O(k'^2)\right)t\right]\right\} \\
&= \underbrace{\exp\Big\{i\Big[k_0x-\omega(k_0)t\Big]\Big)\Big\}}_{A}\underbrace{\int \frac{dk'}{2\pi}\chi(k',0)\exp\left\{ik'\left(x-\frac{d\omega}{dk}\Big|_{k_0}t\right)\right\}\mathrm{e}^{O(k'^2)t}}_{B}
\end{aligned}$$

Wir vernachlässigen die Terme $O(k^{'2})$. Dies ist erlaubt, wenn das Wellenpaket im Realraum hinreichend ausgedehnt ist, und daher im reziproken Raum sehr lokalisiert ist. Wenn das der Fall ist haben nur kleine Werte von k ein Gewicht im Integral. Die Terme $O(k^2)$ tragen führen dazu, dass

[5] Unter Null-Funktion verstehen wir eine Funktion die überall den Wert null liefert

[6] Eine Abbildung ist eineindeutig, wenn sowohl die Vorwärts als auch die Rückwärtstransformation eindeutig ist

das Wellenpaket sein Form verliert und auseinanderläuft. Wenn die Dispersionsrelation linear ist, d.h. von der Form $\omega(k) = ck$ ist, dann behält das Wellenpaket immer seine Form. Dies ist zum Beispiel bei Licht sehr gut erfüllt und c ist dann die Lichtgeschwindigkeit. Eine lineare Dispersionsrelation ist Voraussetzung dafür, dass Nachrichten über wie zum Beispiel in optischen Wellenleitern über große Distanzen übertragen werden kann.

- Der Term A ist gerade die ebene Welle. Sie kann in der Form

$$A = \exp\Big\{ik_0\Big(x - \overbrace{\frac{\omega(k_0)}{k_0}}^{v_{ph}} \cdot t\Big)\Big\}$$

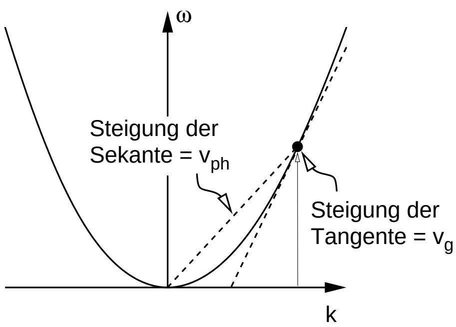
  geschrieben werden, um zu zeigen, dass sie von der Form $f(x - v_{ph}t)$ ist, also einer Funktion die sich mit mit der **Phasengeschwindigkeit** $v_{ph} = \frac{\omega(k)}{k}$ bewegt. Die Phasengeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit eines einzelnen Wellenbergs aus dem Wellenpaket.

- Der Term B ist die Umhüllende

$$B = \chi(x,t) = \chi\Big(x - \underbrace{\frac{\partial\omega}{\partial k}}_{v_g}, 0\Big)$$

  Auch sie kann in der Form $f(x - v_g t)$ geschrieben werden, also einer Funktion die sich mit der **Gruppengeschwindigkeit** $v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$ verschiebt. Die Gruppengeschwindigkeit kann sich durchaus von der Phasengeschwindigkeit unterscheiden und sogar die entgegengesetzte Richtung haben. Die Gruppengeschwindigkeit ist daher die Geschwindigkeit der Wellenpakets.

GRUPPEN- UND PHASENGESCHWINDIGKEIT



$$\text{Gruppengeschwindigkeit} \quad v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} \tag{10.5}$$

Die Gruppengeschwindigkeit ist die Geschwindikeit des Wellenpakets als Ganzes. Man kann sie als Steigung der Dispersionsrelation ablesen.

$$\text{Phasengeschwindigkeit} \quad v_{ph} = \frac{\omega}{k} \tag{10.6}$$

Die Phasengeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit eines Wellenbergs. Man kann sie aus der Dispersionsrelation als Steigung der Sekante durch den Ursprung ablesen.

10.6 Bewegung von Wellenpaketen in räumlich veränderlichen Dispersionsrelationen

Genau genommen macht eine Dispersionsrelation nur einen Sinn wenn Translationsinvarianz in Raum und Zeit vorliegt. Dennoch wollen wir hier untersuchen, wie sich Wellenpakete verhalten, wenn das System nicht mehr translationsinvariant im Raum ist, sondern sich sehr langsam im Raum verändert. Dies wird uns bereits hier zur Quantenmechanik führen, bei der Teilchen als kleine Wellenpakete aufgefasst werden. Was im Folgenden gezeigt wird, ist in logisch umgekehrter Form und exakt formuliert das sogenannte Ehrenfest Theorem, einer der Grundpfeiler der Quantemechanik.

Betrachtung einer langsamen räumlichen Variation der Dispersionsrelation $\omega(k, x)$.

- Sei $k(t)$ der mittlere Wellenvektor des Wellenpakets
- Sei $x(t)$ die mittlere Position des Wellenpakets

Aufgrund der Zeittranslationsinvarianz in der Zeit bleibt ω konstant: $\frac{d\omega}{dt} = 0$:

$$0 = \frac{d\omega(k_0(t), x(t))}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial k_0}\frac{dk_0}{dt} + \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{dx}{dt}$$

Mit $\dot{x} = v_g = \frac{d\omega}{dk}$ folgt:

$$\frac{dk_0}{dt} = -\frac{\partial\omega}{\partial x}$$

Fassen wir disen Ausdruck mit dem der Gruppengeschwindigkeit zusammen, erhalten wir die für die Bewegung eines Wellenpakets

Bewegung Wellenpaket	kanonische Gleichungen
$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial k}$	$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}$
$\frac{dk}{dt} = -\frac{\partial\omega}{dx}$	$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}$

Auf der rechten Seite sind nochmals die kanonischen Gleichungen gezeigt, um deutlich zu machen, dass die Bewegung eines Wellenpakets ganz analog zu der von Punktteilchen ist. Dies stellt die Klassische Mechanik auf den Kopf: Wenn die Wellenpakete so klein sind, dass Ihre Ausdehnung nicht beobachtbar ist, können wir sie nicht mehr von Punktteilchen unterscheiden, da sie sich analog bewegen. Tatsächlich wurde experimentell gezeigt, dass Teilchen Interferenzmuster erzeugen können, eine Eigenschaft, die nur Wellen zu eigen ist. Damit wurde deutlich, dass wir in Wirklichkeit mit Wellenpaketen hantiert haben und damit die Natur der Teilchen vollkommen falsch angenommen haben. Diese Erkenntniss ist die grundlage der Quantenmechanik.

Um die Analogie vollständig zu machen, müssen wir nur die Frequenz mit der Energie und den Wellenvektor mit dem Impuls in Beziehung setzen. Dieser Zusammenhang wird durch das **Korrespondenzprinzip**

$$E \hat{=} \hbar\omega$$
$$p \hat{=} \hbar k$$

Mit Hilfe des Korrespondentzprinzips erhalten wir mit der Hamiltonfunktion die Schrödinger Gleichung.

$$E = \mathcal{H}(p, x) \qquad \Rightarrow \qquad \hbar\omega = \mathcal{H}(\hbar k, x)$$
$$\Rightarrow \qquad i\hbar\partial_t u(x, t) = \mathcal{H}(\frac{\hbar}{i}\partial_x, x)u(x, t)$$

hergestellt, wobei $h = \hbar/(2\pi)$ das Plancksches Wirkungsquantum ist. Der Wert des Planckschen Wirkungsquantums kann im Prinzip aus dem Interferenzmuster abgelesen werden.

Beim Übergang von der Klassischen Mechanik zur Quantenmechanik werden dann aus Punktteilchen Wellenpakete.

10.7 Hängende lineare Kette

Wellen haben natürlicherweise eine Maximalgeschwindikeit. Die Existenz einer endlichen Maximalgeschwindigkeit für Teilchen war die Voraussetzung für die Relativitätstheorie. Damit sind wir jetzt an dem Punkt angelangt, wo sich die drei großen Theorien der Physik, Klassische Mechanik, Quantenmechanik und

Relativitätstheorie berühren und gegenseitig bedingen. Um einen kleinen Einblick in dieses Gebiet zu geben betrachten wir die hängende lineare Kette, die als klassisches Analogon eines relativistischen, quantenmechanischen Teilchens angesehen werden kann. Dieses einfache Modell ist von besonderer Bedeutung, weil es erlaubt ein grundlegendes Verständniss ohne unnotwendigen mathematischen Balast zu entwickeln.

Die **hängende lineare Kette** besteht aus Pendeln, die durch Federn miteinander verbunden sind.

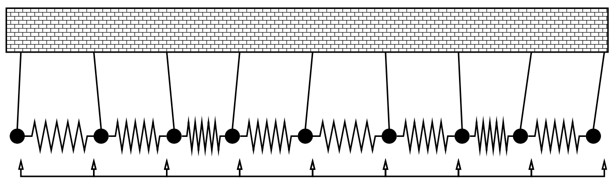


Abb. 10.6: Hängende lineare Kette. Der Parameter η wird durch die Pendellänge festgelegt und der Parameter γ durch die Federstärke.

Die **Wirkung der hängenden linearen Kette** ist, wenn wir für die harmonische Näherung für das Pendel verwenden,

$$S\Big[\phi(x,t)\Big] = \int dt \int dx \left[\frac{1}{2}\varrho\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\eta\phi^2\right]$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung liefert die Bewegungsgleichung für das Auslenkungsfeld $\phi(x,t)$:

$$-\varrho\ddot{\phi} + \gamma\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \eta\phi = 0$$

Dies ist die allgemeinste Form für eine Wirkung für ein eindimensionales, reelles Feld, das translationsinvariant in Raum und Zeit und quadratisch in den Feldern ϕ ist.

Mit dem Ansatz einer ebenen Welle

$$\phi(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$$

erhalten wir die **Dispersionsrelation der hängenden linearen Kette**

$$\Rightarrow \quad \left(\varrho\omega^2 - \gamma k^2 - \eta\right)\phi = 0$$

$$\omega(k) = \pm\sqrt{\frac{\eta}{\varrho} + \frac{\gamma}{\varrho}k^2}$$

$$\underbrace{(\hbar\omega)^2}_{E^2} = \underbrace{\hbar^2\frac{\eta}{\varrho}}_{m_0^2c^4} + \underbrace{\frac{\gamma}{\varrho}}_{c^2}\underbrace{(\hbar k)^2}_{p^2}$$

Zum Vergleich die **relativistische Energie-Impuls Beziehung**, also die Dispersionsrelation eines relativistischen Teilchens.

$$E = \pm\sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2}$$

Ein Wellenpaket dieses Feldes verhält sich also gerade wie ein relativistisches Teilchen mit der Masse $m_0 = \hbar\sqrt{\frac{\varrho\eta}{\gamma^2}}$ und bei der Lichtgeschwindigkeit $c = \sqrt{\frac{\gamma}{\varrho}}$.

Die hängende lineare Kette hat also dieselbe Dispersionsrelation wie ein relativistisches Teilchen (siehe Abb. 9.12 auf S. 198). Die Relativitätstheorie folgt aus der einfachen Wellentheorie, wenn man Wellenpakete mit relativistischen Teilchen identifiziert.

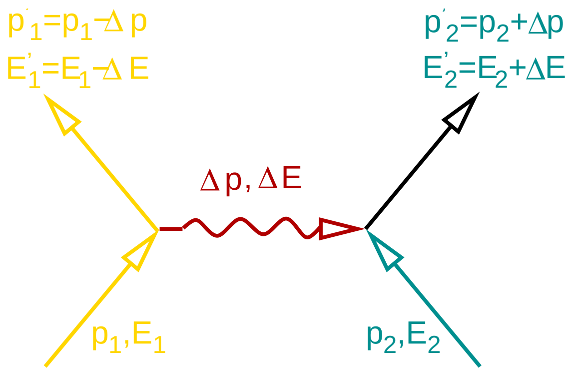
Ersetzen der entsprechenden Parameter in der Euler-Lagrange-Gleichung für die hängende lineare Kette führt auf die **Klein-Gordon Gleichung**

$$\hbar^2 \partial_t^2 \phi(x,t) = \left(\hbar^2 c^2 \partial_x^2 - m_0^2 c^4\right) \phi(x,t)$$

Die Klein-Gordon Gleichung ist die relativistische Verallgemeinerung der Schrödinger Gleichung und beschreibt relativistische Teilchen ohne Spin.

10.7.1 Exkurs: Die Klein-Gordon-Gleichung und das Yukawa-Potential

Wir können die Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen als Austausch eines weiteren Teilchens auffassen, welches Energie und Impuls von einem zum anderen überträgt.



Wirkt eine Kraft zwischen zwei Teilchen, so ändern sich Impuls und Energie der beiden Teilchen. Der Gesamtimpuls und die Gesamtenergie bleiben aber erhalten. Wir können uns also vorstellen dass ein weiteres Teilchen den Impuls und die Energie von einem zum anderen Partner übertragen hat.

Die Masse der Teilchen, die für eine Wechselwirkung verantwortlich sind, spiegelt sich in der Reichweite der Wechselwirkung wieder.

Wir werden später die Coulomb Wechselwirkung auch durch Austausch von Photonen (Lichtteilchen) darstellen. Die schwache Kraft, die für den β-Zerfall von Atomkernen verantwortlich ist, wird durch W und Z Bosonen vermittelt. Deren Masse ist vergleichsweise gross, weshalb die Schwache Kraft nur eine kurze Wechselwirkung besitzt. Den Zusammenhang zwischen Masse der ausgetauschten Teilchen und Reichweite der Wechselwirkung wollen wir hier beschreiben.

Wir beginnen mit der dreidimensionalen Klein-Gordon-Gleichung

$$\hbar^2 \partial_t^2 \phi(\vec{r},t) = \left(\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 - m_0^2 c^4\right) \phi(\vec{r},t)$$

Wir suchen die stationäre, kugelsymmetrische Lösung für die räumliche Green's funktion.

$$\left(\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 - m_0^2 c^4\right) G(\vec{r},t) = -\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $\vec{r}_0$ auf den Ursprung des Koordinatensystems, also $\vec{r}_0 = 0$. Die Lösung ist

$$G(\vec{r},\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|} \mathrm{e}^{-\frac{m_0 c}{\hbar}|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

`Editor: Der Vorfaktor ist nur geraten!`

Dies ist die Form des sogenannten **Yukawa Potentials**, welches ein Modell für die starke Wechselwirkung aufgestellt wurde, die zwischen den Protonen und Neutronen im Atomkern wirkt.

Für kurze Abstände verhält sich das Yukawa Potential wie die Coulomb Wechselwirkung. Für große Abstände jedoch fällt das Yukawa Potential exponentiell ab. Die Reichweite der Wechselwirkung ist also endlich.

Das Verhalten des Yukawa Potentials lässt sich dadurch verstehen, dass bei jedem Impulsübertrag ein Minimum an Energie, die Ruheenergie des Klein-Gordon Teilchens, übertragen werden muss. Im Fernbereich sollte aber der Energie- und Impulsübertrag klein sein. Deshalb wird die Wechselwirkung im Fernbereich gegenüber der Coulombwechselwirkung abgedämpft.

Chapter 11

Kanonische Transformationen (2h) (Zusatzkapitel)

11.1 Variationsprinzip im Phasenraum

Wir werden im Folgenden zeigen, dass die extremale Wirkung auch durch ein Funktional im Phasenraum ausgedrückt werden kann. Das Funktional hat die Form

$$S(q_1, t_1, q_2, t_2) = \min_{\substack{q(t_1)=q_1 \\ q(t_2)=q_2}} \int_{t_1}^{t_2} dt \Big[p\dot{q} - \mathcal{H}(p, q, t)\Big] \tag{11.1}$$

Dabei wird das Integral bezüglich der Koordinaten und der Impulse variiert. Wir haben im Wirkungsfunktional die Lagrangefunktion mittels $\mathcal{H}(p, q) = p\dot{q} - \mathcal{L}$ durch die Hamilton-Funktion dargestellt.

Anstelle des bekannten Wirkungsfunktionals

$$\mathcal{S}[q(t)] = \int_{t_1,q_1}^{t_2,q_2} dt\ \mathcal{L}(\partial_t q, q, r)\ , \tag{11.2}$$

das ein Funktional von Pfade in den Koordinaten q ist, führen wir dazu nun ein neues Wirkungsfunktional

$$\mathcal{S}[q(t), p(t)] = \int_{t_1,q_1}^{t_2,q_2} dt \Big[p\dot{q} - \mathcal{H}(p, q, t)\Big] \tag{11.3}$$

ein, das für Pfade im Phasenraum definiert ist. Da beide Definitionen, wie im Folgenden gezeigt, dieselbe physikalische Größe bezeichnen, behalten wir dasselbe Symbol bei. Der Unterschied wird aus dem Zusammenhang, z.B. aus der Argumentliste, ersichtlich.

Zusammenhang der Wirkungen im Koordinatenraum und im Phasenraum: Bestimmt man jeweils den Impulspfad $p(t)$, der die Wirkung Gl. 11.1 für einen gegebenen Pfad $q(t)$ stationär macht, dann sind die beiden Wirkungen Gl. 11.1 und Gl. 11.2 identisch.

$$\underset{[p(t)]}{\text{stat}}\, \mathcal{S}[q(t), p(t)] \stackrel{?}{=} \mathcal{S}[q(t)] \tag{11.4}$$

Dies wird im Folgenden gezeigt. Dazu ersetzen wir zunächst die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(p,q) = \text{stat}_v[pv - \mathcal{L}(q,v,t)]$ in der Wirkung Gl. 11.3

$$\begin{aligned}
\underset{[p(t)]}{\text{stat}}\, \mathcal{S}[q(t),p(t)] &= \int_{t_1,q_1}^{t_2,q_2} dt\ \underset{p}{\text{stat}}\Big[p\dot{q} - \mathcal{H}(p,q,t)\Big] \\
&= \int_{t_1,q_1}^{t_2,q_2} dt\ \underset{p,v}{\text{stat}}\Big[p\dot{q} - pv + \mathcal{L}(q,v,t)\Big] \\
&= \int_{t_1,q_1}^{t_2,q_2} dt\ \underset{v}{\text{stat}}\Big[\mathcal{L}(q,\dot{q},t)\Big] \\
&= \int_{t_1,q_1}^{t_2,q_2} dt\ \mathcal{L}(q,\dot{q},t) = \mathcal{S}[q(t)]
\end{aligned} \tag{11.5}$$

Die explizite Impulsabhängigkeit der Wirkung wurde mit Hilfe des Extremalprinzips bezüglich der Impulse eliminiert: Der Extremalpfad $p(t)$ für gegebenes $q(t)$ erfüllt nämlich $\dot{q} = v$.

Kanonische Gleichungen als Folge des Variationsprinzips im Phasenraum: Jetzt überzeugen wir uns davon, dass die kanonischen Gleichungen auch aus dem erweiterten Variationsprinzip abgeleitet werden können.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}[q(t),p(t)] &= \int_{t_1,q_1}^{t_2,q_2} dt\Big[p\dot{q} - \mathcal{H}(p,q,t)\Big] \\
\delta\mathcal{S} &= \int_{t_1,q_1}^{t_2,q_2} dt\ \left[\delta p\dot{q} + p\delta\dot{q} - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}\delta p - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}\delta q\right] \\
&= \int_{t_1,q_1}^{t_2,q_2} dt\ \left[\left(\dot{q} - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}\right)\delta p - \left(\dot{p} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}\right)\delta q + \frac{d}{dt}(p\delta q)\right]
\end{aligned} \tag{11.6}$$

Der letzte Term trägt, nach der Integration, nur an den Endpunkten des Pfades bei und verschwindet wegen der Randbedingung $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Aus der Forderung $\delta S = 0$ folgen die **kanonischen Gleichungen**.

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} \\
\dot{p} &= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}
\end{aligned} \tag{11.7}$$

Damit haben wir gezeigt, dass es ein Variationsprinzip für Pfade im Phasenraum gibt, aus dem die kanonischen Gleichungen abgeleitet werden können.

11.2 Variationsprinzip mit Impulsen als Randwerte

Die kanonischen Gleichungen liefern eine gewisse Symmetrie zwischen Koordinaten und Impulsen. (Wir erhalten durch die Transformation $p' = q$, $q' = p$, $\mathcal{H}'(p',q') = -\mathcal{H}(q,p)$ dieselben Pfade.)

Deshalb ist es von Interesse, zu sehen, ob wir ein Variationsprinzip definieren können, bei dem die Impulse anstelle der Koordinaten an den Endpunkten festgehalten werden.

Dazu schreiben wir die Variation Gl. 11.6 der Wirkung im Phasenraum um:

$$\begin{aligned}
\delta S &\overset{\text{Gl. 11.6}}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt\ \left[\left(\dot{q} - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}\right)\delta p - \left(\dot{p} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}\right)\delta q + \frac{d}{dt}(\delta(pq) - q\delta p)\right] \\
\Rightarrow \delta\Big(S - \int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d}{dt}(pq)\Big) &= \int_{t_1}^{t_2} dt\ \left[\left(\dot{q} - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}\right)\delta p - \left(\dot{p} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}\right)\delta q - \frac{d}{dt}(q\delta p)\right]
\end{aligned} \tag{11.8}$$

Betrachtet man die rechte Seite dieser Gleichung, dann erkennt man, dass sie genau dann verschwindet, wenn einerseits die Hamiltonschen Gleichungen erfüllt sind, und andererseits die Impulse an an den Endpunkten verschwinden, also $\delta p(t_1) = \delta p(t_1) = 0$. Dies erlaubt es uns, ein neues Variationsprinzip aufzustellen.

Deshalb definieren wir ein neues Funktional:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[p(t), q(t)] &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}[p(t), q(t)] - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}(pq) \\
&\stackrel{\text{Gl. 11.3}}{=} \int_{t_1,q_1}^{t_2,q_2} dt \Big[p\dot{q} - \mathcal{H}(p,q,t) - \dot{p}q - p\dot{q} \Big] \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} dt \Big[\dot{p}q + \mathcal{H}(p,q,t) \Big]
\end{aligned}$$

Für die Variation müssen wir jetzt die Randbedingung wählen, dass die Impulse an den Endpunkten festgehalten werden. Die Anfangs- und Endwerte der Impulse werden also von der Variation ausgeschlossen.

Analog zur extremalen Wirkung definieren wir eine neue Größe, nämlich

$$F(p_1, t_1, p_2, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \underset{\substack{p(t_1)=p_1 \\ p(t_2)=p_2}}{\text{stat}} \mathcal{F}[p(t), q(t)] \tag{11.9}$$

Es wird also der stationäre Pfad $p(t)$ und $q(t)$ bestimmt, bei dem die Impulse an den Enden vorgegebene Werte haben.

Diese Größe $F(p_1, t_1, p_2, t_2)$ steht mit der extremalen Wirkung über eine Legendre-Transformation in Beziehung.

$$\mathcal{F}[p(t), q(t)] = \mathcal{S}[p(t), q(t)] - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}(pq) \tag{11.10}$$

$$F(p_1, t_1, p_2, t_2) = S(q_1, t_1, q_2, t_2) - p_2 q_2 + p_1 q_1 \tag{11.11}$$

Damit dies eine Legendre-Transformation ist, müssen die Impulse mit den Ableitungen der Wirkung nach den Koordinaten in Beziehung stehen. Es sollten also Bezihungen der Art $\partial_{q_1} S = -p_1$ und $\partial_{q_2} S = p_2$ gelten. Um dies zu verifizieren, betrachten wir die Änderung der Wirkung

$$S(q_1, t_1, q_2, t_2) \stackrel{\text{Gl. 11.1}}{=} \underset{\substack{q(t_1)=q_1 \\ q(t_2)=q_2}}{\text{stat}} \int_{t_1}^{t_2} dt\, \mathcal{L}(q, \dot{q}, t), \tag{11.12}$$

wenn wir die Randwerte q_1 und q_2 ändern. Für jeden Satz von Randwerten müssen wir nur den jeweiligen Extremalpfad berücksichtigen. Die Variation berücksichtigt also nur solche Pfade, welche die Euler-Lagrange Gleichungen erfüllen.

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S} &= \int dt \; \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} \right] \\
&= \int dt \Big\{ \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right)}_{\text{ELG: }=0} \delta q + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta q \right) \Big\} \\
&= \Big[\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}}_{p} \delta q \Big]_{t_1}^{t_2} = p_2 \delta q_2 - p_1 \delta q_1
\end{aligned} \tag{11.13}$$

Halten wir die erste Randbedinung fest, also $\delta q_1 = 0$ und variieren δq_2, ändert sich die Wirkung um $\delta S = p_2 \delta q_2$. Es gilt also $\frac{\partial S}{\partial q_2} = \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta q_2} = p_2$. Ganz analog erhalten wir einen Zusammenhang der Ableitung der extremalen Wirkung nach dem ersten Randwert und dem entsprechenden Impuls.

Es gilt also:

$$p_1 = -\frac{\partial S}{\partial q_1} \qquad \text{und} \qquad p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2}$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Impulse gerade die Ableitungen der extremalen Wirkung S nach den Randwerten sind.

11.2.1 Variationsprinzip mit anderen Randwerten

Das Prinzip, die Randbedingungen der Variation zu wechseln, lässt sich auf beliebige Kombinationen von Randbedingungen verallgemeinern. Es ist zu beachten, dass genau $2d$ Randbedingungen für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in d Dimensionen festgelegt werden können. Wählt man mehr Randbedingungen, ist das Problem überdeterminiert, und das entsprechende Funktional wird im Allgemeinen keine Lösung, d.h keinen Extremalpfad aufweisen.[1]

11.2.2 Eindeutigkeit

Für jedes dieser Funktionale, sei es $\mathcal{S}[p(t), q(t)]$ oder $F[p(t), q(t)]$, dürfen wir eine totale Zeitableitung einer Funktion addieren, die von den Variablen abhängt, welche bei der Variation festgehalten werden.

Bei der Wirkung $\mathcal{S}$ werden bei der Variation die Koordinaten an den Enden des Pfades festgehalten, weshalb eine beliebige Funktion der Koordinaten addiert werden darf, ohne die Wirkung zu verändern.

$$\mathcal{L}'(q, \dot{q}, p, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, p, t) + \frac{d}{dt} M_1(q, t) \tag{11.14}$$

Dieses Resultat entspricht dem entsprechenden Resultat im Koordinatenraum.

Bei der Legendre-Transformierten $\mathcal{F}$ werden die Impulse an den Enden festgehalten, weshalb wir eine totale Zeitableitung einer Funktion der Impulse zum Integranden addieren dürfen, ohne dass die Pfade selber beeinflusst werden.

$$\mathcal{L}'(q, \dot{q}, p, t) + \frac{d}{dt}(pq) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, p, t) + \frac{d}{dt}(pq) + \frac{d}{dt} M_2(p, t) \tag{11.15}$$

11.3 Kanonische Transformation

Koordinatentransformationen sind ein nützliches Hilfsmittel, um die Lösung der Bewegungsgleichungen zu vereinfachen. Kann man die Lagrangefunktion in die Summe von zwei Termen aufteilen, von denen jeder nur von einem eigenen Variablensatz abhängt, dann kann man die Bewegungsgleichung für beide Variablensätze unabhängig lösen. Dieser Kniff wurde zum Beispiel beim mehrdimensionalen harmonischen Oszillator oder beim Zweikörperproblem verwendet.

Ist eine geeignete Koordinatentransformation bekannt, dann ist es meist am einfachsten, die Lagrangefunktion durch die neuen Koordinaten auszudrücken, und daraus die Bewegungsgleichung für die neuen Variablen zu bestimmen.

Die Transformation der kanonischen Gleichungen ist nicht so einfach, weil Transformationsgleichungen nicht nur von Koordinaten, sonderen auch für die Impulse aufgestellt werden müssen. Die Impulse auf der anderen Seite können wegen $p = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}$ nicht unabhängig von den Koordinaten gewählt werden. Deshalb beschäftigen wir uns hier etwas ausführlicher mit diesen sogenannten **kanonischen Transformationen**

[1] Das ist die Ursache von falschen Konzepten, die man in vielen Lehrbüchern wiederfindet.

Definition 11.1 *KANONISCHE TRANSFORMATION*
Eine Transformation

$$\bar{q} = \bar{q}(p, q, t); \qquad \bar{p} = \bar{p}(p, q, t);$$

heißt kanonisch, wenn es eine Hamilton-Funktion $\bar{\mathcal{H}}(\bar{p}, \bar{q}, t)$ gibt, deren kanonische Gleichungen dieselben Bahnen erzeugen wie die ursprüngliche Hamilton-Funktion $\mathcal{H}$.

Erzeugung einer kanonischen Transformation

Sei eine Transformation durch $\bar{q} = \bar{q}(q, p, t)$ und $\bar{p} = \bar{p}(q, p, t)$ gegeben. Falls dies eine kanonische Transformation ist, muss der Extremalpfad in beiden Darstellungen einem Variationsprinzip genügen.

$$\delta \int_{t_1, q_1}^{t_2, q_2} dt \Big[p\dot{q} - \mathcal{H}(p, q, t) \Big] = \delta \int_{t_1, \bar{q}_1}^{t_2, \bar{q}_2} dt \Big[\bar{p}\dot{\bar{q}} - \bar{\mathcal{H}}(\bar{p}, \bar{q}, t) \Big] = 0 \tag{11.16}$$

Die Variation der Wirkung auf der linken Seite verschwindet für beliebige Variationen des Pfades $q(t), p(t)$ mit den angegebenen Randbedingungen und ähnlich auf der linken Seite.

Die beiden Gleichungen Gl. 11.16 können in eine, nämlich

$$0 = \delta \int_{t_1, q_1, \bar{q}_1}^{t_2, q_2, \bar{q}_2} dt \Big[p\dot{q} - \bar{p}\dot{\bar{q}} - \mathcal{H}(p, q, t) + \bar{\mathcal{H}}(\bar{p}, \bar{q}, t) \Big]$$

zusammengefasst werden, wobei die Variation des vierdimensionalen Pfades $(p, q, \bar{p}, \bar{q})$ zugelassen ist. Beachte dabei, dass die Variation von $\bar{p}, \bar{q}$ unabhängig von p, q ist.

Damit diese Variation verschwindet, muss der Integrand nicht notwendigerweise verschwinden, sondern er kann auch eine totale Zeitableitung einer Funktion $F_1(q, \bar{q}, t)$ der Koordinaten sein, weil diese an den Enden des Pfades nicht variiert werden. Diese Funktion F_1 nennt man **Erzeugende** der Transformation, weil sie, wie im Folgenden gezeigt, die Transformationsgleichungen und die neue Hamilton-Funktion festlegt. Die Erzeugende erfüllt also die folgende Bedingung

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt} F_1(q, \bar{q}, t) &= -p\dot{q} + \bar{p}\dot{\bar{q}} + \mathcal{H}(p, q, t) - \bar{\mathcal{H}}(\bar{p}, \bar{q}, t) \\
\Rightarrow \bar{\mathcal{H}}(\bar{p}, \bar{q}, t) &= -p\dot{q} + \bar{p}\dot{\bar{q}} + \mathcal{H}(p, q, t) + \frac{d}{dt} F_1(q, \bar{q}, t) \\
&= -p\dot{q} + \bar{p}\dot{\bar{q}} + \mathcal{H}(p, q, t) + \frac{\partial F_1}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}}\dot{\bar{q}} + \frac{\partial F_1}{\partial t} \\
&= \mathcal{H}(p, q, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t} - \Big(p - \frac{\partial F_1}{\partial q} \Big)\dot{q} + \Big(\bar{p} + \frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}} \Big)\dot{\bar{q}}
\end{aligned}$$

Da die Hamilton-Funktion nicht von Zeitableitungen $\dot{q}$ und $\dot{\bar{q}}$ abhängen darf[2], folgt

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \qquad \bar{p} = -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}} \qquad \bar{\mathcal{H}}(\bar{p}, \bar{q}, t) = \mathcal{H}(p, q, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Die ersten beiden Gleichungen werden nach $\bar{q}, \bar{p}$ aufgelöst und ergeben dann die Transformationsgleichungen. Aus der letzten erhalten wir die neue Hamilton-Funktion.

[2]Beachte, das aus Zeitableitungen selbst nach Einsetzen von Transformationsgleichungen wieder Zeitableitungen entstehen.

Andere Erzeugende

Ganz analog können wir auf der einen oder anderen Seite auch die Variation mit festgehaltenen Impulsen verwenden. Wir werden dies anhand nur eines Beispiels demonstrieren.

$$0 = \delta \int_{t_1,p_1}^{t_2,p_2} dt\Big[-\dot{p}q - \mathcal{H}(p,q,t)\Big] = \delta \int_{t_1,\bar{q}_1}^{t_2,\bar{q}_2} dt\Big[\bar{p}\dot{\bar{q}} - \bar{\mathcal{H}}(\bar{p},\bar{q},t)\Big]$$
$$\Rightarrow 0 = \delta \int_{t_1,p_1,\bar{q}_1}^{t_2,p_2,\bar{q}_2} dt\Big[-\dot{p}q - \bar{p}\dot{\bar{q}} - \mathcal{H}(p,q,t) + \bar{\mathcal{H}}(\bar{p},\bar{q},t)\Big]$$

Da nun die ursprünglichen Impulse und die transformierten Koordinaten festgehalten werden, darf der Integrand eine totale Zeitableitung genau dieser Größen sein.

$$\frac{d}{dt}F_3(p,\bar{q},t) = -\dot{p}q - \bar{p}\dot{\bar{q}} - \mathcal{H}(p,q,t) + \bar{\mathcal{H}}(\bar{p},\bar{q},t)$$
$$\bar{\mathcal{H}}(\bar{p},\bar{q},t) = \bar{p}\dot{\bar{q}} + \dot{p}q + \mathcal{H}(p,q,t) + \frac{\partial F_3}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial F_3}{\partial \bar{q}}\dot{\bar{q}} + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$
$$= \left(\mathcal{H}(p,q,t) + \frac{\partial F_3}{\partial t}\right) + \left(\bar{p} + \frac{\partial F_3}{\partial \bar{q}}\right)\dot{\bar{q}} + \left(q + \frac{\partial F_3}{\partial p}\right)\dot{p}$$

Daraus folgern wir

$$\bar{p} = -\frac{\partial F_3}{\partial \bar{q}}; \qquad q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}; \qquad \bar{\mathcal{H}}(\bar{p},\bar{q},t) = \mathcal{H}(p,q,t) + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

Wie man sieht, erhält man durch die Wahl der Erzeugenden F_i verschiedene Ergebnisse für

$$p, \bar{p}, q, \bar{q}, \mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}.$$

Die vier verschiedenen Kombinationen der Variation liefern:

Erzeugende	alte Variable	neue Variable	Transformation
$F_1(q,\bar{q},t)$	$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}$	$\bar{p} = -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}}$	$\bar{\mathcal{H}}(\bar{p},\bar{q},t) = \mathcal{H}(p,q,t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$
$F_2(q,\bar{p},t)$	$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$	$\bar{q} = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}}$	$\bar{\mathcal{H}}(\bar{p},\bar{q},t) = \mathcal{H}(p,q,t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$
$F_3(p,\bar{q},t)$	$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}$	$\bar{p} = -\frac{\partial F_3}{\partial \bar{q}}$	$\bar{\mathcal{H}}(\bar{p},\bar{q},t) = \mathcal{H}(p,q,t) + \frac{\partial F_3}{\partial t}$
$F_4(p,\bar{p},t)$	$q = -\frac{\partial F_4}{\partial p}$	$\bar{q} = \frac{\partial F_4}{\partial \bar{p}}$	$\bar{\mathcal{H}}(\bar{p},\bar{q},t) = \mathcal{H}(p,q,t) + \frac{\partial F_4}{\partial t}$

Table 11.1: Liste der Erzeugenden und der entsprechenden kanonischen Transformationen

11.3.1 Beispiel

Punkttransformation

Dieses Beispiel[3] liefert die Erzeugende für eine beliebige Transformation der Koordinaten: Betrachten wir sie kanonischen Transformationen mit der speziellen erzeugenden

$$F_2(\vec{q},\vec{\bar{p}},t) = \sum_j f_j(q_1,\ldots,q_N,t)\bar{p}_j \tag{11.17}$$

[3]genommen von Goldstein, Klassische Mechanik, Kapitel 8.2[**?**]

Wir erhalten entsprechend Tabelle 11.1

$$\begin{aligned}
\bar{q}_i &= \frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}_i} = f_i(q_1, \dots, q_N, t) \\
p_i &= \frac{\partial F_2}{\partial \bar{q}_i} = \sum_j \bar{p}_j \frac{\partial f_j(q_1, \dots, q_N, t)}{\partial q_i} \\
\bar{\mathcal{H}}(\bar{p}, \bar{q}, t) &= \mathcal{H}(p, q, t) + \sum_j \bar{p}_j \frac{f_j(q_1, \dots, q_n, t)}{\partial t}
\end{aligned} \tag{11.18}$$

Die Bestimmung der neuen Impulse aus den alten erfordert eine Matrix inversion. Dafuer definieren wir die Matrix $\boldsymbol{A}$ mit den Matrixelementen elements

$$A_{i,j}(q_1, \dots, q_N, t) = \frac{\partial f_j(q_1, \dots, q_N, t)}{\partial q_i} \tag{11.19}$$

Then the transformation of momenta is

$$\vec{p} = \boldsymbol{A}\vec{\bar{p}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\bar{p}} = \boldsymbol{A}^{-1}\vec{p} \tag{11.20}$$

Dieses Beispiel liefert also ein Rezept für eine ganz allgemeine Koordinatentransformation $\bar{q}_i = f_i(\vec{q}, t)$. Das Rezept zeigt wie die Impulse ineinnander transformiert werden. Beachte dass sich auch die Hamiltonfunktion selber äendert, wenn die Transformation von der Zeit abhängt.

Harmonischer Oszillator

Es sei

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2 \tag{11.21}$$

Nehme die Erzeugende

$$F_1 = \frac{1}{2}m\omega_0 q^2 \cot(\bar{q}) \tag{11.22}$$

Wir erhalten entsprechend Tabelle 11.1

$$\begin{aligned}
p &= \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega_0 q \cot(\bar{q}) \\
\bar{p} &= -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}_i} = -\frac{1}{2}m\omega_0 q^2 \Big(-\frac{1}{\sin^2(\bar{q})}\Big) \\
\bar{\mathcal{H}}(\bar{p}, \bar{q}) &= \mathcal{H}(p, q)
\end{aligned} \tag{11.23}$$

Thus we obtain

$$\begin{aligned}
q &= \sqrt{\frac{2\bar{p}}{m\omega_0}} \sin(\bar{q}) \\
p &= m\omega_0 \underbrace{\sqrt{\frac{2\bar{p}}{m\omega_0}} \sin(\bar{q})}_{q} \cot(\bar{q}) = \sqrt{2\bar{p}m\omega_0} \cos(\bar{q})
\end{aligned} \tag{11.24}$$

The new Hamilton function is

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{H}}(\bar{p},\bar{q}) &= \mathcal{H}(p,q)\\ &= \frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}m\omega_0^2q^2\\ &= \frac{1}{2m}\underbrace{2\bar{p}m\omega_0\cos^2(\bar{q})}_{p^2}+\frac{1}{2}m\omega_0^2\underbrace{\frac{2\bar{p}}{m\omega_0}\sin^2(\bar{q})}_{q^2}\\ &= \bar{p}\omega_0\Big(\cos^2(\bar{q})+\sin^2(\bar{q})\Big)=\bar{p}\omega_0 \end{aligned} \tag{11.25}$$

The Hamilton function in the new coordinates depends only on the momenta, but not the coordinates. The canonical equations are therefore

$$\begin{aligned} \dot{\bar{q}} &= \frac{\partial\bar{\mathcal{H}}}{\partial\bar{p}}=\omega_0 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{q}(t)=\omega_0 t+\phi\\ \dot{\bar{p}} &= -\frac{\partial\bar{\mathcal{H}}}{\partial\bar{q}}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{p}(t)=B \end{aligned} \tag{11.26}$$

The energy is $E=\bar{\mathcal{H}}=\bar{p}\omega_0=B\omega_0$, so that we can resolve $B=E/\omega_0$.

The trajectories are

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2\bar{p}}{m\omega_0}}\sin(\bar{q})=\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}\sin(\omega_0 t+\phi)\\ p &= \sqrt{2\bar{p}m\omega_0}\cos(\bar{q})=\sqrt{2mE}\cos(\omega_0 t+\phi) \end{aligned} \tag{11.27}$$

Dies ist das gewünschte Resultat.

11.4 Hamilton-Jakobische Gleichung

11.4.1 Herleitung der Hamilton-Jakobischen Gleichung

Es wäre von besonderem Interesse, wenn wir eine kanonische Transformation derart finden könnten, dass die Impulse und Koordinaten zeitunabhängig sind. Dazu muss die neue Hamilton-Funktion im Phasenraum konstant sein.

$$\bar{H}(\bar{p},\bar{q},t)=0 \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} \dot{\bar{q}} & =\frac{\partial\bar{H}}{\partial\bar{p}}=0\\ \dot{\bar{p}} & =-\frac{\partial\bar{H}}{\partial\bar{q}}=0 \end{array}\right. \tag{11.28}$$

Wir untersuchen also die zweite kanonische Transformation zusammen mit der Forderung, dass die neue Hamilton-Funktion eine Konstante ist, also nicht von den neuen Impulsen und Koordinaten abhängt.

$$\begin{aligned} \bar{H} &= H(p,q)+\frac{\partial F_2(q,\bar{p},t)}{\partial t}=0\\ p &= \frac{\partial F_2(q,\bar{p},t)}{\partial q}\\ \bar{q} &= \frac{\partial F_2(q,\bar{p},t)}{\partial\bar{p}} \end{aligned}$$

Kombination der ersten beiden Gleichungen führt auf die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung.

$$H\left(\frac{\partial F_2(q,\bar{p},t)}{\partial q},q\right)+\frac{\partial F_2(q,\bar{p},t)}{\partial t}=0$$

Die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung hat eine Vielzahl von Lösungen, die erst durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden müssen. Da die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung eine Differentialgleichung erster Ordnung ist, genügt es die Erzeugende $F_2(q, \bar{p}, 0)$ zur Anfangszeit festzulegen.

Wir können jetzt die Anfangsbedingung wählen, dass die Impulse p zu Beginn einen bestimmten Wert besitzen.

$$p = \frac{\partial F_2(q, \bar{p}, t)}{\partial q}$$
$$\Rightarrow F_2(q, \bar{p}, 0) = p(t = 0)q$$

Da die Transformierten Impulse als Parameter eingehen, können wir sie frei wählen. Es macht Sinn die transformierten Impulse gleich den Anfangsimpulsen zu setzen $\bar{p} = p(t = 0)$, sodass

$$F_2(q, \bar{p}, 0) = \bar{p}q$$

Es hat sich eingebürgert die so definierte Erzeugende als **Hamiltonsche Wirkungsfunktion** mit dem Symbol S zu bezeichnen.

HAMILTON-JAKOBISCHE GLEICHUNG

$$H\left(\frac{\partial S(q, \bar{p}, t)}{\partial q}, q\right) + \frac{\partial S(q, \bar{p}, t)}{\partial t} = 0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$S(q, \bar{p}, 0) = \bar{p}q$$

Kennt man die Lösungen der Hamilton-Jacobische Differentialgleichung, so kann man die Gleichung

$$\bar{q} = \frac{\partial F_2(q, \bar{p}, t)}{\partial \bar{p}} = \frac{\partial S(q, \bar{p}, t)}{\partial \bar{p}}$$

verwenden, um die Bahnkurve $q(t)$ zu bestimmen. Einsetzen der Anfangsbedingung der Hamiltonschen Wirkungsfunktion identifiziert $\bar{q} = q(t = 0)$ direkt mit den Anfangskoordinaten.

Damit erhalten wir die Bahn aus den Anfangsbedingungen für alle Zeiten.

Leider ist der praktische Nutzen der Hamilton-Jacobische Differentialgleichung für die Bestimmung von Bahnkurven begrenzt, da das effizienteste Verfahren zur Lösung der Hamilton-Jacobische Differentialgleichung über die Bahnkurven geht, woraus die Wirkung durch Integration bestimmt wird. Man muss also gerade die Information hineinstecken, die man aus der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung eigentlich erhalten wollte. Umgekehrt ergibt sich aber hiermit aus der klassischen Mechanik eine Methode für die Lösung bestimmter partieller Differentialgleichungen.

11.4.2 Beziehung zur Quantenmechanik

Quantenmechanische Prozesse werden über die Schrödingergleichung

$$i\hbar\partial_t\Psi(\vec{r}, t) = H\Big(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}, \vec{r}, t\Big)\Psi(\vec{r}, t)$$

beschrieben. Bekannter ist die spezielle Form mit $H(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$:

$$i\hbar\partial_t\Psi(\vec{r}, t) = \Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{r})\Big]\Psi(\vec{r}, t)$$

wobei die spezielle Form der Hamilton-Funktion gewählt wurde.

Mit dem Ansatz

$$\Psi(\vec{r}, t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left[S_0(\vec{r}, t) + \hbar S_1(\vec{r}, t) + \dots\right]\right)$$

erhalten wir in niedrigster Ordnung von $\hbar$

$$-\partial_t S_0(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t) = H(\vec{\nabla} S_0, \vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t)$$

Was nach Wegkürzen der Wellenfunktion auf beiden Seiten identisch mit der Hamilton-Jacobische Differentialgleichung ist. Der Grenzfall $\hbar \to 0$ ist der klassische Grenzfall der Quantenmechanik. Die Methode, die Wellenfunktion auf die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung zurückzuführen, wird die Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) Methode[4] genannt und ist ein weitverbreitetes Näherungsverfahren der Quantenmechanik. In der WKB Methode werden allerdings enoch mindestens der Term der Ordnung $\hbar^1$ mit berücksichtigt.

[4] 1926 haben Gregor Wentzel, Hendrik A. Kramers und Leon Brillouin, jeder unabhängig, die semiklassische Näherung der Quantenmechanik erfunden, die nach ihren Erfindern WKB Methode genannt wird.

Appendix A

Einheiten und Konstanten

A.1 Definition der Begriffe und Symbole

Es gibt einige Versuche die Wahl der Symbole zu vereinheitlichen und die Begriffe zu definieren. Hierzu sind das sogenannte Redbook[18] der Physiker und das sognennte Greenbook[6] bzw. das Goldbook[19] der Chemiker zu nennen.

A.2 SI Einheitensystem

Das Internationale Einheitensystem (SI) wurde 1960 zum international gültigen Einheitensystem erklärt[20]. "SI" steht für "Système International d'Unitès".

A.2.1 SI Grundeinheiten

Die Grundeineinheiten des Internationalen Einheitensystems sind wie folgt definiert:

- Eine Sekunde ist die Dauer von 9 192 631 770 Perioden der Strahlung, die dem Übergang von zwei Hyperfeinniveaus des Cäsium ^{133}Cs Isotops im Grundzustand entspricht
- Ein Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum im 299792458-sten Bruchteil einer Sekunde zurücklegt
- Ein Kilogramm ist die Masse des internationalen Prototyps des Kilogramms.
- Das Ampere ist die Stromstärke, die zwischen zwei unendlich langen, parallelen, stromdurchflossenen Drähten infinitesimalen Durchmessers bei einem Abstand von einem Meter eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ Newton pro Meter der Kabel verursacht.
- Ein Kelvin ist der 1/273.16 Bruchteil der absoluten Temperatur des Tripelpunkts von Wasser. (Koexistenz von Eis, Wasser, und Wasserdampf)
- Ein Mol ist die Anzahl der Kohlenstoffatome des ^{12}C Isotops in 0.012 kg. Es muss immer die Art der gezählten Stoffeinheiten (Atome, Moleküle, Elektronen, etc.) angegeben werden.
- Das Candela ist die Lichtintensität, die eine Quelle monochromatischen Lichts der Frequenz $540 \cdot 10^{12} \frac{1}{s}$ in eine Richtung abgibt, wenn deren Winkelintensität $\frac{1}{683}$ Watt pro Steradiant[1] beträgt.

[1] Ein Steradiant ist dier Einheit des Raumwinkels. Der Raumwinkel, der alle Richtungen einschliesst is 4π. Ein Raumwinkel Ω überdeckt auf einer Kugel mit Radius r ein Fläche von Ωr^2. Ein Raumwinkel von einem Steradiant überdeckt also auf einer Kugel mit Radius die Fläche r^2.

Größe	Name der Einheit	Symbol der Einheit
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunde	s
Stromstärke	Ampere	A
Temperature	Kelvin	K
Anzahl	Mol	mol
Lichtintensität	Candela	cd

A.2.2 Zusammengesetzte Einheiten

Größe	Name der Einheit	Symbol der Einheit
Kraft	Newton	$1\text{N}=1\frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}^2}$
Energie	Joule	$1\text{J}=1\frac{\mathrm{kg\ m}^2}{\mathrm{s}^2}$
Druck	Pascal	$1\text{Pa}=1\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\ s}^2}$
Frequenz	Hertz	$1\text{Hz}=\frac{1}{\mathrm{s}}$
Leistung	Watt	$1\text{W}=1\frac{\mathrm{kg\ m}^2}{\mathrm{s}^3}$
Elektrische Ladung	Coulomb	1C=1 As
Elektrisches Potential	Volt	$1\text{V}=1\frac{\mathrm{kg\ m}^2}{\mathrm{As}^3}$
Elektrischer Widerstand	Ohm	$1\Omega = 1\frac{V}{A} = 1\frac{\mathrm{kg\ m}^2}{\mathrm{A}^2\mathrm{s}^3}$
Temperatur	Celsius	$X°\mathrm{C} = (273.15 + X)\mathrm{K}$

A.3 Fundamentale Konstanten

Die anerkannten Werte der Naturkonstanten werden regelmässig vom “Commitee on Data for Science and Technology”, CODATA veröffentlicht[8, 21, 21, 22, 23, 24]. Der Satz von 2014 wurde 2015 auf dem öffentlich zugänglichen Preprintserver Arxiv `www.arxiv.org` publiziert[24]. Die aktuellen Werte werden auf der Website `http://physics.nist.gov/constants` des “National Institute of Standards and Technology” (NIST) zugänglich gemacht.

Lichtgeschwindigkeit	$c = 2.997\,924\,58 \cdot 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Masse des Elektrons	$m_e = 9.109\,389\,7(54) \cdot 10^{-31}\mathrm{kg}$
Masse des Protons	$m_p = 1.672\,623\,1(10) \cdot 10^{-27}\mathrm{kg}$
Elementarladung	$e = 1.602\,177\,33(49) \cdot 10^{-19}\mathrm{As}$
Plancks Wirkungsquantum h	$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054\,572\,66(63) \cdot 10^{-34}\frac{\mathrm{kg\ m}^2}{\mathrm{s}}$
Gravitationskonstante	$G = 6.672\,598\,5 \cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}$
Fallbeschleunigung	$g = 9.806\,65\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
Kreisumfang durch Kreisdurchmesser	$\pi = 3.141\,592\,653\,59$
Euler Konstante	$e = 2.718\,281\,828\,46$

Um sich π einzuprägen, hilft der Spruch *“How I like a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics ”.* Die Anzahl der Buchstaben jeden Worts ergibt die Ziffern von π.

A.4 Rechnen mit Einheiten

Mir scheint es sinnvoll die Einheiten in einer Formel auszuschreiben, weil sich damit die Konsistenz eines Ausdrucks sehr effizient überprüfen lässt. Hat man sich das angewöhnt, dann kann man auch Zahlen aus unterschiedlichen Einheitensystemen mischen, und diese später mit Hilfe der entsprechenden Umrechnungsfaktoren auflösen.

- Ausdrücke links und rechts eines Gleichheitszeichens muessen gleiche Einheiten besitzen.
- Alle Terme in einer Summe muessen dieselben Einheiten besitzen.
- Die Argumente von Funktionen die keine reinen Potenzen sind, müssen frei von Einheiten sein.

Appendix B

Tipps und Tricks

- Bei der Lösung von Aufgaben gerät man häufig in Versuchung, eine Formel zu suchen und diese zu "bedienen". Man denkt an eine Formel und sucht nach Größen, die man in die Formel einsetzen kann. Ist man unter Zeitdruck, erscheint das zunächst als sehr effizient. Allerdings ist diese Vorgehensweise aber auch eine häufige Fehlerquelle, insbesondere bei komplexeren Sachverhalten. Darüber hinaus gerät man leicht in zielloses Raten, was sehr viel Zeit kosten kann, da man auf gut Glück angewiesen ist.

  Häufig ist der folgende, systematische Weg erfolgversprechender, der auch der Analyse eines realen Problems näher kommt. Er besteht im wesentlichen aus drei Teilen: (1) Analyse des Problems, (2) Bestimmen einer Problemlösungsstrategie, (3) Rechnen. Ich bezeichne das als ASR Strategie (A=Analyse, S=Strategie, R=Rechnen).

  - Am Anfang steht eine sorgfältige Analyse des Problems. Zunächst verschafft man sich einen Überblick über die beschriebene Situation. Dabei ist häufig eine erste Skizze der Situation nützlich, die man aber auch im Kopf machen kann. Man sammelt die Fakten. Den gegebenen Größen ordnet man eindeutige mathematische Symbole zu, und diesen Symbolen gibt man die in der Aufgabe zugeordneten Werte. Man macht sich so eine Liste von gegebenen Größen und Aussagen.
  - Wichtig ist, dass man für jedes mathematischen Symbol eine klare Vorstellung hat, was es physikalisch beschreibt. Eine Zeichnung kann hierbei unschätzbare Dienste erweisen.
  - Anschließend bestimmt man was gefragt ist.
  - Nun sucht man nach einer Problemlösungsstrategie: Wenn das Problem komplex ist, versucht man, das Problem in einfachere Teilprobleme zu zerlegen. Jedes Einzelproblem geht aus von den bis dahin bekannten Fakten und Größen und liefert neue Fakten und Größen. Es wird also genauso charakterisiert wie das Gesamtproblem: Man schreibt sich die gegebene Fakten und Größen auf und definiert die Größen, die in dem Einzelproblem zu bestimmen ist.
  - Jedem Einzelproblem ordnet man die Formeln und Zusammenhänge zu, die für die Lösung dieses Problems nützlich sind. Dies macht man meistens gleich bei der Zerlegung in Einzelprobleme.
  - Jetzt ist das Problem in eine mathematische Form gebracht und kann mathematisch gelöst werden. Das Rechnen ist oft zeitaufwendig. Da man jetzt bereits eine sichere Problemlösungsstrategie hat, kann man sich darauf konzentrieren, da man von jetzt ab ziemlich sicher zum Ziel kommen wird.
  - Schließlich formuliert man die Antwort.

  Auch wenn man im richtigen Leben die einzelnen Schritte nicht derartig formalisiert angehen wird, so ist es am Anfang sehr nützlich, diese Schritte explizit einzuüben. Mit etwas Erfahrung wird sich daraus eine Denkstruktur entwickeln, die automatisch abläuft, ohne dass man darüber nachdenken muss.

- Mathematischen Ableitungen können manchmal sehr unübersichtlich werden, insbesondere, wenn sie sich auf mehrere Seiten erstrecken. Deshalb ist es wichtig, sorgfältig zu arbeiten und zweitens eventuelle Fehler effektiv zu bekämpfen.
  - Haben die Größen in der Gleichung eine konsistente mathematische Form? Ein Vektor kann zum Beispiel nicht einem Skalar oder einer Matrix gleichgesetzt werden.
  - Gehen die Einheiten auf? Zwei Größen mit unterschiedlichen Einheiten können nicht gleichgesetzt oder addiert werden. Bei Multiplikationen multiplizieren sich auch die Einheiten.
  - Abhängigkeiten verfolgen. Man sollte sich genau notieren von welchen Variablen bestimmte Funktionen abhängen. Manchmal werden Symbole überladen, sodass man schreibt $f(t) = f(g(t), t)$. Hier muss man sehr vorsichtig sein damit man nicht partielle und absolute Ableitungen durcheinanderbringt.
  - Man soll sich bei jedem Ausdruck vorstellen, wie man ihn für gegebene Zahlen auswertet. Dies vermeidet Ausdrücke der Art $\frac{df}{d\vec{r}}$.
  - Wenn immer möglich, sollte man sich die physikalische Bedeutung eines mathematischen Ausdrucks verdeutlichen. Wenn das nicht gelingt, kann das ein Hinweis darauf sein, dass der Ausdruck gar keinen Sinn ergibt, weil sich ein Fehler eingeschlichen hat. Allerdings sind viele Ableitungen so komplex, dass das nicht bei jedem Ausdruck gelingt. Dann muss man mathematisch hinreichend sattelfest sein, um auch "ohne Seil" weiterzukommen, bis man wieder den festen Grund eines physikalisch bedeutungsvollen Ausdrucks erreicht. Die physikalische Vorstellung ist auch sehr wichtig, um eine Ableitung in die richtige Richtung zu leiten und um den Überblick zu behalten. Die bildliche Vorstellung erlaubt es einem, seine Kreativität anzuzapfen.
  - Die physikalische Vorstellungen darf, auf der anderen Seite, auf keinen Fall dazu verleiten, mathematische Schritte nur intuitiv zu machen. Ein Beispiel ist der Ausdruck $I = \int dmr^2$ für das Trägkeitsmoment, den man in vielen Lehrbüchern findet. Die Gleichung erscheint intuitiv vernünftig, weil es den Zusammenhang mit dem entzprechenden Ausdruck für Massepunkte ähnelt. Aber versucht einmal, Zahlen einzusetzen! ($I = \int dmr^2(m)$??)
  - Wird eine Ableitung besonders komplex, ist es häufig nützlich, sich geeignete Symbole zu wählen. Ein Beispiel sind Matrizenausdrücke: Gleichungen werden häufig übersichtlicher, wenn man die Indizes weglässt und eine Matrix it Elementen $A_{i,j}$ einfach als $\boldsymbol{A}$ bezeichnet. Man muss sich aber dann mit den Rechenregeln für diese abstrakten Symbole vertraut machen. Solche Abstraktionen sind in der Physik und der Mathematik gängig und die Wahl einer geeigneten Formelsprache ist sicherlich einer der Gründe für den Erfolg der Physik.
  - Man sollte sich wenn immer möglich Situationen oder Funktionen graphisch darzustellen. Beim Menschen ist der Gesichtssinn am besten entwickelt und am stärksten mit anderen Arealen de Gehirns verknüpft. Deswegen sagt man "Ein Bild sagt mehr als Tausend Worte." Man kann sich bilder auch viel einfacher einprägen als Texte oder Formeln. Am Anfang ist es mühselig Zeichnungen anzufertigen, aber mit etwas Training entwickelt man seine Vorstellung so weit, dass man die meisten Dinge nicht mehr hinzeichnen muss.

Appendix C

Rotation about an axis

The description of rotations is cumbersome. The common practice is to resort to Euler angles. Personally, I find Euler angles intransparent and not very useful for actual work on the computer. I ended up working either with triples of orthogonal vectors or with the rotation angle. The **rotation-angle vector** shall describe the rotation axis by its direction and the rotation angle by its absolute value. The procedures using the angle-vector are derived in this section.

C.1 Rotation matrix from a rotation vector

Let us seek for a unitary matrix $\boldsymbol{U}$ describing a rotation.

We construct the full rotation matrix by repeatedly applying an infinitesimal rotation $(\mathbf{1}+\frac{1}{N}\boldsymbol{G})$ many times

$$\boldsymbol{U}=\lim_{N\to\infty}(\mathbf{1}+\frac{1}{N}\boldsymbol{G})^N$$

This is nothing but the definition for the exponential function

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}(1+\frac{x}{N})^N&=\lim_{N\to\infty}\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}1^{N-j}\Big(\frac{x}{N}\Big)^j=\lim_{N\to\infty}\sum_{j=0}^{N}\frac{N!}{j!(N-j)!}\frac{1}{N^j}x^j\\&=\lim_{N\to\infty}\sum_{j=0}^{N}1\Big(1-\frac{1}{N}\Big)\Big(1-\frac{2}{N}\Big)\cdots\Big(1-\frac{j-1}{N}\Big)\frac{1}{j!}x^j=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}x^j=\mathrm{e}^x\end{aligned}$$

Thus we can express the rotation matrix as

$$\boldsymbol{U}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{G}}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\boldsymbol{G}^j$$

It may be confusing to evaluate a function that has a matrix in its argument. We will become more familiar with this construct in quantum mechanics. A function of a matrix is defined by the power series expansion of the function. Since the product of matrices are well defined we can also form the function of a matrix.

One requirement for the rotation is that it is unitary. What does that mean for $\boldsymbol{G}$? We require that the infinitesimal rotation is unitary to up to at least first order.

$$\Big(\mathbf{1}+\frac{1}{N}\boldsymbol{G}\Big)\Big(\mathbf{1}+\frac{1}{N}\boldsymbol{G}\Big)^\top=\mathbf{1}+\frac{1}{N}(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{G}^\top)+\frac{1}{N^2}\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^\top$$

This expression equals one to first order, if

$$\boldsymbol{G}^\top = -\boldsymbol{G}$$

Thus, the requirement that the rotation $\boldsymbol{U}$ is unitary translates into the condition that $\boldsymbol{G}$ be antisymmetric.

The most general form of an antisymmetric matrix is[1]

$$\boldsymbol{G} := \begin{pmatrix} 0 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 0 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 0 \end{pmatrix} = \vec{\phi} \times \mathbf{1} := \Big(\vec{\phi} \times \vec{e}_x\Big) \otimes \vec{e}_x + \Big(\vec{\phi} \times \vec{e}_y\Big) \otimes \vec{e}_y + \Big(\vec{\phi} \times \vec{e}_z\Big) \otimes \vec{e}_z$$

and has three independent parameters. The parameters (ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z) can be combined into a single (pseudo)-vector $\vec{\phi}$.

The direction of **angle vector** $\vec{\phi}$ will turn out to be the rotation axis. The length of the vector is rotation angle following the convention of the right-hand-rule.(See Fig. 5.12 on p. 117)

As discussed before, the rotation can be written as

$$\boldsymbol{U} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{G}} = \mathrm{e}^{\vec{\phi} \times \mathbf{1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\vec{\phi} \times \mathbf{1}\Big)^n$$

Let us work out the powers

$$\begin{aligned}
\Big(\vec{\phi} \times \mathbf{1}\Big)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 0 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 0 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\phi_z^2 - \phi_y^2 & \phi_x\phi_y & \phi_x\phi_z \\ \phi_x\phi_y & -\phi_z^2 - \phi_x^2 & \phi_y\phi_z \\ \phi_x\phi_z & \phi_y\phi_z & -\phi_y^2 - \phi_x^2 \end{pmatrix} = -\vec{\phi}^2 \mathbf{1} + \vec{\phi} \otimes \vec{\phi} \\
\Big(\vec{\phi} \times \mathbf{1}\Big)^3 &= -\Big(\vec{\phi} \times \mathbf{1}\Big)\vec{\phi}^2\mathbf{1} + \Big(\vec{\phi} \times \mathbf{1}\Big)\vec{\phi} \otimes \vec{\phi} = -\vec{\phi}^2 \Big(\vec{\phi} \times \mathbf{1}\Big) \\
\Big(\vec{\phi} \times \mathbf{1}\Big)^n &= |\vec{\phi}|^n \begin{cases} \mathbf{1} & \text{for } n = 0 \\ (-1)^k \frac{1}{|\vec{\phi}|} \Big(\vec{\phi} \times \mathbf{1}\Big) & \text{for odd } n = 2k+1 > 0 \\ (-1)^k \frac{1}{\vec{\phi}^2} \Big(\vec{\phi}^2 \mathbf{1} - \vec{\phi} \otimes \vec{\phi}\Big) & \text{for even } n = 2k > 0 \end{cases} \\
&= \Big(i|\vec{\phi}|\Big)^n \begin{cases} \mathbf{1} & \text{for } n = 0 \\ -i \frac{1}{|\vec{\phi}|} \Big(\vec{\phi} \times \mathbf{1}\Big) & \text{for odd } n = 2k+1 > 0 \\ \mathbf{1} - \vec{\phi} \otimes \vec{\phi}/(\vec{\phi}^2) & \text{for even } n = 2k > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

In the last line we exploited that the vector product of a vector with itself vanishes. (checked by matrix multiplication.)

Thus we can express the rotation matrix by

[1] '*times*' is the vector product and '$\otimes$' is the dyadic or outer product.

ROTATION

$$\boldsymbol{U}=\mathrm{e}^{\vec{\phi}\times\mathbf{1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big(\vec{\phi}\times\mathbf{1}\Big)^{n}=\mathbf{1}+\Big(\mathbf{1}-\vec{e}_{\phi}\otimes\vec{e}_{\phi}\Big)\Big(\cos(\phi)-1\Big)+\Big(\vec{e}_{\phi}\times\mathbf{1}\Big)\sin(\phi) \tag{C.1}$$

so that

$$\boldsymbol{U}\vec{r}=\vec{r}+\sin(\phi)\vec{e}_{\phi}\times\vec{r}+\Big(\cos(\phi)-1\Big)\Big(\vec{r}-\vec{e}_{\phi}(\vec{e}_{\phi}\vec{r})\Big) \tag{C.2}$$

where $\phi=|\vec{\phi}|$ and $\vec{e}_{\phi}=\vec{\phi}/|\vec{\phi}|$

Test

Let me test the result Gl. C.1:

- the transformation should keep the rotation axis invariant i.e. $\boldsymbol{U}\vec{e}_{\phi}=\vec{e}_{\phi}$
- the difference between the transformed and the original vector is orthogonal to the rotation axis, i.e. $\vec{e}_{\phi}(\boldsymbol{U}\vec{r}-\vec{r})=0$.
- The derivative of the rotated vector with respect to the angle $\partial_{\phi}\boldsymbol{U}\vec{r}$ must be identical to the propagator applied to the rotated vector $\vec{e}_{\phi}\times\boldsymbol{U}\vec{r}$

$$\begin{aligned}
\partial_{\phi}\boldsymbol{U}\vec{r} &= \cos(\phi)\vec{e}_{\phi}\times\vec{r}-\sin(\phi)\Big(\vec{r}-\vec{e}_{\phi}(\vec{e}_{\phi}\vec{r})\Big)\\
\vec{e}_{\phi}\times\boldsymbol{U}\vec{r} &= \vec{e}_{\phi}\times\vec{r}+\sin(\phi)\vec{e}_{\phi}\times(\vec{e}_{\phi}\times\vec{r})+\Big(\cos(\phi)-1\Big)\vec{e}_{\phi}\times\vec{r}\\
&\stackrel{bac-cab}{=} \sin(\phi)\Big(\vec{e}_{\phi}(\vec{e}_{\phi}\vec{r})-\vec{r}(\vec{e}_{\phi}\vec{e}_{\phi})\Big)+\cos(\phi)\vec{e}_{\phi}\times\vec{r}
\end{aligned}$$

C.2 Obtain the angle vector

One can construct the angle vector, when one knows two vectors $\vec{r}_1$ and $\vec{r}_2$, as well as the vectors $\boldsymbol{U}\vec{r}_1$ and $\boldsymbol{U}\vec{r}_2$ resulting from a rotation $\boldsymbol{U}$ of the two former vectors. It is important that none of the vectors is parallel to the rotation axis or to the other vector.[2]

At first one constructs the direction of the rotation axis. We exploit that the rotation moves points in planes perpendicular to the rotation axis.

$$\begin{aligned}
\vec{e}_{\phi}\perp(\boldsymbol{U}\vec{r}_1-\vec{r}_1) \qquad &\text{and} \qquad \vec{e}_{\phi}\perp(\boldsymbol{U}\vec{r}_2-\vec{r}_2)\\
\Rightarrow \qquad & \vec{e}_{\phi}\,||\,\Big(\boldsymbol{U}\vec{r}_1-\vec{r}_1\Big)\times\Big(\boldsymbol{U}\vec{r}_2-\vec{r}_2\Big)
\end{aligned}$$

Thus, we construct the unit vector parallel to the rotation axis as

$$\vec{e}_{\phi}=\frac{(\boldsymbol{U}\vec{r}_1-\vec{r}_1)\times(\boldsymbol{U}\vec{r}_2-\vec{r}_2)}{\Big|(\boldsymbol{U}\vec{r}_1-\vec{r}_1)\times(\boldsymbol{U}\vec{r}_2-\vec{r}_2)\Big|}$$

[2] If the pair of vectors used for $(\vec{r},\boldsymbol{U}\vec{r})$ is not obtained by a pure rotation about the axis $\vec{e}_{\phi}$, the analysis will fail. However, we can change the vectors such that operations such as a radial scaling and a shift parallel to the rotation axis are projected out.

$$\vec{r}'=\vec{r}-\vec{e}_{\phi}(\vec{e}_{\phi}\vec{r}) \qquad \text{and} \qquad \vec{r}''=\vec{r}'/|\vec{r}'|$$

The first operation shifts the point parallel to the normalized axis $\vec{e}_{\phi}$ so that $\vec{r}'$ is orthogonal to the axis. The second operation scales the resulting vector so that it has unit length.

After these operations are applied to a set of two vectors they can be identified as a pair of original and rotated vector, with $\vec{e}_{phi}$ as rotation axis.

Now we need tha absolute value of the angle. We obtain it from Gl. C.2 as follows:

$$\begin{aligned}\underbrace{\vec{e}_\phi \times \boldsymbol{U}\vec{r}}_{\vec{w}} &\overset{\text{Gl. C.2}}{=} \vec{e}_\phi \times \vec{r} + \sin(\phi)\vec{e}_\phi \times (\vec{e}_\phi \times \vec{r}) + \Big(\cos(\phi) - 1\Big)(\vec{e}_\phi \times \vec{r}) \\ &= \sin(\phi)\underbrace{\Big[\vec{e}_\phi(\vec{e}_\phi\vec{r}) - \vec{r}\Big]}_{\vec{u}} + \cos(\phi)\underbrace{(\vec{e}_\phi \times \vec{r})}_{\vec{v}}\end{aligned} \tag{C.3}$$

Thus we determine the three vectors

$$\begin{aligned}\vec{u} &\overset{\text{def}}{=} \vec{e}_\phi(\vec{e}_\phi\vec{r}) - \vec{r} \\ \vec{v} &\overset{\text{def}}{=} \vec{e}_\phi \times \vec{r} \\ \vec{w} &\overset{\text{def}}{=} \vec{e}_\phi \times \boldsymbol{U}\vec{r}\end{aligned}$$

Gl. C.3 says that all three vectors lie in the same plane. The two last equations show that this plane is perpendicular to the rotation axis.

With these definitions the last equation Gl. C.3, obtains the form

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \vec{w} = \sin(\phi)\vec{u} + \cos(\phi)\vec{v} \\ &\Rightarrow \quad \vec{u}\vec{w} = \sin(\phi)\vec{u}^2 + \cos(\phi)\vec{u}\vec{v} \quad \text{and} \quad \vec{v}\vec{w} = \sin(\phi)\vec{u}\vec{v} + \cos(\phi)\vec{v}^2 \\ &\Rightarrow \quad \begin{pmatrix}\vec{u}\vec{w} \\ \vec{v}\vec{w}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{u}^2 & \vec{u}\vec{v} \\ \vec{u}\vec{v} & \vec{v}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin(\phi) \\ \cos(\phi)\end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \quad \begin{pmatrix}\sin(\phi) \\ \cos(\phi)\end{pmatrix} = \frac{1}{\vec{u}^2\vec{v}^2 - (\vec{u}\vec{v})^2}\begin{pmatrix}\vec{v}^2 & -\vec{u}\vec{v} \\ -\vec{u}\vec{v} & \vec{u}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}\vec{w} \\ \vec{v}\vec{w}\end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \quad \sin(\phi) = \frac{\vec{v}^2(\vec{u}\vec{w}) - (\vec{u}\vec{v})(\vec{v}\vec{w})}{\vec{u}^2\vec{v}^2 - (\vec{u}\vec{v})^2} \quad \text{and} \quad \cos(\phi) = \frac{\vec{u}^2(\vec{v}\vec{w}) - (\vec{u}\vec{v})(\vec{u}\vec{w})}{\vec{u}^2\vec{v}^2 - (\vec{u}\vec{v})^2}\end{aligned}$$

We determine the angle as follows:

$$\vec{\phi} = \vec{e}_\phi \,\text{acos}\underbrace{\left(\frac{\vec{u}^2(\vec{v}\vec{w}) - (\vec{u}\vec{v})(\vec{u}\vec{w})}{\vec{u}^2\vec{v}^2 - (\vec{u}\vec{v})^2}\right)}_{\cos(\phi)} \cdot \text{sgn}\underbrace{\left(\frac{\vec{v}^2(\vec{u}\vec{w}) - (\vec{u}\vec{v})(\vec{v}\vec{w})}{\vec{u}^2\vec{v}^2 - (\vec{u}\vec{v})^2}\right)}_{\sin(\phi)}$$

where we assumed that the arcus cosiunus returns the result in the interval $[0, \pi[$. It is important not to miss the second term, because the arcus cosinus alone does not produce the angle in a unique manner.

Appendix D

Mathematische Methoden

Ein empfehlenswertes Lehrbuch zur Vektorrechnung und der ein- und mehrdimensionalen Differential und Integralrechnung ist das Buch Vektoranalysis von Marsden[25].

D.1 Logik

D.1.1 Boolesche Algebra:

Logik handelt von den Wahrheitswerten von verknüpften Aussagen. Eine Aussage ist ein Satz, dem man eindeutig entweder wahr oder falsch zuordnen kann. Eine Aussage kann also zwei Werte besitzen, nämlich wahr oder falsch.

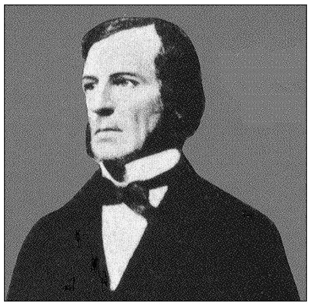


Abb. D.1: George Boole, 1815-1864

Eine Aussage ist zum Beispiel "Heute scheint die Sonne in Clausthal". Kenne ich den Wahrheitsgehalt dieses Satzes, dann kann ich sofort den Wahrheitsgehalt des Satzes "Heute scheint die Sonne in Clausthal nicht" bestimmen. Ist der erste Satz wahr dann ist der zweite falsch und umgekehrt. Man sagt, dass der zweite Satz die Negation (Verneinung) des ersten ist.

Durch Verknüpfen mehrer Aussagen kann man komplexe Sachverhalte darstellen. Kennt man die Wahrheitswerte der einzelnen Aussagen, dann kann man anhand der Verknüpfungsregeln bestimmen, ob der Sachverhalt richtig oder falsch dargestellt wurde. Die Mathematik und ihre Beweise basieren komplett auf der logischen Verknüpfung einfacher Sachverhalte, bzw. als wahr angenommene Postulate. Man glaubte auch, dass die Sprache auf die logische Verknüpfung von Elementaraussagen zurückgeführt werden kann.[26] Dies war allerdings eine zu vereinfachte Sicht der Dinge.[27]

Den Wahrheitswert verknüpfter Aussagen kann man anhand von Wahrheitstabellen ausdrücken. Es gibt nur eine endliche Anzahl von Manipulationsregeln einzelner Aussagen und für die Verknüpfung von zwei Aussagen, die im folgenden dargestellt sind.

Mit nur einer Aussage kann ich vier unterschiedliche Aussagen bilden, von denen aber nur die Negation von Bedeutung ist.

Identität

a	a
w	w
f	f

Negation

a	$\neg a$
w	f
f	w

Kontradiktion

a	f
w	f
f	f

Tautologie

a	w
w	w
f	w

Es gibt 16 logische Binäroperatoren.

Kontradiktion

a	b	f
w	w	f
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Weder a noch b

a	b	$\neg a \land \neg b$
w	w	f
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Wenn nicht a, dann b

a	b	ab
w	w	f
w	f	f
f	w	w
f	f	f

nicht a

a	b	$\neg a$
w	w	f
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Wenn a, dann nicht b

a	b	ab
w	w	f
w	f	w
f	w	f
f	f	f

nicht b

a	b	$\neg b$
w	w	f
w	f	w
f	w	f
f	f	w

Antivalenz

a	b	$a \neq b$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

nicht (a und b)

a	b	$a \vert b$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	w

und

a	b	$a \land b$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Äquivalenz

a	b	$a \equiv b$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

b

a	b	b
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	f

Implikation

a	b	$a \to b$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

a

a	b	a
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	f

Implikation

a	b	$a \leftarrow b$
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	w

oder

a	b	$a \lor b$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Tautologie

a	b	w
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	w

- "nicht a und b" wird auch als "NAND" (Not AND) bezeichnet
- Äquivalenz wird auch als XNOR (eXclusive Not OR) bezeichnet.
- "und" wird auch als Konjunktion bezeichnet
- "oder" wird auch als Disjunktion bezeichnet
- "Weder noch" wird auch als NOR (Not OR) bezeichnet.
- Antivalenz wird auch als XOR (eXclusive OR) bezeichnet.

D.1.2 Beweisformen:

Um einen Beweis zu führen, sollte man immer

- die Bedingungen, unter denen die Beweisaussage gültig ist und
- die Beweisaussage

exakt, eindeutig und vollständig notieren.

In der Praxis wird diese Regel mehr oder weniger gut befolgt. Das liegt daran dass es natürlich selten möglich ist wirklich *alle* Voraussetzungen des Beweises aufzuführen. Das wären viele Aussagen der Mathematik. Deshalb beschränkt man sich darauf, die Voraussetzungen zu notieren, die nicht ganz offensichtlich sind.

Es ist immens wichtig, dass keine Folgen des Beweises als Voraussetzungen für seine Beweisführung verwendet werden. Ein solcher Beweis hat keinerlei Aussagekraft.

Induktionsbeweis:

Der Induktionsbeweis ist immer dann anwendbar wenn man von einer Aussage eines Satzes auf eine weitere schliessen kann.

Eine Aussage A_n lässt sich dadurch beweisen, dass man folgende zwei Behauptungen zeigt

1. A_1 ist richtig
2. aus A_n folgt A_{n+1}

Beispiel: Zeige, dass die folgende Aussage A_n für beliebige Werte von n gilt

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

1. Induktionsanfang: Zeige A_1

$$1=\frac{1\cdot 2}{2}$$

2. Induktionsschritt: Zeige dass aus A_n die Aussage A_{n+1} folgt. Wir beginnen mit der Aussage A_{n+1} und führen sie auf A_n zurück.

$$\begin{aligned}1+2+3+\ldots+n+(n+1) &\overset{A_n}{=} \frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{n(n+1)}{2}+n+1\\ &=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

Widerspruchsbeweis:

Man kann eine Aussage A dadurch beweisen, dass man sein Gegenteil $\neg A$ widerlegt. Der Widerspruchsbeweis wird auch als "Reductio ad adsurdum" bezeichnet.

Bildet man also das exakte Gegenteil der Aussage A und findet ein einziges Beispiel, das $\neg A$ widerlegt, dann ist $\neg A$ falsch. Dies widerum bedeutet, dass $A=\neg(\neg A)$ richtig ist.

D.2 Verschiedene elementare Beziehungen

D.2.1 Fakultät

Die **Fakultät** $n!$ einer nichtnegativen ganzen Zahl n ist durch

$$\begin{aligned}n! &\overset{\text{def}}{=} 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n\\ 0! &\overset{\text{def}}{=} 1\end{aligned}$$

definiert.

Die Fakultät (Englisch "Factorial") spielt in der statistischen Physik eine herausragende Rolle: Sie ist die Anzahl der Möglichkeiten mit der n Elemente auf n Plätze verteilt werden können:

1. Das erste Element kann auf n verschiedene Plätze verteilt werden. Es gibt also n Möglichkeiten
2. Da ein Platz bereits besetzt ist, kann das zweite Element nur auf die $(n-1)$ verbleibenden Plätze verteilt werden. Insgesamt gibt es also $n(n-1)$ Möglichkeiten, zwei Teilchen auf n Plätze zu verteilen.
3. Für das n-te Teilchen bleibt jeweils nur ein einziger Platz übrig. Betrachten wir also alle Möglichkeiten der Anordnung, so erhalten wir $n(n-1)\cdots 1 = n!$ Anordnungen.

D.2.2 Binomischer Lehrsatz

Der **Binomische Lehrsatz** drückt die Potentzder Summe aus zwei Zahlen als Summe ihrer Produkte dar.

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

Dabei sind $\binom{n}{j}$ die **Binomialkoeffizienten**, definiert als

$$\binom{n}{j} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

wobei $n! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot (n)$ die **Fakultät** von n ist.

Die Binomialkoeffizienten können leicht über das **Pascal'sche Dreieck** konstruiert werden. Dabei wird ein Element immer als summe der beiden benachbart darüberstehenden Zahlen konstruiert. Es stehen dann in der n-ten Reihe die Binomialkoeffizienten für die n-te Potenz.

n=0						1						
n=1					1		1					
n=2				1		2		1				
n=3			1		3		3		1			
n=4		1		4		6		4		1		
n=5	1		5		10		10		5		1	

D.3 Vektorrechnung

D.3.1 Skalarprodukt

Das **Skalarprodukt** wird auch als **inneres Produkt** oder als **Punktprodukt** bezeichnet. Wie der Name sagt, ist das Resultat des Skalarprodukts wieder eine Skalar, also eine einfache Zahl.

Es ist wie folgt durch die Komponenten definiert.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i a_i b_i$$

Der Betrag oder die Länge eines Vektors ist die Wurzel aus den Skalarprodukts des vektors mit sich selbst.

$$|\vec{a}| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

Das Skalarprodukt kann mit Hilfe der Beträge als

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\alpha$$

ausgedrückt werden. Auf diese Weise lässt sich nicht nur die Länge, sondern auch der Winkel zwischen zwei vektoren durch Skaralprodukte ausgedrückt werden.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$

D.3.2 Kreuzprodukt

Das **Kreuzprodukt** ist in 3 Dimensionen wie folgt definiert

$$\vec{a}\times\vec{b} \hat{=} \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Das Kreuzprodukt ist selber ein Vektor.

Die geometrische Deutung des Kreuzprodukts ist die folgende: Der resultierende Vektor steht senkrecht auf den beiden Vektoren, die das Kreuzprodukt bilden. Seine Länge entspricht gerade der Fäche des Parallelogramms, das von den beiden Vektoren aufgespannt wird.

Die Richtung ergibt sich aus der Rechte-Hand Regel für das Kreuzprodukt.[1]

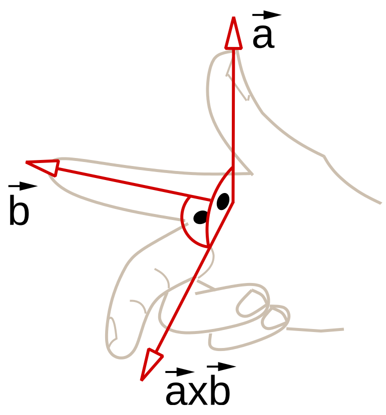


Abb. D.2: Rechte-Hand Regel für das Kreuzprodukt

Wir werden später sehen, dass sich das Kreuzprodukt elegant mit dem vollständig antisymmetrischen Tensor $\epsilon_{i,j,k}$, das auch als Levy-Civita Symbol bezeichnet wird ausdrücken.

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i = \sum_{j,k} \epsilon_{i,j,k} a_j b_k$$

D.3.3 Dyadisches Produkt

Das **dyadische Produkt** von zwei Vektoren ist ein Tensor. Das dyadische Produkt ist wie folgt durch die Komponenten definiert.

$$\vec{a}\otimes\vec{b} \hat{=} \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$$

[1] Die Rechte Hand-Regel des Kreuzprodukts ist eng mit rechtshändigen Koordinatensystemen verknüpft, die hierbei vorausgesetzt werden.

Multiplizieren wir einen Vektor mit dem dyadischen Produkt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, dann erhalten wir

$$(\vec{a}\otimes\vec{b})\vec{c}\stackrel{\text{def}}{=}\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

Das dyadische Produkt erlaubt es, einen Vektor auf eine Richtung zu projezieren. Betrachte zum Beispiel einen Vektor $\vec{e}$, dessen Länge gleich eins ist.

$$\vec{b}=(\vec{e}\otimes\vec{e})\vec{a}$$

$\vec{b}$ hat, wie in Abb. D.3.3 dargestellt, dieselbe Richtung wie $\vec{e}$ und seine Länge entspricht der Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{e}$.

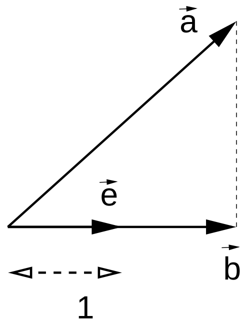


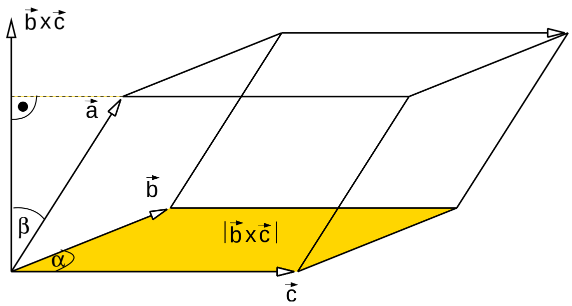
Abb. D.3: Projektion des Vektors $\vec{a}$ auf einen Vektor $\vec{e}$ der Länge 1. das Resultat ist $\vec{b}$

D.3.4 Spatprodukt

Das **Spatprodukt** ist in drei Dimensionen definiert. Es ist die Verknüpfung des Skalarprodukts mit dem Kreuzprodukt.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

Das Spatprodukt ist ein Skalar, dessen Absolutbetrag dem Volumen des Parallelepipeds, dem Spat, entspricht, das durch die drei Vektoren aufgespannt wird.



Das Spatprodukt ist zyklisch vertauschbar, d.h.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

Das Spatprodukt entspricht der Determinante der Matrix, die aus den drei Vektoren gebildet wird.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{i,j,k}a_ib_jc_k=\det\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

wobei $\epsilon_{i,j,k}$ das Levy-Civita Symbol ist, das in Anhang D.5.8 beschrieben ist.

D.4 Koordinatensysteme

Polarkoordinaten (in der Ebene)

POLARKOORDINATEN IN DER EBENE

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix} \qquad \text{bzw} \qquad \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \operatorname{atan}(\frac{y}{x}) \end{pmatrix} \tag{D.1}$$

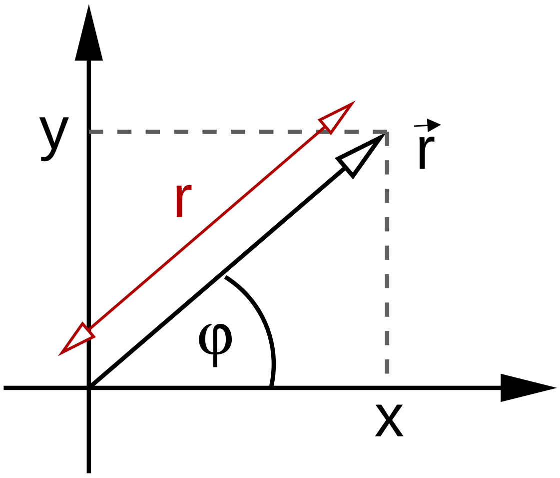


Abb. D.4: Polarkoordinaten in der Ebene

D.4.1 Zylinderkoordinaten

Zylinderkoordinaten sind wie folgt definiert:

ZYLINDERKOORDINATEN

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi\,[\theta(-x) + \theta(-y)\theta(x)] \\ z \end{pmatrix}$$

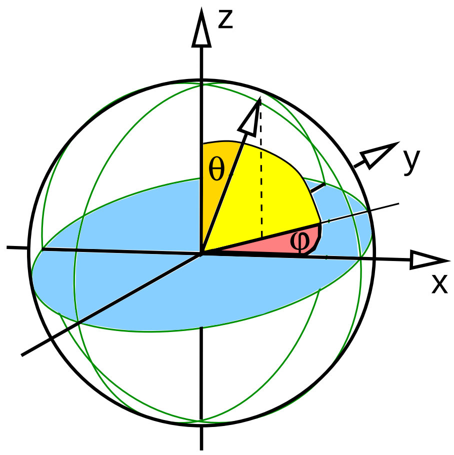
Dabei ist $\theta(x)$ die Heaviside-Funktion ($\theta(x<0) = 0, \theta(0) = \frac{1}{2}$ und $\theta(x>0) = 1$). Der Arcus Tangens sei so definiert dass sein Wertebereich im Bereich $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ liegt. Der Winkel φ soll aus dem Bereich $[0, 2\pi[$ stammen.

$$\det\begin{pmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\varphi} & \frac{dx}{dz} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\varphi} & \frac{dy}{dz} \\ \frac{dz}{dr} & \frac{dz}{d\varphi} & \frac{dz}{dz} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right) = r$$

Das heißt

$$\int_\infty d^3r\ f(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi\ rf(r,\varphi,z)$$

D.4.2 Kugelkoordinaten



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi\left[\vartheta(-x) + 2\vartheta(-y)\vartheta(x)\right] \\ \arccos(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) \end{pmatrix}$$

Dabei ist $\vartheta(x)$ die Heaviside-Funktion. Der Winkel φ soll aus dem Bereich $[0, 2\pi[$ stammen.

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\varphi} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\varphi} & \frac{dy}{d\theta} \\ \frac{dz}{dr} & \frac{dz}{d\varphi} & \frac{dz}{d\theta} \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) & -r\sin(\varphi)\sin(\theta) & r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & r\cos(\varphi)\sin(\theta) & r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 0 & -r\sin(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \cos(\varphi)\sin(\theta)\left[-r^2\cos(\varphi)\sin^2(\theta)\right] - r\sin(\varphi)\sin(\theta)\underbrace{\left[r\sin(\varphi)\cos^2(\theta) + r\sin(\varphi)\sin^2(\theta)\right]}_{=r\sin(\varphi)} \\ &\quad + r\cos(\varphi)\cos(\theta)\left[-r\cos(\varphi)\cos(\theta)\sin(\theta)\right] \\ &= r^2\sin(\theta)\left[-\cos^2(\varphi)\sin^2(\theta) - \sin^2(\varphi) - \cos^2(\varphi)\cos^2(\theta)\right] \\ &= -r^2\sin(\theta) \end{aligned}$$

Das heißt

$$\int_\infty d^3r\ f(\vec{r}) = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta\ r^2\sin(\theta) f(r,\varphi,\theta)$$

D.5 Matrizen

Einen kompakten Abriss der Matrizenrechnung findet man im Bronstein[5] im Kapitel über Lineare Algebra.

Matrizen sind lineare Abbildungen von Vektoren. Eine Vektorfunktion $\vec{f}(\vec{r})$ bildet einen Vektor $\vec{r}$ auf einen neuen Vektor $\vec{r'}$ ab

$$\vec{r'} = \vec{f}(\vec{r}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, x_2) \\ x_2' &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Ist die Funktion $\vec{f}(\vec{r})$ linear, dann hat sie die Form

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2) &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ f_y(x_1,x_2) &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \end{aligned}$$

Wir schreiben die resultierende Abbildung in der Form

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix } \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{r'} = \boldsymbol{A}\vec{r} \qquad \Leftrightarrow \qquad r'_i = \sum_j A_{i,j} r_j$$

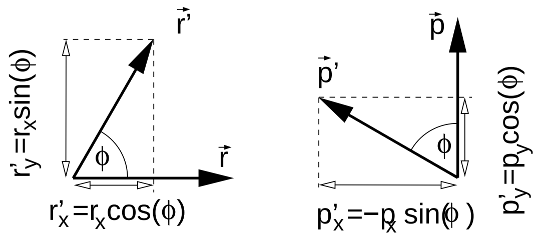
wobei die Konstanten $A_{i,j}$ in einer Matrix $\boldsymbol{A}$ zusammengefasst wurden. Wir nennen die Konstanten $A_{i,j}$ die Matrixelemente.[2] Die Matrixelemente $A_{i,j}$ können auch als $(\boldsymbol{A})_{i,j}$ geschrieben werden, was zum Beispiel nützlich sein wird, um die Elemente einer inversen Matrix, die wir noch kennen lernen, als $(\boldsymbol{A}^{-1})_{i,j}$ darstellen zu können.

Eine Matrix is also ganz allgemein eine zweidimensionale Anordnung von Zahlen.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}$$

Beispiel: Ein Beispiel einer linearen Abbildung ist eine Drehung in einer Ebene

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi)x - \sin(\phi)y \\ \sin(\phi)x + \cos(\phi)y \end{pmatrix}$$



Es wird die symbolische Notation

$$\vec{r'} = \boldsymbol{A}\vec{r} \qquad \Leftrightarrow \qquad r'_i = \sum_j A_{i,j} r_j$$

eingeführt.

Eine Matrix ist allgemein eine 2-dimensionale Anordnung von Zahlen. Die obige Matrix hat m Zeilen und n Spalten. Man spricht daher von einer $m \times n$ Matrix. Ist die Anzahl der Zeilen und Spalten identisch, nennt man die Matrix quadratisch. In diesem Fall nennt man $m = n$ die Dimension der Matrix, da sie eine Abbildung im $m = n$-dimensionalen Raum beschreibt. Ist die Anzahl der Zeilen und Spalten nicht identisch, dann bildet die Matrix einen n-dimensionalen Vektor auf einen m-dimensionalen Vektor ab. Das heißt, die Abbildung ist $R^n \to R^m$.

Ein Vektor kann als Spezialfall einer Matrix aufgefasst werden. Ein Vektor ist eine $n \times 1$ oder eine $1 \times m$ Matrix. Wenden wir eine $1 \times m$ Matrix auf einen m-dimensionalen Vektor an, dann erhalten wir einen Skalar. Dies ist das altbekannte Skalarprodukt zwischen Vektoren.

[2] Der Name Matrixlelemente hat nicht mit dem ähnlichen Ausdruck "x ist element von y" aus der Mengenlehre zu tun. Beide leiten sich unabhängig aus dem Begriff "elementar" ab.

Rechenregeln

- Identität: Zwei Matrizen sind identisch wenn alle ihre Elemente paarweise identisch sind

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \qquad :\Leftrightarrow \qquad A_{i,j} = B_{i,j} \quad \forall_{i,j}$$

- Multiplikation mit einem Skalar:

$$c\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} cA_{1,1} & cA_{1,2} & \dots \\ cA_{2,1} & cA_{2,2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \qquad :\Leftrightarrow \qquad (c\boldsymbol{A})_{i,j} = cA_{i,j}$$

- Addition Alle Komponenten werde Position für Position addiert

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} A_{1,1} + B_{1,2} & A_{1,2} + B_{1,2} & \dots \\ A_{2,1} + B_{2,1} & A_{2,2} + B_{2,2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \qquad :\Leftrightarrow \qquad (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$$

  Für die Addition von Matrizen gilt

  - Kommutativgesetz $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$
  - Assoziativgesetz $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$

D.5.1 Matrizenmultiplikation

Stellen wir uns zwei Transformationen vor, die hintereinander ausgeführt werden:

$$\vec{r''} = \boldsymbol{A}\vec{r'} \qquad \vec{r'} = \boldsymbol{B}\vec{r} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r''} = \boldsymbol{AB}\vec{r}$$

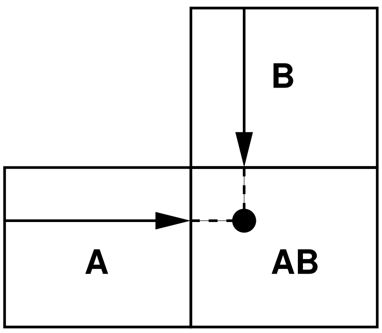
$$r''_i = \sum_k A_{i,k} r'_k \qquad r'_k = \sum_j B_{k,j} r_j \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r''} = \sum_j \left(\sum_k A_{i,k} B_{k,j} \right) r_j$$

Damit erhalten wir die Regel der Matrizenmultiplikation

$$(\boldsymbol{AB})_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k A_{i,k} B_{k,j}$$

Wir verwenden das **Falksche Schema**, das wir anhand von zweidimensionalen Matrizen illustrieren

FALKSCHES SCHEMA ZUR MATRIZENMULTIPLIKATION



Beispiel:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \end{array}$$

Für die Multiplikation von Matrizen gilt

- **Assoziativgesetz**: $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$

- **Distributivgesetz**: $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$ und $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$
- Es gilt aber **kein Kommutativgesetz**. Im Allgemeinen ist also $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$
- Es gibt eine **Einheitsmatrix 1** so dass

$$\boldsymbol{A1} = \boldsymbol{1A} = \boldsymbol{A}$$

Die Einheitsmatrix hat die Form

$$\boldsymbol{1} = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\ldots \\ 0\,1\,0\ldots \\ 0\,0\,1\ldots \\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \ldots \end{pmatrix} \qquad (\boldsymbol{1})_{i,j} = \delta_{i,j}$$

Dabei ist

$$\delta_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$$

das **Kroneckersymbol**.

D.5.2 Definitionen

- Die **Spur** einer Matrix ist die Summe ihrer Diagonalelemente, $Sp[\boldsymbol{A}] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i A_{i,i}$.
- Die **Inverse** $\boldsymbol{A}^{-1}$ erfüllt die Gleichung $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{1}$
- die **komplex konjugierte** Matrix $\boldsymbol{A}^*$ erhält man durch komplexe Konjugation aller Elemente.
- Die **Transponierte** einer Matrix erhält man durch Vertauschen der Indizes $A^\top_{i,j} = A_{j,i}$
- eine Matrix heißt **symmetrisch**, wenn $A_{i,j} = A_{j,i}$, bzw. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\top$.
- Die **hermitesch Konjugierte** oder die **Adjungierte** einer Matrix erhält man durch transponieren und komplex konjugieren $A^\dagger_{i,j} = A^*_{j,i}$.
- Eine Matrix heißt **hermitesch** oder **selbstadjungiert**, wenn sie identisch mit ihrer hermitesch Konjugierten ist $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\dagger$
- Eine Matrix $\boldsymbol{A}$ heißt **unitär**, wenn die Inverse gleich der hermitesch Konjugierten ist, d.h. $\boldsymbol{AA}^\dagger = \boldsymbol{1}$. Unitäre Matrizen sind verallgemeinerte Drehmatrizen.

D.5.3 Operationen zweidimensionaler Matrizen im Überblick

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{D.2}$$

$$\det[\boldsymbol{A}] = ad - bc \tag{D.3}$$

$$\mathrm{Sp}[\boldsymbol{A}] = a + d \tag{D.4}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{D.5}$$

$$\boldsymbol{A}^\top = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \tag{D.6}$$

$$\boldsymbol{A}^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \tag{D.7}$$

D.5.4 Determinanten

Betrachtet man eine Matrix als Satz von Vektoren so lässt sich die Determinante als das Volumen beschreiben, das von den Vektoren aufgespannt wird. Im N-dimensionalen Raum handelt es sich um ein N-dimensionales Volumen.

Folgende Gleichungen werden später nützlich sein:

$$\det[e^{\boldsymbol{A}}] = e^{\mathrm{Sp}[\boldsymbol{A}]} \qquad \text{Schiff, } \textit{Quantum mechanics} \text{ (1968)} \tag{D.8}$$

$$\det[\boldsymbol{AB}] = \det[\boldsymbol{A}]\det[\boldsymbol{B}] \qquad \text{für rechteckige Matrizen} \tag{D.9}$$

Vollständig antisymmetrischer Tensor

Die determinante $\det A$ einer Matrix $\boldsymbol{A}$ kann mit Hilfe des vollstaendig antisymetrischen $\epsilon_{i,j,k,l,\ldots}$ ausgedrueckt werden.

$$\det[\boldsymbol{A}] = \sum_{i_1,i_2,i_3,\ldots,i_N} = \sum_{i_1,\ldots,i_N=1}^{N} \epsilon_{i_1,\ldots,i_N} A_{1,i_1} A_{2,i_2} \cdots A_{N,i_N} \tag{D.10}$$

Ableitung einer Determinante

$$\frac{d}{dt}\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A})\,\mathrm{Sp}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right) \tag{D.11}$$

Beweis: Zuerst zeige ich

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\det(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{B}t) = \mathrm{Sp}(\boldsymbol{B}) \tag{D.12}$$

Gl. D.10

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\det[\boldsymbol{1}+\boldsymbol{M}t] &= \sum_{i_1,\ldots,i_N=1}^{N} \epsilon_{i_1,\ldots,i_N}\left(M_{1,i_1}\delta_{2,i_2}\cdots\delta_{N,i_N} + \delta_{1,i_1}M_{2,i_2}\cdots\delta_{N,i_N} + \ldots + \delta_{1,i_1}\delta_{2,i_2}\cdots M_{N,i_N}\right)\\
&= \left(\sum_{i_1}\epsilon_{i_1,2,\ldots,N}M_{1,i_1} + \sum_{i_2=1}^{N}\epsilon_{1,i_2,\ldots,N}M_{2,i_2} + \ldots + \sum_{i_N}\epsilon_{1,2,\ldots,i_N}M_{N,i_N}\right)\\
&= \Big(M_{1,1} + M_{2,2} + \ldots + M_{N,N}\Big) = Sp(\boldsymbol{M})
\end{aligned} \tag{D.13}$$

With this we consider the desired derivative

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\det(\boldsymbol{A}(t)) &= \lim_{h\to 0}\frac{\det\Big(\boldsymbol{A}(t+h)\Big) - \det\Big(\boldsymbol{A}(t)\Big)}{h}\\
&= \det\Big(\boldsymbol{A}\Big)\lim_{h\to 0}\frac{\det\Big(\boldsymbol{A}(t)\Big)^{-1}\det\Big(\boldsymbol{A}(t+h)\Big) - 1}{h}\\
&= \det\Big(\boldsymbol{A}\Big)\lim_{h\to 0}\frac{\det\Big(\boldsymbol{A}^{-1}(t)\boldsymbol{A}(t+h)\Big) - 1}{h}\\
&= \det\Big(\boldsymbol{A}\Big)\lim_{h\to 0}\frac{\det\Big(\boldsymbol{A}^{-1}(t)\Big(\boldsymbol{A}(t) + h\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt}\Big) - 1}{h}\\
&= \det\Big(\boldsymbol{A}\Big)\lim_{h\to 0}\frac{\det\Big(1 + \boldsymbol{A}^{-1}(t)\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt}h\Big) - 1}{h}\\
&= \det\Big(\boldsymbol{A}\Big)Sp\left(\boldsymbol{A}^{-1}(t)\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt}\right)
\end{aligned} \tag{D.14}$$

D.5.5 Diagonalisieren einer Matrix

Dieses Kapitel ist noch eine Baustelle!

Die Lektüre des entsprechenden Kapitels in den *Numerical Recipes*[28] wird empfohlen.

Wir nennen die Gleichung

$$\boldsymbol{A}\vec{c} = \lambda\vec{c} \tag{D.15}$$

rechtsseitige Eigenwertgleichung für $\boldsymbol{A}$. Dabei ist λ ein Eigenwert und $\vec{c}$ ein Eigenvektor.

Die Gleichung

$$\vec{d}\boldsymbol{A} = \lambda\vec{d} \tag{D.16}$$

wird **linksseitige** Eigenwertgleichung genannt.

Die Eigenwerte der links- und der rechtshändigen Eigenwertgleichung sind identisch. Die Eigenvektoren erfüllen die folgende Biorthogonalitätsbeziehung $\vec{d}_i\vec{c}_j = 0$ für $i \neq j$.

Eine Matrix $\boldsymbol{A}$ zu diagonalisieren bedeutet, die Eigenwerte λ_i und die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{c}_i$ zu bestimmen, sodass

$$\boldsymbol{A}\vec{c}_i = \lambda_i\vec{c}_i \tag{D.17}$$

Dieselbe Gleichung kann man auch anders, nämlich als reine Matrizengleichung, schreiben: dazu bilden wir die Matrix $\boldsymbol{C}$ mit den Elementen $C_{i,j} = c_{i,j}$, die aus den Eigenvektoren aufgebaut ist. Sind die Eigenvektoren orthonormal, ist die Matrix $\boldsymbol{C}$ unitär. Aus den Eigenwerten bilden wir die Diagonalmatrix $\boldsymbol{\Lambda}$ mit den Elementen $\Lambda_{i,j} = \lambda_i\delta_{i,j}$. Dann erhalten wir aus der obigen Gleichung die folgende

$$\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{C\Lambda} \tag{D.18}$$

Beachte, dass die Matrizen nicht vertauscht werden dürfen.

Speziell für hermitesche Matrizen gilt:

- Die Eigenwerte sind reell.
- Links- und rechtsseitige Eigenvektoren sind identisch.
- Die Eigenvektoren sind orthogonal, wenn die Eigenwerte unterschiedlich sind. Sie sind orthogonalisierbar, wenn die Eigenwerte identisch sind.

Um eine hermitesche Matrix zu diagonalisieren, gehen wir wie folgt vor:

- Zunächst bestimmen wir die Nullstellen des **charakteristischen Polynoms**

  $$f(\lambda) = \det[\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{1}] = 0 \; .$$

  Die Nullstellen λ_i sind die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$. Das Auffinden der Nullstellen stellt das größte Problem dar und ist nicht mehr trivial, wenn die Dimension der Matrix größer als zwei ist.
- Danach bestimmen wir für jeden Eigenwert den dazugehörigen **Eigenvektor** $\vec{c}_i$. Für jeden Index i gibt es einen Eigenvektor.

  $$\Big[\boldsymbol{A} - \lambda_i\boldsymbol{1}]\vec{c}_i = 0$$
- Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind immer orthogonal. Eigenvektoren zu gleichen Eigenwerten muessen explizit orthonormiert werden.

Beispiel:

- Eigenwerte

$$
\begin{aligned}
0 &= \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc \\
\Rightarrow (\lambda - \frac{a+d}{2})^2 &= \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - ad - bc \\
\lambda_\pm &= \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - (ad-bc)} \\
&= \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc}
\end{aligned}
$$

D.5.6 Funktionen von Matrizen

FUNKTION EINER MATRIX

Die Funktion einer Matrix ist durch ihre Potenzreihenentwicklung definiert.

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad \Rightarrow \qquad f(\boldsymbol{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \boldsymbol{A}^n
$$

Damit lässt sich das Bilden einer Funktion auf Matrizenmultiplikationen zurückführen. (Eine Potenz ist wie gehabt durch wiederholtes Multiplizieren der Matrix definiert.)

Aus der oben angegebenen Definition folgt, dass die Funktion einer Diagonalmatrix wiederum eine Diagonalmatrix ist, welche auf der Hauptdiagonalen die Funktionswerte für die entsprechenden Diagonalelemente des Arguments besitzt.

$$
\boldsymbol{A} \hat{=} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A_{22} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad f(\boldsymbol{A}) \hat{=} \begin{pmatrix} f(A_{11}) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & f(A_{22}) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & f(A_{33}) & \dots \\ \vdots & \vdots & & \end{pmatrix}
$$

Wichtig ist dass eine Potenzreihe häufig einen begrenzten Konvergenzradius besitzt. Liegt auch nur ein Eigenwert des Arguments außerhalb des Konvergenzradius, ist das Resultat ungültig.

D.5.7 Das Kronecker-Symbol

Das Kronecker Symbol beschreibt die Elemente einer Einheitsmatrix.

Definition D.1 *KRONECKER-SYMBOL*

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \tag{D.19}$$

`Editor: Das Kronecker Symbol wird auch im Kapitel über Matrizen definiert. Es soll hier stehen um das Thema spezielle Matrizen zu vervollständigen.`

D.5.8 Das Levi-Civita-Symbol.. ...oder der vollständig antisymmetrische Tensor

Das Levi-Civita-Symbol[3] wird für die Berechnung einer Determinante oder der Darstellung des Kreuzprodukts zwischen Vektoren benötigt. Das Levi-Civita Symbol wird oft auch der vollständig antisymmetrische Tensor oder auch einfach der ε-Tensor genannt.

Definition D.2 *DAS LEVI-CIVITA-SYMBOL*

ist ein Tensor ε mit n Indizes $i_1, \ldots i_n$, welche die Werte $1, 2, \ldots, n$ annehmen können. Für diese gilt:

1. $\varepsilon_{1,2,3,\ldots,n} = 1$
2. *ε ändert sein Vorzeichen bei Vertauschung von zwei Indizes.*

Aus der Definition folgt unmittelbar, dass $\varepsilon_{i,j,k} = 0$, falls zwei der drei Indizes gleich sind.

Für die praktische Anwendung in drei Dimensionen , d.h. $n = 3$, ist der Begriff der **zyklische Reihenfolge** der Indizes nützlich. Dazu schreibt man die Indizes in einer unendlichen Kette. Steigen die Zahlen nach rechts an, wie in $\ldots 123 \ldots$ ist die zyklische Reihenfolge positiv. Fällt sie, wie in $\ldots 321 \ldots$, ab, ist sie negativ.

Jede einfache Vertauschung von zwei Zahlen aus der Reihe 123 ändert die zyklische Reihenfolge:

$$123 \xrightarrow{\text{Vertauschen von 1,2 liefert}} 213 \xrightarrow{\text{aus der Reihe:}} \ldots 21321\underleftarrow{321}\underleftarrow{321}\underleftarrow{321}321\ldots$$

$$123 \xrightarrow{\text{Vertauschen von 2,3 liefert}} 132 \xrightarrow{\text{aus der Reihe:}} \ldots 1321\underleftarrow{321}\underleftarrow{321}\underleftarrow{321}3212\ldots$$

$$123 \xrightarrow{\text{Vertauschen von 1,3 liefert}} 321 \xrightarrow{\text{aus der Reihe:}} \ldots 321321\underleftarrow{321}\underleftarrow{321}\underleftarrow{321}32\ldots$$

Sind alle drei Indizes unterschiedlich, ergibt sich aus der zyklischen Reihenfolge direkt der Wert des Wert des Levi-Civita-Symbols:

- positive zyklische Reihenfolge:

$$\epsilon_{1,2,3} = \epsilon_{3,1,2} = \epsilon_{2,3,1} = 1$$

- negative zyklische Reihenfolge:

$$\epsilon_{3,2,1} = \epsilon_{1,3,2} = \epsilon_{2,1,3} = -1$$

[3] Tullio Levi-Civita, 1873-1941, Professor für Mechanik in Rom.

- Alle 21 weiteren Elemente des Levi-Civita-Symbols verschwinden, weil mindestens zwei Indizes identisch sind

Ferner gilt folgender Zusammenhang zwischen dem dem Kreuzprodukt und dem Levi-Civita-Symbol:

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} a_j b_k \tag{D.20}$$

Auch die Determinante einer Matrix **A** lässt sich nun in der Indexschreibweise einigermaßen ökonomisch hinschreiben:

$$\det |\mathbf{A}| = \sum_{i_1,\dots,i_n} \varepsilon_{i_1,\dots,i_n} A_{1,i_1} A_{2,i_2} \dots A_{n,i_n}$$

In Analogie zum Kreuzprodukt kann man das Levi-Civita-Symbol auch verwenden, um einen Normalenvektor auf einer n-dimensionalen Hyperfläche in einem d-dimensionalen Raum zu finden.

Rechenregeln

Kontraktion des Levi-Civita-Symbols

$$\sum_i \epsilon_{i,j,k} \epsilon_{i,l,m} = \delta_{j,l} \delta_{k,m} - \delta_{j,m} \delta_{k,l} \tag{D.21}$$

Beweis:
Wir wählen ein beliebiges Paar von Indizes j, k aus.

- Wir betrachten zwei unterschiedliche Indizes $j \neq k$: Aus der Summe über den Index i trägt nur ein einziges Element bei, für das $i \neq j \quad \wedge \quad i \neq k$. Da die Indizes l, m auch unterschiedlich von i sein müssen, gilt also entweder $(l, m) = (j, k)$ oder $(l, m) = (k, j)$. Im ersten Fall $(l, m) = (j, k)$ sind die Indizes beider Tensoren entweder beide zyklisch oder beide antizyklisch und das Resultat ist in beiden Fällen 1. Im zweiten Fall $(l, m) = (k, j)$ ist ein Tensor zyklisch un der andere ist antizyklisch, sodass das Resultat -1 ist. Dies ist genau durch die rechte Seite wiedergegeben.

  Beispiel:

$$j = 1 \quad \wedge \quad k = 2 \quad \rightarrow \quad i = 3 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} l = 1 \quad \wedge \quad m = 2 \\ l = 2 \quad \wedge \quad m = 1 \end{cases}$$

$$j = 2 \quad \wedge \quad k = 1 \quad \rightarrow \quad i = 3 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} l = 1 \quad \wedge \quad m = 2 \\ l = 2 \quad \wedge \quad m = 1 \end{cases}$$

  Das liest sich wie folgt: Wir wählen die Werte $1, 2$ für die letzten beiden Indizes j, k des ersten Levi-Civita Symbols $\epsilon_{i,j,k}$. Das erste Levi-Civita Symbol $\epsilon_{i,j,k}$ trägt nur bei, wenn der Index i den Wert 3 hat. Damit kennen wir auch den ersten Index des zweiten Levi-Civita Symbols $\epsilon_{i,l,m}$. Da das Levi-Civita Symbols nur dann nicht verschwindet, wenn alle Indizes unterschiedlich sind, gibt es für die letzten beiden Indizes von $\epsilon_{i,l,m}$ nur die Möglichkeiten $(l, m) = (1, 2)$ oder $(l, m) = (2, 1)$. Für jeden dieser Fälle lässt sich die Gleichung leicht überprüfen. Aus die selbe Weise können wir auch die anderen Fälle systematisch durchprobieren, von denen oben nur die ersten zwei aufgeführt sind.

- Nun betrachten wir den Fall identischer Indizes $j = k$: Es ist offensichtlich, dass die linke Seite der Gleichung verschwindet. Ersetzen wir auf der rechten Seite k durch j, dann erhalten wir $\delta_{j,l} \delta_{j,m} - \delta_{j,m} \delta_{j,l} = 0$. Beide Terme heben sich weg. Die rechte Seite verschwindet also auch.

Dies beweist die obige Identität. *q.e.d.*

Doppeltes Kreuzprodukt

Die folgende Gleichung gilt für das doppelte Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) \tag{D.22}$$

Wir drücken das Kreuzprodukt durch das Levi-Civita-Symbol aus

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}\right)_i &= \sum_{jklm} \epsilon_{i,j,k}\epsilon_{k,l,m} a_j b_l c_m \\
&\overset{zykl.Vert.}{=} \sum_{jklm} \epsilon_{k,i,j}\epsilon_{k,l,m} a_j b_l c_m \\
&\overset{Gl.\ D.21}{=} \sum_{jlm} \left(\delta_{i,l}\delta_{j,m} - \delta_{i,m}\delta_{j,l}\right) a_j b_l c_m \\
&= \sum_{jlm} \delta_{i,l}\delta_{j,m} a_j b_l c_m - \sum_{jlm} \delta_{i,m}\delta_{j,l} a_j b_l c_m \\
&= \sum_{j} a_j b_i c_j - \sum_{j} a_j b_j c_i \\
&= b_i \sum_{j} a_j c_j - c_i \sum_{j} a_j b_j \\
&= b_i(\vec{a}\vec{c}) - c_i(\vec{a}\vec{b})
\end{aligned}$$

Eine im Skript verwendete Ableitung

Wir wollen zeigen, dass für eine unitäre Matrix $\boldsymbol{U}$ der folgende Zusammenhang gilt

$$\boldsymbol{U}(\vec{\omega}\times\vec{L}) = (\boldsymbol{U}\times\vec{\omega})\times(\boldsymbol{U}\times\vec{L}) \tag{D.23}$$

Editor: Bisher ist das noch eine Beweisskizze und nicht korrigiert!

Zunächst zeigen wir, dass

$$\epsilon_{i,j,k} = \sum_{l,m,n}\epsilon_{l,m,n}U_{i,l}U_{j,m}U_{k,m} \tag{D.24}$$

Das Levi-Civita Symbol $\epsilon_{i,j,k}$ ist dadurch definiert, dass es (1) bei Vertauschung von zwei beliebigen Indizes sein Vorzeichen ändert und (2), dass $\epsilon_{1,2,3}=1$ ist.

1. Wir zeigen die erste Bedingung für $Q_{i,j,k}\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{l,m,n}\epsilon_{l,m,n}U_{i,l}U_{j,m}U_{k,n}$

$$\begin{aligned}Q_{i,j,k} &= \sum_{l,m,n}\epsilon_{l,m,n}U_{i,l}U_{j,m}U_{k,n} \stackrel{a}{=} \sum_{l,m,n}\epsilon_{l,m,n}U_{i,l}U_{k,n}U_{j,m}\\ &\stackrel{b}{=} \sum_{l,m,n}\epsilon_{l,n,m}U_{i,l}U_{k,m}U_{j,n} \stackrel{c}{=} -\sum_{l,m,n}\epsilon_{l,m,n}U_{i,l}U_{k,m}U_{j,n} = -Q_{i,k,j}\end{aligned}$$

   (a) Vertauschen der letzten beiden Glieder (b) umbenennen von $m\leftrightarrow n$ (c) Vertauschen der Indizes von $\epsilon_{l,m,n}$

2. Die zweite Bedingung folgt daraus, dass eine unitäre Matrix aus drei orthonormierten Vektoren $\boldsymbol{U}=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ dargestellt werden kann.

$$Q_{1,2,3} = \sum_{l,m,n}\epsilon_{l,m,n}U_{1,l}U_{2,m}U_{3,n} = \sum_{l,m,n}\epsilon_{l,m,n}a_l b_m c_n = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = 1$$

   Im letzten Schritt haben wir die Orthonormalbedingung verwendet.

Damit haben wir Gl. D.24 bewiesen.

$$\begin{aligned}
\Big(\boldsymbol{U}(\vec{\omega}\times\vec{L})\Big)_i &= \sum_{l,m,n}U_{i,l}\epsilon_{l,m,n}\omega_m L_n\\
&= \sum_{l,m,n}U_{i,l}\epsilon_{l,m,n}\overbrace{\sum_o\underbrace{\sum_j U_{j,m}U_{j,o}}_{\delta_{m,j}}\omega_o}^{\omega_m}\overbrace{\sum_p\underbrace{\sum_k U_{k,n}U_{k,p}}_{\delta_{n,p}}L_p}^{L_n}\\
&= \sum_{l,m,n}U_{i,l}\epsilon_{l,m,n}\sum_j U_{j,m}\underbrace{\left(\sum_o U_{j,o}\omega_o\right)}_{=\bar{\omega}_j}\sum_k U_{k,n}\underbrace{\left(\sum_p U_{k,p}L_p\right)}_{=\bar{L}_k}\\
&= \sum_{j,k}\underbrace{\left(\sum_{l,m,n}\epsilon_{l,m,n}U_{i,l}U_{j,m}U_{k,n}\right)}_{\epsilon_{i,j,k}}\bar{\omega}_j\bar{L}_k\\
&\stackrel{Gl.\ D.24}{=} \sum_{j,k}\epsilon_{i,j,k}\bar{\omega}_j\bar{L}_k\\
&= \sum_{j,k}\epsilon_{i,j,k}\underbrace{\sum_m U_{j,m}\omega_m}_{\bar{\omega}_j}\underbrace{\sum_n U_{k,n}L_n}_{\bar{L}_k}\\
&= \Big((\boldsymbol{U}\vec{\omega})\times(\boldsymbol{U}\vec{L})\Big)_i
\end{aligned}$$

Damit haben wir Gl. D.23 bewiesen.

Die geometrische Bedeutung des Levi-Civita-Symbols

Das Volumen eines Parallelepipeds in d Dimensionen, das von d Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots$ aufgespannt wird, ist

$$V = \sum_{i,j,k,\ldots}^{d} \epsilon_{i,j,k,\ldots} u_i v_j w_k \cdots$$

Der Vektor $\vec{A}$ in d Dimensionen, der durch

$$A_i = \sum_{i,j,k,\ldots}^{d} \epsilon_{i,j,k,\ldots} v_j w_k \cdots$$

gegeben ist, steht senkrecht auf den Vektoren $\vec{v}, \vec{w}, \ldots$. Sein Betrag ist gleich dem $d-1$ dimensionalen Hyperflächenelement, das von den Vektoren aufgespannt ist. Beachte, dass eine Hyperfläche in 4 Dimensionen einem 3-dimensionalen Volumen entspricht.

D.6 Geometrie

D.6.1 Satz von Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Längenqadrate der beiden Katheten a, b gleich dem Quadrat der Hypothenuse c

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{D.25}$$

Eine Kathete ist eine Seite die dem rechten Winkel anliegt. Eine Hypothenuse liegt dem rechten Winkel gegenüber.

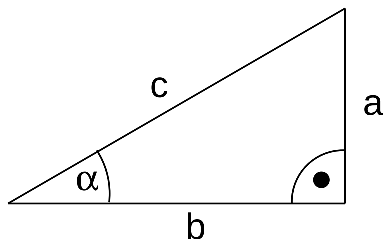


Abb. D.5: Notation für rechtwinklige Dreiecke

D.6.2 Definition der trigonometrischen Funktionen

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Verhältnis aus Gegenkathete zu Hypothenuse gleich dem Sinus des entsprecheden Winkels.

$$sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Verhältnis aus Ankathete zu Hypothenuse gleich dem Kosinus des entsprecheden Winkels.

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

h 

Abb. D.6: Pythagoras von Samos

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Verhältnis aus Gegenkathete zu Ankathete gleich dem Tangens des entsprecheden Winkels.

$$\tan(\alpha) = \frac{b}{a}$$

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Verhältnis aus Ankathete zu Gegenkathete gleich dem Tangens des entsprecheden Winkels.

$$cotan(\alpha) = \frac{a}{b}$$

Eine Kathete ist eine Seite die dem rechten Winkel anliegt. Eine Hypothenuse liegt dem rechten Winkel gegenüber. Dabei ist die Gegenkathete die dem Winkel gegenüberliegende Seite und die Gegenkathete die dem Winkel an.

D.6.3 Ebenengleichung

Eine Ebene ist eindeutig durch einen Aufpunkt $\vec{r}_0$ und einen Normalenvektor $\vec{e}$ bestimmt. Der Normalenvektor bestimmt die Orientierung der Ebene, während der Aufpunkt ihren Ort festlegt. üblicherweise hat der Normalenvektor die Länge 1, d.h.

$$\vec{e}^2 = 1$$

Wir werden diese Konvention im Folgenden voraussetzen.

Um zu bestimmen ob ein Punkt auf einer Ebene liegt oder nicht, bestimmt man zunächst den Abstand eines Punktes $\vec{r}$ von einer Ebene. Der Abstand ist

$$d = (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{e}_z \tag{D.26}$$

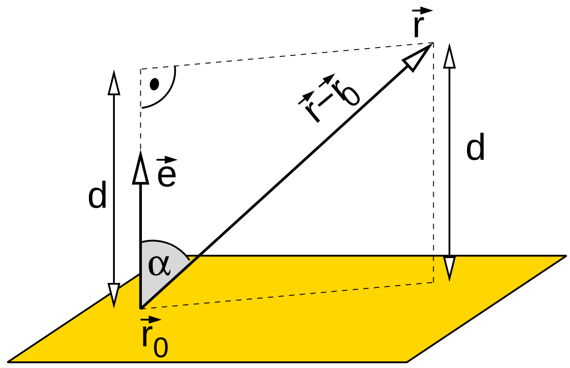
Der Beweis geht wie folgt: Der Wert des Skalarprodukts ist

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{e}_z = \underbrace{|\vec{e}|}_{=1} |\vec{r} - \vec{r}_0| \cos(\alpha) = |\vec{r} - \vec{r}_0| \underbrace{\frac{d}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}}_{\cos(\alpha)} = d$$

Der Winkel α wird vom Normalenvektor und $\vec{r} - \vec{r}_0$ eingeschlossen. Sein Cosinus ist das Verhältnis aus der Länge der Ankathete zu der Länge der Hypothenuse. Es gilt also die Beziehung

$$\cos(\alpha) = \frac{d}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

die wir in dem Beweis von Gl. D.26 verwendet haben



Die Punkte auf der Ebene zeichnen sich offensichtlich dadurch aus, dass sie keinen Abstand von der Ebene haben. Sie und nur sie erfüllen also die **Normalform der Ebenengleichung**

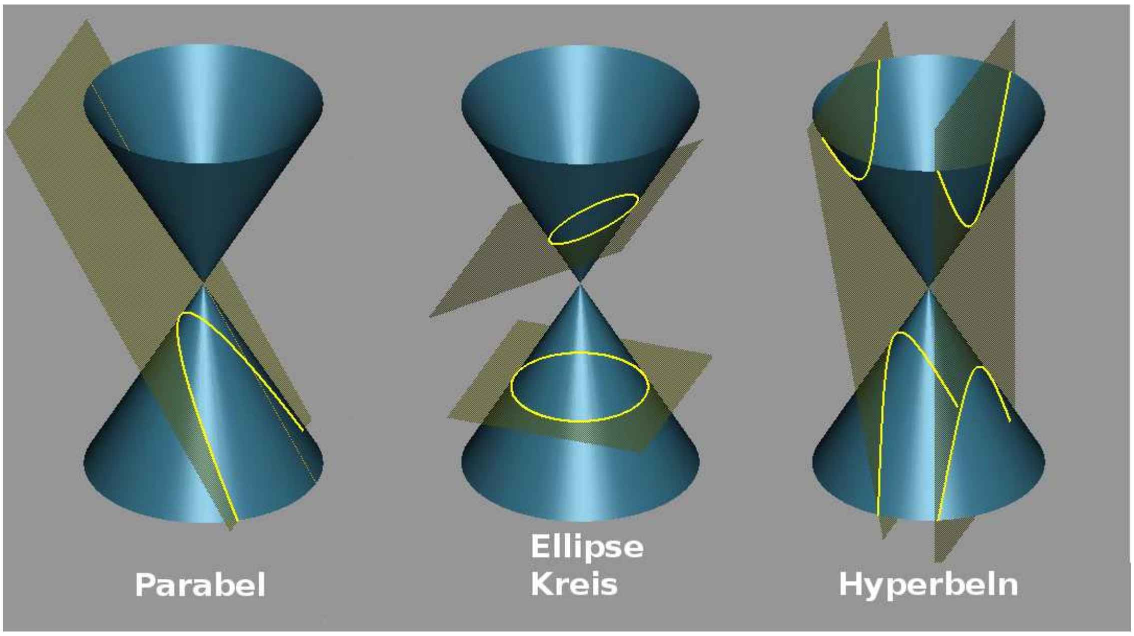
$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{e}_z = 0 \tag{D.27}$$

D.7 Kegelschnitte

`Editor: Dieses Kapitel ist nicht fertig!`

Ein Kegelschnitt ist eine Linie, welche aus dem Schnitt einer Ebene und einem Doppelkegel erzeugt wird.

Zu den Kegelschnitten gehören Kreise, Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln.



D.7.1 Ellipse

Eine Ellipse besteht aus allen Punkten P, für welche die Summe der Abstände zu zwei sogenannten **Brennpunkten** F_1 und F_2 identisch ist.

Dies hat zur Folge, dass ein Lauscher, der sich in einem elliptischen Raum an einem der Brennpunkte befindet, leicht einen Sprecher am anderen Brennpunkt verstehen kann, auch wenn das für andere Lauscher, die sich näher beim Sprecher befinden, nicht der Fall ist. Der Grund dafür ist

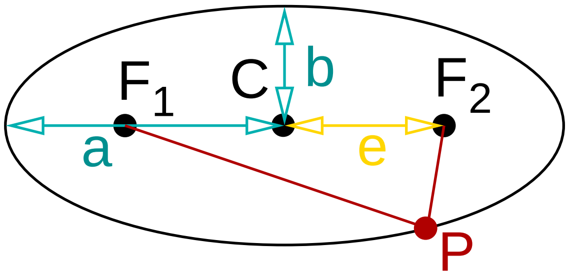


Abb. D.7: Ellipse

dass sich alle Schallwellen die, von der Wand reflektiert werden, am anderen Brennpunkt konstruktiv überlagern.

Eine Ellipse lässt sich leicht zeichnen, indem man an zwei Punkten Nägel einschlägt, dort eine Schnur befestigt. Diese Schnur wird mit einem Bleistift gespannt gehalten. Die moegliche bewegung des Bleistifts ist gerade eine Ellipse.

Die Exzentrizität einer Ellipse ist

$$\varepsilon = \frac{|e|}{a}$$

wobei die Bedeutung von e und a in Abb. D.7 gegeben ist.

D.7.2 Hyperbel

Eine Hyperbel besteht aus allen Punkten P, für welche die Differenz der Abstände zu zwei sogenannten **Brennpunkten** F_1 und F_2 identisch ist.

Die Exzentrizität einer Hyperbel ist größer als eins.

D.7.3 Parabel

Parabeln fokussieren Licht in den Brennpunkt. Dies lässt sich nutzen, um mit einem Parabolspiegel alleine aus Sonnenlicht ein Feuer zu entfachen, Umgekehrt werden Parabolspiegel in Scheinwerfern verwendet, um aus einer punktförmigen Lichtquelle einen parallelen Lichtstrahl zu erzeugen.

D.8 Funktionen

D.8.1 Tabellen

$f(x)$	$\frac{df(x)}{dx}$	$\int dx\ f(x)$	Taylor
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$	
$x^n \quad (n = -1)$	$n x^{n-1}$	$\ln[\lvert x\rvert]$	x^{-1}
e^x	e^x	e^x	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$
$\ln[x]$	$\frac{1}{x}$	$x \ln[x] - x$	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x-1)^n$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)$	$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

include tan, cot, arcus functionnen, hyperboliculs funktionen und arcus hyperbolicus funktionen.

Abbildungen der Funktionen.

D.9 Nullstellen von Polynomen

D.9.1 Quadratisches Gleichung

QUADRATISCHE GLEICHUNG

Eine quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{D.28}$$

hat die Lösungen

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}}_{\sqrt{D}}$$

Die Gleichung kann als Gleichung für reelle Werte von x als auch als komplexe Gleichung aufgefasst werden, wobei dann auch die Koeffizienten a, b, c komplexe Zahlen sein können.

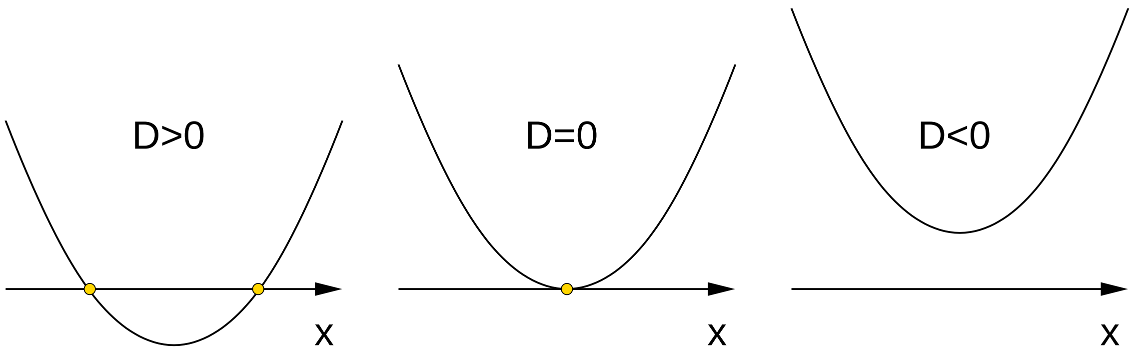
Den Ausdruck in der Wurzel nennt man **Diskriminante**.

$$D = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

Sie legt fest ob es keine, eine oder zwei Lsöungen gibt.

- Für $D < 0$ gibt es keine Lösung ,
- für $D = 0$ gibt es eine Lösung und
- für $D > 0$ gibt es zwei Lösungen. Die beiden Lösungen sind identisch, und die Nullstelle des Polynoms ist gleichzeitig ein Extremum.

Betrachtet man die quadratische Gleichung als komplexe Gleichung mit möglicherweise komplexen Koeffizienten a, b, c, dann gibt es immer zwei Lösungen.



Es ist ratsam sich die Rechenschritte (evtl anstelle der Formel) einzuprägen. Man erhält die Lösung durch **quadratische Ergänzung**:

1. Zunächst bringt man das quadratische Gleichung auf seine **Normalform**

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \tag{D.29}$$

2. dann erfolgt die quadratische Ergänzung

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \tag{D.30}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}x\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \tag{D.31}$$

3. Nun zieht man die Wurzel wodurch zwei Lösungen entstehen

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \tag{D.32}$$

4. und löst nach x auf.

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \tag{D.33}$$

D.9.2 Kubische Gleichung

Die Lösungen der kubische Gleichung

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{D.34}$$

erhält man durch folgende Schritte:

1. Zunächst bring man die kubische Gleichung auf Normalform

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \tag{D.35}$$

2. Eine Variablenverschiebung $x = y - \frac{b}{3a}$ liefert die **reduzierte Form** des Polynoms

$$\begin{aligned}
0 &= x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \\
&= \left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(y - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} \\
&= \left[y^3 - 3\frac{b}{3a}y^2 + 3\left(\frac{b}{3a}\right)^2 y - \left(\frac{b}{3a}\right)^3\right] \\
&\quad + \frac{b}{a}\left[y^2 - 2\frac{b}{3a}y + \left(\frac{b}{3a}\right)^2\right] + \frac{c}{a}\left[y - \frac{b}{3a}\right] + \frac{d}{a} \\
&= y^3 + \underbrace{\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)}_{=p} y + \underbrace{\left(2\left(\frac{b}{3a}\right)^3 - \frac{c}{a}\frac{b}{3a} + \frac{d}{a}\right)}_{=q} \\
&= y^3 + py + q
\end{aligned} \tag{D.36}$$

wobei

$$p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \tag{D.37}$$

$$q \stackrel{\text{def}}{=} 2\left(\frac{b}{3a}\right)^3 - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \tag{D.38}$$

3. Benutze die Cardanischen Formeln, welche unten noch ausführlich hergeleitet werden. Mit der Diskriminante

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \tag{D.39}$$

bestimme

(a) für $D \leq 0$ die drei reellen Lösungen

$$x_k \stackrel{\text{Gl. } D.54}{=} -\frac{b}{3a} + \sqrt{\frac{-4p}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{-q}{2}\left(\frac{-p}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}\right) + \frac{2\pi}{3}k\right) \qquad \text{mit } k \in \{-1, 0, 1\} \tag{D.40}$$

(b) und für $D > 0$ die drei komplexen Lösungen.

$$x_k \stackrel{\text{Gl. } D.57}{=} -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}\, \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}k} + \frac{-p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}}\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}k} \qquad \text{with } k = 0, 1, 2 \tag{D.41}$$

Herleitung der Cardanischen Formeln

Die **Cardanischen Formeln** wurden von Cardano veröffentlicht[a]. Sie wurden bereits früher von Del Ferro [b] gefunden, der den Lösungsweg aber geheim hielt. Ein Schüler del Ferros gab die Gleichung an Cardano weiter.

[a] Gerolamo Cardano (1501-1576) Italienischer Arzt, Philosph und Mathematiker.Komplexe Zahlen gehen auf ihn zurück. Erfand die Kardanische Aufhängung, und gab damit der Kardanwelle ihren Namen. Brüstete sich damit dass er seinen eigenen Tod genau vorhersagen könnte. Als er sich zu diesem Zeitpunkt bester Gesundheit erfreute, tötete er sich selbst, um den Fehler nicht eingestehen zu müssen.

[b] Scipione del Ferro (1465-1526) Italiensischer Mathematiker, Professur für Arithmetik und Geometrie an der Universität Bologna. Del Ferro fand die Lösung der kubischen Gleichung, die später von Gerolamo Cardano in seinem Werk "Ars Magna" veröffentlicht wurden.

Selbstbildnis von Gerolamo Cardano,1501-1576

Der Knackpunkt der Herleitung ist der folgende Zusammenhang

$$\begin{aligned} & y = u + v \\ \Rightarrow\ & y^3 = (u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + 3uv(u+v) + v^3 = u^3 + 3uvy + v^3 \\ \Rightarrow\ & y^3 \underbrace{-3uv}_{p} y \underbrace{-(u^3+v^3)}_{q} = 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist mit Gl. D.36 identisch und gilt für beliebige Werte von u und v, wobei y deren Summe ist. Es gilt also nun, diejenigen Werte von u und v zu finden, welche derjenige reduzierte Form der kubischen Gleichung entspricht, welche man lösen möchte.

Also ist noch das Gleichungssystem

$$-p = 3uv \tag{D.42}$$
$$-q = u^3 + v^3 \tag{D.43}$$

nach u und v aufzulösen, wobei p und q durch Gl. D.37 und Gl. D.38 gegeben sind.

Die erste Gleichung Gl. D.42 liefert

$$v \overset{\text{Gl. } D.42}{=} -\frac{p}{3u} \tag{D.44}$$

was, in die zweite Gleichung Gl. D.43 eingesetzt, den folgenden Zusammenhang liefert

$$-q \overset{Gl.\ D.43, D.44}{=} u^3 - \left(\frac{p}{3u}\right)^3 \qquad \Rightarrow \qquad \left(u^3\right)^2 + q\left(u^3\right) - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \tag{D.45}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für u^3 mit den Lösungen

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \tag{D.46}$$

$$\Rightarrow \qquad u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{D}}; \tag{D.47}$$

wobei die Diskriminante D in Gl. D.39

$$D \overset{\text{Gl. } D.39}{=} \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

als definiert wurde. Da die dritte Wurzel in der komplexen Ebene drei Lösungen hat, gibt es insgesamt sechs unabhängige Lösungen für u.

Da das Gleichungssystem Gl. D.42, D.43 invariant bezüglich einer Vertauschung von u und v ist, erhält man denselben Satz von Lösungen für v. Die Lösungen für u und v dürfen aber nicht beliebig kombiniert werden. Die erlaubten Kombinationen können durch Einsetzen in das Gleichungssystem Gl. D.42, Gl. D.42 bestimmt werden.

Wir machen nun die Fallunterscheidung entsprechend der positiven oder negativen Diskriminante:

- $D \leq 0$: Wir erhalten von Gl. D.46

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm i\sqrt{-D} \tag{D.48}$$

Der Betrag von u ist also

$$|u|^3 = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{-D}\right)^2} \overset{D\leq 0}{=} \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - D} \overset{\text{Gl. } D.39}{=} \sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3}$$

$$\Rightarrow \qquad |u| = \sqrt{\frac{-p}{3}} \tag{D.49}$$

Wegen $D < 0$ muss auch $p < 0$ sein. Mit einem Phasenfaktor $e^{i\phi}$, der noch zu bestimmen ist, gilt also

$$u = \sqrt{\frac{-p}{3}} e^{i\phi} \tag{D.50}$$

Mit Gl. D.44 erhalten wir

$$v \overset{\text{Gl. } D.44}{=} \frac{-p}{3}\frac{u^*}{|u|^2} \overset{\text{Gl. } D.49}{=} u^* \tag{D.51}$$

Dies liefert uns die Lösungen für y

$$y = u + v = 2\mathrm{Re}[u] \overset{\text{Gl. } D.47}{=} 2\mathrm{Re}\left[\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + i\sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3 - \left(\frac{q}{2}\right)^2}}\right] \tag{D.52}$$

wobei die drei unabhängigen dritten Wurzeln in der komplexen Ebene auf drei unterschiedliche Lösungen für u führen.

Um nicht auf komplexe Zahlen zugreifen zu müssen kann man auch die phase ϕ bestimmen und mit dem Absolutbetrag Gl. D.49 kombinieren. Die Phase erhält man durch aus Realteil und Imaginärteil von u^3.

$$\cos(3\phi) = \frac{\mathrm{Re}(u^3)}{|u^3|} = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3}}$$

$$\phi = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{-q}{2}\left(\frac{-p}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}\right) + \frac{2\pi}{3}k \qquad \text{mit } k \in \{-1, 0, 1\} \tag{D.53}$$

Der Arcus Kosinus bestimmt die Phase nur bis auf ein Vorzeichen. Da wir uns in Gl. D.52 auf das positive Vorzeichen der Wurzel festgelegt haben sollte die Phase im Interval $[0, \pi]$ liegen, wo der Sinus positiv ist. Eine Umkehrung des Vorzeichens führt aber zu einem komplex konjugierten Wert von u, der denselben Realwert liefert.

$$y = \sqrt{\frac{-4p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{-q}{2}\left(\frac{-p}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}\right) + \frac{2\pi}{3}k\right) \qquad \text{mit } k \in \{-1, 0, 1\} \tag{D.54}$$

wobei $\theta(x)$ die Heaviside funktion ist. Das ist unser endgültiges Resultat für $D < 0$. Im letzten Schritt haben wir den Absolutbetrag von u übernommen und den Phasenfaktor 3ϕ von $u^3 = cos(3\phi) + i\sin(3\phi)$ bestimmt. Da die Phase 3ϕ nur bis auf ein beliebieges Vielfaches von 2π bestimmt ist, enstehen beim Ziehen der dritten Wurzel drei unterschiedliche Lösungen für $k = 0, 1, 2$.

- $D > 0$: Hier starten wir von $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{D}$. Wegen Gl. D.43 hat die entsprechende Lösung von v^3 das entgegengesetze Vorzeichen vor $\sqrt{D}$. Wegen der Symmetrie bezüglich Vertauschung von u und v, können wir uns auf das positive Vorzeichen vor $\sqrt{D}$ beschränken.

  Die allgemeine Lösung ist

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}\, \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}k} \tag{D.55}$$

  mit $k \in \{-1, 0, 1\}$. Der Faktor vor dem Phasenfaktor ist rein reell.

  Wir bestimmen v aus

$$v \overset{\text{Gl. } D.44}{=} \frac{-p}{3}\frac{u^*}{|u|^2} = \frac{-p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}}\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}k} \tag{D.56}$$

  und erhalten damit drei unabhängige komplexe Lösungen

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}\, \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}k} + \frac{-p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}}\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}k} \qquad \text{with } k = 0, 1, 2 \tag{D.57}$$

  In der Praxis bestimmt man die Phasenfaktoren als

$$\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}k} = \begin{cases} 1 & \text{for } k = 0 \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{for } k = 1 \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{for } k = -1 \end{cases} \tag{D.58}$$

  und kombiniert diese mit den Absolutbeträgen von u und v zum endgültigen Resultat.

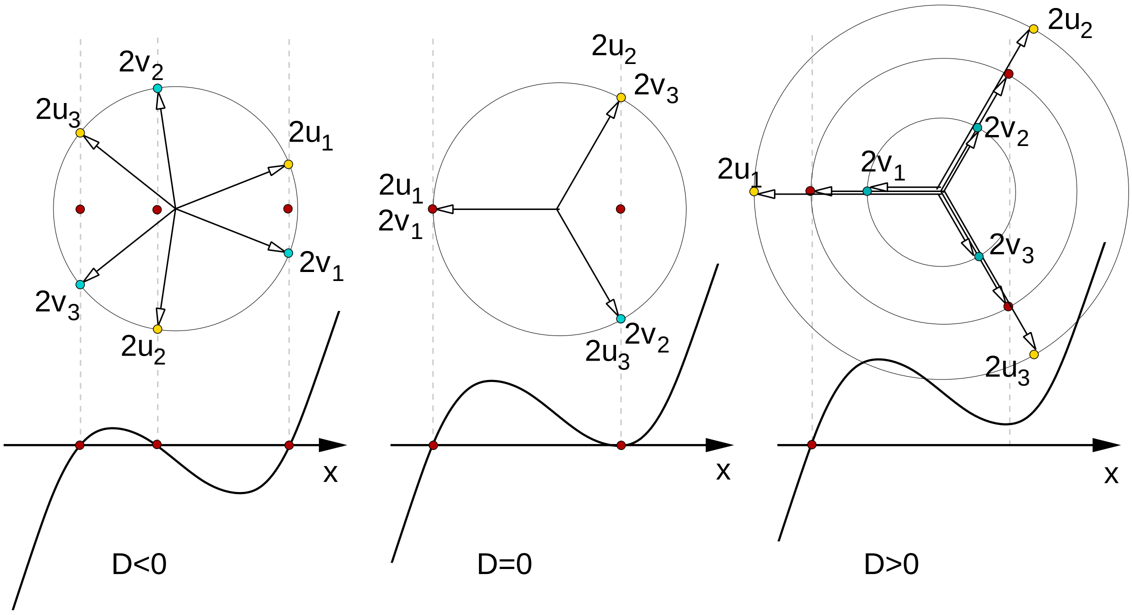


Abb. D.8: Schema für den Lösungsweg der Cardanischen Formeln. Die gezeigten Funktionen zeigen das Polynom eq:cardanoausgangsgleichung und den zusammenhang mit u,v in der komplexen Ebene..

D.9.3 Gleichungen höherer Ordnung

Die Gleichung, welche die Nullstellen eines Polynoms vierter Ordnung festlegt heißt biquadratische Lösung. der Lösungsweg geht auf einen Assistenten Cardano's, Ludovoco Ferrari , zurück.

Für Gleichungen höheren als des vierten Grades sind keine allgemeinen Formeln bekannt.

D.10 Differentialrechnung

Abb. D.9: Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716. Erfinder der Infinitesimalrechnung und des Dualsystems.

Die Ableitung ist über den Differentialquotienten definiert [4]

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta\to 0} \underbrace{\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta}}_{\text{Differentialquotient}}$$

Um die Ableitung eindeutig bilden zu können, muss die Funktion glatt sein, das heißt keine Stufen oder Knicke aufweisen.

Betrachtet man den Graphen einer Funktion, dann entspricht die Ableitung der die Steigung der Tangente.

Editor: Darstellung des Gradienten

D.10.1 Produktregel

$$\frac{d}{dx}\left[u(x)v(x)\right] = \frac{du}{dx}v(x) + u(x)\frac{dv}{dx}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} u(x+\Delta)v(x+\Delta) &= \left(u(x)+\Delta\frac{du}{dx}+O(\Delta^2)\right)\left(v(x)+\Delta\frac{dv}{dx}+O(\Delta^2)\right) \\ &= u(x)v(x)+\Delta\left(\frac{du}{dx}v(x)+u(x)\frac{dv}{dx}\right)+O(\Delta^2) \\ \Rightarrow \frac{u(x+\Delta)v(x+\Delta)-u(x)v(x)}{\Delta} &= \frac{du}{dx}v(x)+u(x)\frac{dv}{dx}+O(\Delta) \end{aligned}$$

D.10.2 Kettenregel

$$\frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) = \left.\frac{df(g)}{dg}\right|_{g(x)} \frac{dg(x)}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

Zur Ableitung der Kettenregel betrachte Abb. D.10.2. Wir beginnen mit zwei benachbarten Punkten x_0 und x_1 auf der x-Achse. Den Abstand der Punkte bezeichnen wir mit Δx.

$$\Delta x \stackrel{\text{def}}{=} x_1 - x_0$$

Der Abstand Δx ist zunächst endlich, aber klein. Später werden wir den Grenzübergang $x_1 \to x_0$, d.h. $\Delta x \to 0$, bilden.

Nun bestimmen wir den Abstand Δg der Funktionswerte der Funktion g. Dabei verwenden wir die Taylor-Entwicklung um den Punkt x_0.

$$\begin{aligned} g_0 &= g(x_0) \\ g_1 &= g(x_1) = g(x_0) + \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x_0} \underbrace{\Delta x}_{x_1-x_0} + O(\Delta x^2) \\ \Delta g = g_1 - g_0 &= \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x_0} \Delta x + O(\Delta x^2) \end{aligned}$$

Verschiebt man also x und einen Betrag Δx, dann verschiebt sich das Resultat $g(x)$ etwa um $\frac{dg}{dx}\Delta x$. Die Ableitung ist also ein Skalierfaktor für die Verschiebung dg in g relativ zur Auslenkung Δx.

[4] Ist $\Delta > 0$ dann ist das folgMende der rechtshändige Differentialquotient. Für $\Delta < 0$ ist es der linkshändige Differentialquotient. Hat die Funktion eine Stufe oder einen Knick, dann sind die beiden Differentialquotienten im Grenzfall ungleich. Ist die Funktion stetig und sind beide Differentialquotienten im Grenzfall gleich, dann nennt man die Funktion differenzierbar.

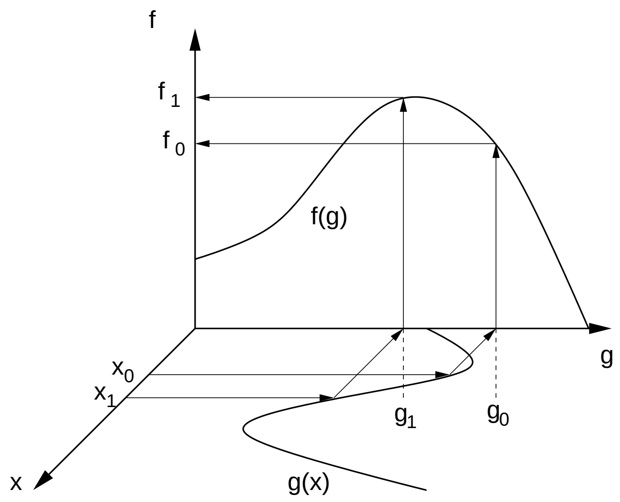


Abb. D.10: Darstellung zur Kettenregel.

Ganz analog kann man nun die Auslenkung der Funktion f bei einer Auslenkung von g als $\Delta f = \frac{df}{dg}\Delta g$. Setzt man Δg ein erhalten wir die Auslenkung von f, nämlich $\Delta f = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}\Delta x$, bei einer Auslenkung von Δx. Es werden also einfach die beiden Skalierfaktoren miteinander multipliziert.

Das wollen wir aber noch explizit ausrechnen

$$
\begin{aligned}
f_0 &= f(g_0) = f(g(x_0)) \\
f_1 &= f(g_1) = f(g_0) + \left.\frac{df}{dg}\right|_{g_0} \underbrace{\Delta g}_{g_1-g_0} + O(\Delta g^2) \\
\Delta f &= f_1 - f_0 = \left.\frac{df}{dg}\right|_{g_0} \Delta g + O(\Delta g^2) \\
&= \left.\frac{df}{dg}\right|_{g(x_0)} \underbrace{\left(\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x_0} \Delta x + O(\Delta x^2) \right)}_{\Delta g} + O(\Delta g^2) \\
&= \left.\frac{df}{dg}\right|_{g(x_0)} \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x_0} \Delta x + \underbrace{\left.\frac{df}{dg}\right|_{g(x_0)} O(\Delta x^2)}_{O(\Delta x^2)} + \underbrace{O(\Delta g^2)}_{O(\Delta x^2)} \\
&= \left.\frac{df}{dg}\right|_{g(x_0)} \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x_0} \Delta x + O(\Delta x^2)
\end{aligned}
$$

Bisher haben wir mit endlichen Auslenkungen gearbeitet. Um die Ableitung zu bilden müssen wir den Differentialquotienten bestimmen und anschließend noch dx verschwinden lassen.

$$
\left.\frac{df(g(x))}{dx}\right|_x = \lim_{dx\to 0} \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \lim_{dx\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \left.\frac{df}{dg}\right|_{g(x_0)} \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x_0}
$$

D.10.3 Quotientenregel

$$
\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{df}{dx}g - f\frac{dg}{dx}}{g^2}
$$

D.10.4 Ableitung der Umkehrfunktion

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$
$$\frac{dg}{dy} = \left(\left.\frac{df}{dx}\right|_{g(y)} \right)^{-1}$$

D.10.5 Aufgaben

Leite die folgenden Funktionen ab:

$$f_1(x) = x^3$$
$$f_2(x) = a + (c + d \cdot x)^3$$
$$f_3(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$
$$f_4(x) = \frac{\sin(x)}{\cos x}$$
$$f_5(x) = (\mathrm{e}^x)^x$$
$$f_6(x) = \ln(2 + 5\cos(2x))$$
$$f_7(x) = e^{\sin(x^2)}$$
$$f_8(x) = 365$$
$$f_9(x) = \ln_{10}(x)$$
$$f_{10}(x) = \ln_x(x^2)$$

Hilfe zu f_5: $a = \mathrm{e}^{\ln(a)}$. Hilfe zu f_9: $a^x = y \Leftrightarrow x = \ln_a(y)$.

D.11 Integralrechnung

D.11.1 Variablentransformation in einer Integration

$$\int_{y(a)}^{y(b)} dy\ f(y) = \int_a^b dx \frac{dy}{dx} f(y(x))$$

Ergibt sich aus der Kettenregel[5].

D.11.2 Partielle Integration

Die Regel für partielle Integration lautet

$$\Rightarrow \int_a^b dx\ u(x)\frac{dv}{dx} = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b dx\ \frac{du}{dx} v(x)$$

[5] siehe Anhang D.10.2

Diese Gleichung ergibt sich einfach aus der Produktregel aus Kapitel D.10.1

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[u(x)v(x)\right] &= \frac{du}{dx}v(x) + u(x)\frac{dv}{dx} \\
\overset{Integr.}{\Rightarrow} \int_a^b dx\, \frac{d}{dx}\left[u(x)v(x)\right] &= \int_a^b dx\, \left(\frac{du}{dx}v(x) + u(x)\frac{dv}{dx}\right) \\
\Rightarrow \left[u(x)v(x)\right]_a^b &= \int_a^b dx\, \frac{du}{dx}v(x) + \int_a^b dx\, u(x)\frac{dv}{dx} \\
\Rightarrow \int_a^b dx\, u(x)\frac{dv}{dx} &= \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b dx\, \frac{du}{dx}v(x)
\end{aligned}
$$

Häufig sieht man die partielle Integration in der folgenden Form, diesmal als unbestimmtes Integral dargestellt.

$$
\begin{aligned}
\int dx\, u(x)\frac{d}{dx}v(x) &= \int dx\, \left\{\frac{d}{dx}\left[u(x)v(x)\right] - v(x)\frac{d}{dx}u(x)\right\} \\
&= u(x)v(x) - \int dx\, dv(x)\frac{d}{dx}u(x)
\end{aligned}
$$

D.11.3 Integrale von ausgewählten Funktionen

D.12 Begriffe zu Differentialgleichungen

Den Modellsystemen können Differentialgleichungen zugeordnet werden, welche die Bahnkurven festlegen. In diesem Kapitel werden wir deshalb auch die wichtigsten Methoden wiederholen, mit denen die Differentialgleichungen gelöst werden können. Die Bewegungsgleichungen für die oben beschriebenen Modellsysteme lassen sich analytisch lösen, weshalb sie eine besondere Rolle spielen. Sie erlauben es, ein "Gefühl" für die Bahnkurven zu entwickeln. Darüber hinaus bilden analytisch lösbare Modellsysteme die Grundlage numerischer Verfahren.

Differentialgleichungen können in bestimmte Klassen eingeteilt werden, zu denen entsprechende Lösungsverfahren zugeordnet sind.

Differentialgleichungen können allgemein als ein Gleichungssystem geschrieben werden, bei dem nicht nur Variablen, sondern auch deren Ableitungen nach einem oder mehreren Parametern eingehen. Eine Differentialgleichung für eine Funktion $f(x,y)$ die von zwei Variablen x und y abhängt, hat zum Beispiel die allgemeine Form

$$
G(x,y,f,\frac{df}{dx},\frac{df}{dy},\frac{d^2f}{dx^2},\frac{d^2f}{dxdy},\ldots) = 0
$$

Diese Differentialgleichungen können zu Differentialgleichungssystemen zusammengefasst werden. Wir sprechen dann von einer mehrdimensionalen Differentialgleichung. Die Funktion $\vec{G}$ wird dann ein Vektor.

Definition D.3 *ORDNUNG EINER DIFFERENTIALGLEICHUNG*
Enthält eine Differentialgleichung n-te Ableitungen der Lösung und keine höheren, dann hat die Differentialgleichung die Ordnung n.

Die Newtonsche Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$ kann in die Form $\vec{G}(t,\vec{r},\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}) = 0$ gebracht werden, wobei $\vec{G} = m\ddot{\vec{r}} - \vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$. Diese Differentialgleichung ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, weil die zweite Ableitung der Positionen nach der Zeit in $\vec{G}$ eingeht.

Eine Differentialgleichung kann immer auf Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt werden. Allerdings vergrößert sich dadurch die Anzahl der Komponenten entsprechend. Zum Beispiel kann die Newtonsche Bewegungsgleichung Gl. 2.2 auch durch zwei Differentialgleichungen erster Ordnung ausgedrückt werden.

$$
\begin{aligned}
m\dot{\vec{v}} &= \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) \\
\dot{\vec{r}} &= \vec{v}
\end{aligned}
$$

Dasselbe Prinzip werden wir bei den **Hamiltonschen Gleichungen** wiederfinden, bei die denen Bewegung durch Differentialgleichungen erster Ordnung in Ort und Impuls dargestellt werden.

Definition D.4 *GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNG*
Eine Differentialgleichung, deren Lösung nur von einer (skalaren) Variablen abhängt, wie zum Beispiel der Zeit, heißt **gewöhnlich**.

Die Newtonsche Bewegungsgleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung, da die Lösung $\vec{r}(t)$ nur von einem Parameter, der Zeit abhängt. In der klassischen Mechanik beschäftigen wir uns hauptsächlich mit gewöhnlichen Differentialgleichungen. Die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist eine Kurve in einem ein- oder mehrdimensionalen Raum.

Definition D.5 *PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNG*
Eine Differentialgleichung, deren Lösung von mehreren Variablen abhängt, heißt **partiell**.

Die Poisson-Gleichung der Elektrostatik ist ein Beispiel einer partiellen Differentialgleichung

$$
\vec{\nabla}^2\Phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon}
$$

Dabei ist $\Phi(\vec{r})$ das elektrostatische Potential, $\rho(\vec{r})$ die Ladungsdichte und ϵ_0 die Dielektrizitätskonstante. Ein weiteres Beispiel ist die Schrödinger Gleichung

$$
i\hbar\partial_t\Psi(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{r})\right)\Psi(\vec{r}, t)
$$

Dabei ist Ψ die Wellenfunktion, d.h. die Wahrscheinlichkeitsamplitude, und V das Potential.

Definition D.6 *LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNG*
Eine Differentialgleichung $\vec{G}(t, \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), \ddot{\vec{r}}(t), \dots) = 0$ heißt **linear**, *wenn $\vec{G}$ eine lineare Funktion der Lösung und seiner Ableitungen erster und höherer Ordnung ist.*
Die allgemeinste Form einer eindimensionalen[a] linearen Differentialgleichung für einen Pfad $x(t)$ ist

$$
\underbrace{a(t) + b(t)x(t) + c(t)\dot{x}(t) + d(t)\ddot{x}(t) + \dots}_{G(t,x(t),\dot{x}(t),\ddot{x}(t),\dots)} = 0
$$

wobei $a(t)$, $b(t)$, … beliebige Funktionen der Zeit sind.

[a]Ein mehrdimensionale Differentialgleichung einer Bahn $\vec{r}(t)$ hat die Form

$$
\underbrace{\vec{a}(t) + \boldsymbol{b}(t)\vec{r}(t) + \boldsymbol{c}(t)\dot{\vec{r}}(t) + \boldsymbol{d}(t)\ddot{\vec{r}}(t) + \dots}_{\vec{G}(t,\vec{r}(t),\dot{\vec{r}}(t),\ddot{\vec{r}}(t),\dots)} = 0
$$

wobei $\boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{c}(t), \dots$ Matrizen sind.

Definition D.7 *HOMOGENE DIFFERENTIALGLEICHUNG*
Eine Differentialgleichung $G(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ldots) = 0$ heißt **homogen***, wenn $\vec{r}(t) = 0$ eine Lösung ist.*

Die allgemeinste Form einer eindimensionalen, gewöhnlichen, linearen, homogenen Differentialgleichung für einen Pfad $x(t)$ ist folgende

$$b(t)x(t) + c(t)\dot{x}(t) + d(t)\ddot{x}(t) + \ldots = 0$$

SUPERPOSITIONSPRINZIP

Für eine lineare, homogene Differentialgleichung gilt das **Superpositionsprinzip**: Sind $\vec{r}_A(t)$ und $\vec{r}_B(t)$ Lösungen einer homogenen Differentialgleichung, dann ist auch

$$\vec{r}_C(t) = A\vec{r}_A(t) + B\vec{r}_B(t)$$

eine Lösung. Dabei sind A und B beliebige Konstanten. Als Spezialfall ist die triviale Lösung $\vec{r} = \vec{0}$ immer eine Lösung einer linearen homogenen DGL.

Definition D.8 *INHOMOGENE DIFFERENTIALGLEICHUNG*
Eine Differentialgleichung heißt **inhomogen***, wenn sie nicht homogen ist.*

Die allgemeinste Form einer inhomogenen Differentialgleichung für einen Pfad $\vec{r}(t)$ ist

$$a(t) + \vec{b}(t)\vec{r}(t) + \vec{c}(t)\dot{\vec{r}}(t) + \vec{d}(t)\ddot{\vec{r}}(t) + \ldots = 0$$

wobei $a(t) \neq 0$ sein muss.

Man nennt die Funktion $a(t)$ die **Inhomogenität**.

LÖSUNGSWEG FÜR EINE INHOMOGENE DIFFERENTIALGLEICHUNG

Man erhält die allgemeine Lösung einer linearen inhomogenen Lösung als Superposition einer speziellen Lösung der inhomogenen DGL und der allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung.

D.12.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung unterscheidet von einer normalen (algebraischen) Gleichung nur dadurch, dass sie Ableitungen einer Funktion enthält. Die Lösung einer Differentialgleichung ist aber keine Zahl mehr, sondern eine Funktion. Eine allgemeine gewöhnliche Differentialgleichung hat die Form

$$F(y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \ldots) = 0$$

Die Funktion F kann irgendeine Funktion ihrer Argumente sein. Sowohl F als auch $y(t)$ können Vektoren sein, deren Vektorlänge unterschiedlich sein können. Eine Funktion $y(t)$ ist eine Lösung, wenn die obige Gleichung für alle t (aus einem vorgegebenen Intervall) erfüllt ist.

Im Allgemeinen sind Differentialgleichungen nicht systematisch lösbar. Deshalb ist hier sehr viel Kreativität verlangt. Wenn keine analytische Lösung gefunden werden kann, was häufig der Fall ist, muss man die Gleichung vereinfachen und/oder auf numerische Verfahren zurückgreifen. Das führt dann in das Gebiet der Simulationen.

D.12.2 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in einer Dimension

Für Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gibt es ein systematisches Lösungsverfahren. Dieses Verfahren ist daher immer der Einstieg in das Gebiet der Differentialgleichungen.

Eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten hat in einer Dimension die Form

$$F(y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y}{dt^n} = 0$$

Man wählt einen Ansatz $y(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}$. Durch Nachrechnen erhält man daraus

$$\frac{d^n y}{dt^n} = \alpha^n y(t)$$

Wenn wir diese Ersetzung in der Differentialgleichung durchführen, lässt sich $y(t)$ ausklammern, sodass wir eine algebraische Glecihung erhalten.

$$F(1, \alpha, \alpha^2, \ldots) = \sum_{n=0}^{N} a_n \alpha^n = 0$$

Man nennt diese Funktion das **charakteristische Polynom**.

Nun bestimmt man die Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des Polynoms, die reell oder komplexwertig sein können. Beachte, dass es für die Nullstellenbestimmung von Polynomen höherer Ordnung kein systematisches Verfahren gibt. Zum Glück spielen Differentialgleichungen mit einer Ordnung höher als zwei in der Physik eine untergeordnete Rolle.

Sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms alle verschieden, hat die allgemeine Lösung der Differentialgleichung die Form

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i \mathrm{e}^{\alpha_i t}$$

Tritt eine Nullstelle mehrmals auf, dann sind einige dieser Lösungen linear abhängig. Seien die Nullstellen $a_j = a_{j+1} = \ldots = a_m$ identisch. In dem Fall ersetzt man

$$\sum_{i=j}^{m} A_i \mathrm{e}^{\alpha_i t} \qquad \to \qquad \sum_{i=j}^{m} A_i x^{i-j} \mathrm{e}^{\alpha_i t}$$

Die Allgemeine Lösung besteht dann nicht nur mehr aus reinen Exponentialfunktionen, sondern auch aus Produkten einer Exponentialfunktion mit einem Polynom.

D.12.3 Abbildung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung auf ein $(n-1)$-dimensionales System erster Ordnung

Differentialgleichungen höherer Ordnung kann man auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung abbilden. Das Prinzip wird hier für eine eindimensionale Differentialgleichung gezeigt. Es lässt sich aber problemlos auf Differentialgleichungssysteme übertragen.

$$\begin{aligned} & G(x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0 \\ \Rightarrow G(x, y, \dot{y}) = 0 \qquad \wedge \qquad & \dot{x} = y \end{aligned}$$

D.12.4 Eindimensionale inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die folgende Methode[29] ist analog zur algebraischen Lösung des quantenmechanischen harmonischen Oszillators. Die Methode hat den Vorteil, dass sie ohne Ansätze auskommt. Darüber hinaus bildet sie das Problem auf zwei eindimensionale Integrale ab, was eine numerische Lösung des Problems erleichtert.

Betrachte die folgende inhomogene Differentialgleichung

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = f(t)$$

Der Differentialoperator $m\partial_t^2 + \alpha\partial_t + c$ lässt sich in ein Produkt von zwei Differentialoperatoren erster Ordnung umwandeln.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx &\stackrel{?}{=} A(\partial_t - \lambda_1)(\partial_t - \lambda_2)x(t) \\ &= A\left(\partial_t^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\partial_t + \lambda_1\lambda_2\right)x(t) \end{aligned}$$

Achtung! Operatoren darf man im Allgemeinen nicht mit anderen Operatoren oder mit Funktionen vertauschen!

Durch Koeffizientenvergleich bestimmen wir λ_1 und λ_2. Die Bedingungen sind

$$m = A \tag{D.59}$$
$$\alpha = A(\lambda_1 + \lambda_2) \tag{D.60}$$
$$c = A\lambda_1\lambda_2 \tag{D.61}$$

Diese lösen wir nach A, λ_1, λ_2 auf:

$$A = m$$
$$\lambda_2 \stackrel{Gl.\ D.60, D.59}{=} \frac{\alpha}{m} - \lambda_1 \tag{D.62}$$
$$c \stackrel{Gl.\ D.61, D.62}{=} m\lambda_1\left(\frac{\alpha}{m} - \lambda_1\right) \tag{D.63}$$
$$\Rightarrow 0 = \lambda_1^2 - \frac{\alpha}{m}\lambda_1 + \frac{c}{m} \tag{D.64}$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{\alpha}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - \frac{c}{m}} \tag{D.65}$$
$$\lambda_2 \stackrel{Gl\ D.62}{=} \frac{\alpha}{2m} \pm (-1)\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - \frac{c}{m}} \tag{D.66}$$

Wir bekommen also zwei Lösungen, von denen wir eine λ_1 und die andere λ_2 zuordnen.

$$\lambda_{1/2} = \frac{\alpha}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - \frac{c}{m}} \tag{D.67}$$

Damit können wir die obige Differentialgleichung in

$$A(\partial_t - \lambda_1)(\partial_t - \lambda_2)x(t) = f(t)$$

umwandeln

Wie lösen dies Differentialgleichung, indem wir sie in zwei Differentialgleichungen erster Ordnung umwandeln:

$$\begin{aligned} A(\partial_t - \lambda_1)u(t) &= f(t) \\ (\partial_t - \lambda_2)x(t) &= u(t) \end{aligned}$$

wobei wir die Hilfsfunktion $u(t)$ eingeführt haben. Die zweite Gleichung ist eine Definition für die Hilfsfunktion $u(t)$ aber gleichzeitig auch eine Differentialgleichung für $x(t)$, falls $u(t)$ bekannt ist.

Wir bestimmen nun $u(t)$ aus der ersten Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) - \lambda_1 u(t) = \frac{1}{A} f(t)$$

mit Hilfe des einer weiteren Transformation

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{\lambda_1 t} g(t) \\ \dot{u}(t) &= \lambda_1 e^{\lambda_1 t} g(t) + e^{\lambda_1 t} \dot{g}(t) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhalten wir $u(t)$

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) - \lambda_1 u(t) &= \lambda_1 e^{\lambda_1 t} g(t) + e^{\lambda_1 t} \dot{g}(t) - \lambda_1 e^{\lambda_1 t} g(t) \\ &= e^{\lambda_1 t} \dot{g}(t) = \frac{1}{A} f(t) \\ g(t) &= C_1 + \int_0^t dt'\ e^{-\lambda_1 t'} \frac{1}{A} f(t') \\ u(t) &= e^{\lambda_1 t} \left[C + \int_0^t dt'\ e^{-\lambda_1 t'} \frac{1}{A} f(t') \right] \end{aligned}$$

Wir können also $u(t)$ durch Integration bestimmen.

Nun müssen wir noch $x(t)$ aus $u(t)$ durch die Gleichung

$$(\partial_t - \lambda_2) x(t) = u(t)$$

bestimmen.

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{\lambda_2 t} h(t) \\ (\partial_t - \lambda_2) e^{\lambda_2 t} h(t) &= \lambda_2 e^{\lambda_2 t} h(t) + e^{\lambda_2 t} \dot{h}(t) - \lambda_2 e^{\lambda_2 t} h(t) \\ &= e^{\lambda_2 t} \dot{h}(t) \stackrel{!}{=} u(t) \\ h(t) &= C_2 + \int_0^t dt'\ e^{-\lambda_2 t'} u(t') \\ x(t) &= e^{\lambda_2 t} \left[C_2 + \int_0^t dt' e^{-\lambda_2 t'} u(t') \right] \\ &= e^{\lambda_2 t} \left[C_2 + \int_0^t dt'\ e^{-\lambda_2 t'} e^{\lambda_1 t'} \left[C_1 + \int_0^{t'} dt''\ e^{-\lambda_1 t''} \frac{1}{A} f(t'') \right] \right] \\ &= e^{\lambda_2 t} \left[C_2 + \int_0^t dt'\ e^{(\lambda_1 - \lambda_2) t'} \left[C_1 + \int_0^{t'} dt''\ e^{-\lambda_1 t''} \frac{1}{A} f(t'') \right] \right] \\ &= C_2 e^{\lambda_2 t} + e^{\lambda_2 t} \int_0^t dt'\ e^{(\lambda_1 - \lambda_2) t'} \left[C_1 + \int_0^{t'} dt''\ e^{-\lambda_1 t''} \frac{1}{A} f(t'') \right] \\ &= C_2 e^{\lambda_2 t} + \Big[C_1 e^{\lambda_2 t} \int_0^t dt'\ e^{(\lambda_1 - \lambda_2) t'} \\ &\quad + e^{\lambda_2 t} \int_0^t dt'\ e^{(\lambda_1 - \lambda_2) t'} \int_0^{t'} dt''\ e^{-\lambda_1 t''} \frac{1}{A} f(t'') \Big] \\ &= C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{C_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t} \int_0^t dt'\ e^{(\lambda_1 - \lambda_2) t'} \int_0^{t'} dt''\ e^{-\lambda_1 t''} \frac{1}{A} f(t'') \end{aligned}$$

Schließlich ersetzen wir die Konstanten A, λ_1, λ_2 wieder durch unsere ursprüngliche Konstanten m, α, c.

D.12.5 Methode der Variation der Konstanten

Die Methode der Variation der Konstanten wurde von Joseph Louis Lagrange entwickelt. Sie erlaubt die Lösung einer inhomogenen, linearen, gewöhnlichen Differentialgleichung. Ich persönlich sehe darin eine Variante der Green'sfunktionsmethode, die weit verbreitet ist. Wir werden daher die Green'sfunktionsmethode verwenden. Der Vollständigkeit halber soll die Methode der Variation der Konstanten hier dennoch erklärt werden.

Betrachte eine lineare, inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\partial_t^2 f(t) + c(t) f(t) = I(t)$$

Die Lösung für $t > 0$ hat die Form

$$f(t) = \int_0^t dt''\; G(t,t'') I(t'') + G(t,0) f(0)$$

mit dem Kernel

$$G(t,t') \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left(-\int_{t'}^t dt''\; c(t'')\right) \tag{D.68}$$

Lösung der homogenen DGL

Zunächst bestimmen wir die Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung

$$\partial_t^2 f_0(t) + c(t) f_0(t) = 0$$

welche die Lösung

$$f_0(t) = K \exp\left(-\int_0^t dt\; c(t)\right)$$

besitzt.

Lösung der inhomogenen DGL

Nun erzeugen wir einen Ansatz für eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung als

$$f(t) = K(t) \exp\left(-\int_0^t dt'\; c(t)\right)$$

sodass

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 f(t) + c(t) f(t) &= \Big(\partial_t K(t)\Big) \exp\left(-\int_0^t dt'\; c(t')\right) - K(t) c(t) \exp\left(-\int_0^t dt'\; c(t')\right) \\
&\quad + c(t) K(t) \exp\left(-\int_0^t dt'\; c(t')\right) \\
&= \Big(\partial_t K(t)\Big) \exp\left(-\int_0^t dt'\; c(t')\right) \stackrel{!}{=} I(t) \\
\Rightarrow \qquad \partial_t K(t) &= \exp\left(\int_0^t dt'\; c(t')\right) I(t) \\
\Rightarrow \qquad K(t) &= K(0) + \int_0^t dt''\; \exp\left(\int_0^{t''} dt'\; c(t')\right) I(t'')
\end{aligned}$$

so that we obtain the final result

$$f(t) = K(0)\exp\left(-\int_0^t dt'\; c(t)\right) + \exp\left(-\int_0^t dt'\; c(t)\right)\int_0^t dt''\; \exp\left(\int_0^{t''} dt'\; c(t')\right) I(t'')$$

Diese Lösung kann in eine Form gebracht werden, die der Greensfunktionsmethode entspricht. Dabei vermittelt die Greensfunktion zwischen der Ursache $I(t)$ und der Wirkung $f(t)$

$$\begin{aligned}
f(t) &= K(0)\exp\left(-\int_0^t dt'\; c(t)\right) + \int_0^t dt''\; \exp\left(\left[\int_0^{t''} dt'\; c(t')\right] - \left[\int_0^t dt'\; c(t)\right]\right) I(t'') \\
&= K(0)\exp\left(-\int_0^t dt'\; c(t)\right) + \int_0^t dt''\; \exp\left(-\int_{t''}^t dt'\; c(t')\right) I(t'') \\
&\overset{\text{Gl. } D.68}{=} G(t,0)K(0) + \int_0^t dt'\; G(t,t')I(t') \\
&\overset{G(0^+,0)=1}{=} G(t,0)f(0) + \int_0^t dt'\; G(t,t')I(t')
\end{aligned}$$

q.e.d.

Als nächstes betrachten wir die Methode der Variation der Konstanten für Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

$$\ddot{f}(t) + a(t)\dot{f}(t) + b(t)f(t) = I(t)$$

Es seien zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen Differentialgleichung, nämlich $f_1(t)$ und $f_2(t)$ bekannt.

Wir wählen als Ansatz

$$f(t) = K_1(t)f_1(t) + K_2(t)f_2(t)$$

$$\dot{f} = \dot{K}_1 f_1 + \dot{K}_2 f_2 + K_1\dot{f}_1 + K_2\dot{f}_2$$

Da wir nur eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL benötigen, koennen wir eine zusätzliche Bedingung fordern. Diese wird der Einfachheit halber so gewählt dass $\dot{f}$ keine Ableitungen der Koeffizienten erhält, also

$$\dot{K}_1 f_1 + \dot{K}_2 f_2 = 0 \tag{D.69}$$

sodass

$$\dot{f} = K_1\dot{f}_1 + K_2\dot{f}_2$$

und

$$\ddot{f} = \dot{K}_1\dot{f}_1 + \dot{K}_2\dot{f}_2 + K_1\ddot{f}_1 + K_2\ddot{f}_2$$

Setzen wir diese Terme in die inhomogene DGL ein, dann fallen alle Terme heraus, in denen die Konstanten ohne Zeitableitung auftreten. Es gilt also

$$\ddot{f}(t) + a(t)\dot{f}(t) + b(t)f(t) = \dot{K}_1\dot{f}_1 + \dot{K}_2\dot{f}_2 = I(t)$$

Zusammen mit der Bedingung Gl. D.69 erhalten wir ein Gleichungssystem für die Zeitableitungen der Koeffizienten.

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ \dot{f}_1 & \dot{f}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{K}_1 \\ \dot{K}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I(t) \end{pmatrix}$$

Aus dem wir das Resultat

$$\begin{pmatrix} \dot{K}_1 \\ \dot{K}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{f_1\dot{f}_2 - \dot{f}_2 f_1} \begin{pmatrix} \dot{f}_2 & -f_2 \\ -\dot{f}_1 & f_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ I(t) \end{pmatrix}$$

erhalten. Es gilt also

$$\begin{aligned} K_1(t) &= K_1(0) + \int_0^t dt' \, \frac{-f_2(t')}{f_1\partial_t f_2 - f_2\partial_t f_1} I(t') \\ K_2(t) &= K_2(0) + \int_0^t dt' \, \frac{+f_1(t')}{f_1\partial_t f_2 - f_2\partial_t f_1} I(t') \end{aligned}$$

Einsetzen in den Ansatz liefert das Resultat

$$\begin{aligned} f(t) &= K_1(0)f_1(t) + K_2(0)f_2(t) \\ &\quad + f_1(t)\int_0^t dt' \, \frac{-f_2(t')}{f_1\partial_t f_2 - f_2\partial_t f_1} I(t') + f_2(t)\int_0^t dt' \, \frac{+f_1(t')}{f_1\partial_t f_2 - f_2\partial_t f_1} I(t') \\ &= K_1(0)f_1(t) + K_2(0)f_2(t) + \int_0^t dt' \, \frac{f_2(t)f_1(t') - f_1(t)f_2(t')}{f_1(t')\partial_{t'} f_2(t') - f_2(t')\partial_{t'} f_1(t')} I(t') \end{aligned}$$

D.12.6 Homogene Differentialgleichung

Editor: This is a second definition of a homogeneous differential equation, which differs from the previous one. It does not seem to be important for us.

Eine Differentialgleichung heißt homogen, wenn

$$A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0$$

und A und B Polynome der selben Ordnung d sind, also

$$\begin{aligned} A(x,y) &= \sum_{i=0}^{d} a_i y^i x^{d-i} \\ B(x,y) &= \sum_{i=0}^{d} b_i y^i x^{d-i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= A(x,y)dx + B(x,y)dy \\ &= \sum_{i=0}^{d} a_i y^i x^{d-i} dx + \sum_{i=0}^{d} b_i y^i x^{d-i} dy \\ &= x^d \left(\sum_{i=0}^{d} a_i \left(\frac{y}{x}\right)^i dx + \sum_{i=0}^{d} b_i \left(\frac{y}{x}\right)^i dy \right) \end{aligned}$$

Variablentransformation $v = \frac{y}{x}$, sodass $dy = xdv + vdx$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{d} a_i v^i dx + \sum_{i=0}^{d} b_i v^i (xdv + vdx) \\ &= \left[\sum_{i=0}^{d} a_i v^i + v\sum_{i=0}^{d} b_i v^i\right] dx + \left[\sum_{i=0}^{d} b_i v^i\right] xdv \\ \Rightarrow \frac{1}{x}dx &= -\frac{\sum_{i=0}^{d} b_i v^i}{\sum_{i=0}^{d} a_i v^i + v\sum_{i=0}^{d} b_i v^i} dv \end{aligned}$$

Variablentransformation $z = \ln[x]$ liefert

$$\begin{aligned}
dz &= -\frac{\sum_{i=0}^{d} b_i v^i}{\sum_{i=0}^{d} a_i v^i + v \sum_{i=0}^{d} b_i v^i} dv \\
\frac{dv}{dz} &= -\frac{\sum_{i=0}^{d} a_i v^i + v \sum_{i=0}^{d} b_i v^i}{\sum_{i=0}^{d} b_i v^i} = -v - \frac{\sum_{i=0}^{d} a_i v^i}{\sum_{i=0}^{d} b_i v^i}
\end{aligned}$$

Durch Integration erhalten wir $v(z)$ bis auf eine additive Konstante, und durch Einsetzen der Transformationen

$$y(x) = v(\ln(x))x + Cx$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x+y}{x-y} \\
\Rightarrow 0 &= (x+y)dx + (y-x)dy \\
\overset{y=vx}{\Rightarrow} 0 &= x(1+v)dx + x(v-1)(xdv + vdx) \\
&= x\left[(1+v+v(v-1))dx + (v-1)xdv\right] = x\left[(1+v^2)dx + (v-1)xdv\right] \\
\Rightarrow \frac{1}{x}dx &= \frac{1-v}{1+v^2}dv \\
\overset{z=\ln(x)}{\Rightarrow} \frac{dv}{dz} &= \frac{1+v^2}{1-v} \\
\Rightarrow \frac{dz}{dv} &= \frac{1-v}{1+v^2} = \frac{1}{1+v^2} - \frac{v}{1+v^2} \\
\Rightarrow z(v) &= \arctan(v) - \frac{1}{2}\ln(1+v^2) + C \\
\ln(x) &= \arctan(\frac{y}{x}) - \frac{1}{2}\ln\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] + C
\end{aligned}$$

Diese Gleichung muss jetzt noch nach y aufgelöst werden.

D.13 Komplexe Zahlen

Eines der Gebiete der Mathematik, die Funktionentheorie, widmet sich den komplexen Zahlen, sowie Funktionen der komplexen Zahlen. Eine Einführung gibt das Buch von Fischer und Lieb[30].

Was ist die Wurzel von einer negativen Zahl?

$$\sqrt{-5} = \underbrace{\sqrt{-1}}_{=i}\sqrt{5}$$

Wir definieren uns also eine neue Zahl

$$i \overset{\text{def}}{=} \sqrt{-1}$$

und erweitern also den Zahlenraum der reellen Zahlen auf komplexe Zahlen. Eine allgemeine komplexe Zahl z wird mit Hilfe von zwei reellen Zahlen a, b als

$$z = a + bi$$

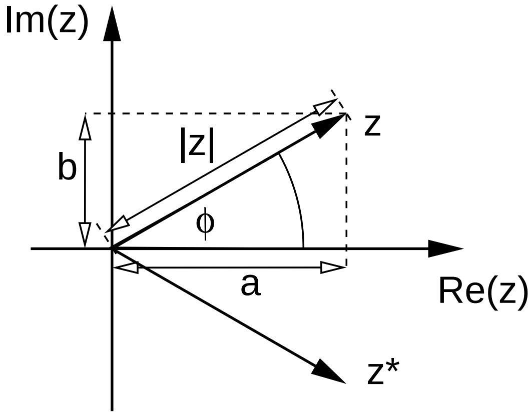
dargestellt. Wir nennen $a = \mathrm{Re}(z)$ den Realteil von c und $b = Im(z)$ ihren Imaginärteil.

Nun ergibt sich natürlich die Frage, ob wir die Wurzel aus i ziehen können.

$$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \Rightarrow \sqrt{i}^2 = \frac{1}{2}(1+2i+\underbrace{i^2}_{=1}) = i$$

wir bleiben also im selben Zahlenraum.

Eine komplexe Zahl z kann als Vektor in der 2-dimensionalen **komplexen Zahlenebene** dargestellt werden.



Editor: In der Zeichnung soll ϕ durch φ ersetzt werden.

- **Addition:** Zwei komplexe Zahlen addiert man, indem man Imaginärteil und Realteil addiert.
- **Multiplikation:** Zwei komplexe Zahlen multipliziert man, indem man i als Konstante betrachtet und anschließend $i^2 = -1$ verwendet. Ein Beispiel ist $(a+ib)(c+id) = ac+iad+ibc+i^2bd = (ac-bd)+i(ad+bc)$.
- Zu jeder komplexen Zahl $z = a+ib$ definieren wir uns eine **komplex konjugierte Zahl** z^*.

  $$z^* \stackrel{\text{def}}{=} a - ib$$

  Die komplex Konjugierte erhalten wir also in der komplexen Zahlenebene durch Spiegelung an der reellen Achse. Führen wir eine komplexe Konjugation zweimal durch erhalten wir wieder das ursprüngliche Resultat, d.h.

  $$(z^*)^* = z$$

  Darüber hinaus gilt

  $$\begin{aligned}(z_1z_2)^* &= [(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)]^* = [(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)]^* \\ &= (a_1a_2-b_1b_2)-i(a_1b_2+a_2b_1) = (a_1-ib_1)(a_2-ib_2) \\ &= z_1^*z_2^*\end{aligned}$$

- Der Betrag ist die Länge des Vektors in der komplexen Zahlenebene

  $$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{zz^*}$$

- Die Phase einer komplexen Zahl ist der Winkel zur reellen Achse.

  $$\phi = \arg(z) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{atan}\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right)$$

  Wir können also jede Zahl auch durch Betrag und Phase ausdrücken

  $$z = \underbrace{|z|\cos(\phi)}_{a} + i\underbrace{|z|\sin(\phi)}_{b}$$

Rechenregeln

- Die Addition von zwei komplexen Zahlen $z_1 = a_1 + ib_1$ und $z_2 = a_2 + ib_2$ entspricht gerade der Vektoraddition in der komplexen Zahlenebene.

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

- Die Multiplikation von zwei komplexen Zahlen $z_1 = a_1 + ib_1$ und $z_2 = a_2 + ib_2$ ist wie folgt definiert.

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

  Die Multiplikation von komplexen Zahlen entspricht nicht den bekannten Produkten (Skalarprodukt, dyadisches Produkt, Kreuzprodukt) von zwei Vektoren.

- Das Einheitselement bezüglich der Multiplikation ist $z = 1 + i0$ und entspricht der bekannten 1 der Reellen Zahlen.

- das Inverse z^{-1} einer komplexen Zahl z ist wie folgt definiert

$$zz^{-1} = z^{-1}z = 1$$

  Es gilt also

$$z^{-1} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

D.13.1 Elementare komplexe Funktionen

die komplexe Exponentialfunktion

Betrachten wir die Potenzreihenentwicklungen der reellen Funktionen

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \\
\cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\
\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}
\end{aligned}$$

Jetzt bilden wir

$$\begin{aligned}
\cos(x) + i\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (ix)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (ix)^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n)!} (ix)^n \\
&= e^{ix}
\end{aligned}$$

Wir können jede komplexe Zahl wie folgt darstellen

$$z = |z| e^{i\phi}$$

wobei ϕ eine reelle Zahl ist. $\phi = \arg(z)$, da der Betrag von $e^{i\phi}$ gleich 1 ist, d.h. $|e^{i\phi}| = 1$.

Nun verallgemeinern wir die Exponentialfunktion auf komplexe Argumente.

$$e^z = \sum_n \frac{1}{n!} z^n = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\mathrm{Im}(z)}$$

wobei wir die folgende Regel verwendet haben, die sich aus der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion ergibt:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

Aus der komplexe Exponentialfunktion lassen sich die folgenden Regeln für die trigonometrischen Funktionen bestimmen:

$$\begin{aligned}
\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2) &= e^{i(\phi_1+\phi_2)} = e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2} \\
&= (\cos(\phi_1) + i\sin(\phi_1))(\cos(\phi_2) + i\sin(\phi_2)) \\
&= (\cos(\phi_1)\cos(\phi_2) - \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)) \\
&\quad + i(\cos(\phi_1)\sin(\phi_2) + \sin(\phi_1)\cos(\phi_2)) \\
\cos(\phi_1+\phi_2) &= \cos(\phi_1)\cos(\phi_2) - \sin(\phi_1)\sin(\phi_2) \\
\sin(\phi_1+\phi_2) &= \cos(\phi_1)\sin(\phi_2) + \sin(\phi_1)\cos(\phi_2)
\end{aligned}$$

D.13.2 Wirtinger Ableitungen

Um die Funktionen komplexer Zahlen zu differenzieren, fassen wir sie als zweidimensionale Funktionen $(\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f))$ von zwei reellen Variablen $(a = \mathrm{Re}(z), b = \mathrm{Im}(z))$ auf.

$$\begin{aligned}
f(z) &= f(z_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial a}\right|_{a_0,b_0}(a-a_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial b}\right|_{a_0,b_0}(b-b_0) + O(\sqrt{(a-a_0)^2+(b-b_0)^2}^{\,2}) \\
&= f(z_0) + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial a} - i\frac{\partial f}{\partial b}\right]}_{=\frac{\partial f}{\partial z}} \underbrace{[\Delta a + i\Delta b]}_{z-z_0} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial a} + i\frac{\partial f}{\partial b}\right]}_{=\frac{\partial f}{\partial z^*}} \underbrace{[\Delta a - i\Delta b]}_{(z-z_0)^*} + O(|z-z_0|^2) \\
&= f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z-z_0) + \frac{\partial f}{\partial z^*}(z-z_0)^* + O(|z-z_0|^2)
\end{aligned}$$

Man nennt diese Ableitungen

WIRTINGER ABLEITUNGEN

Ist f eine Funktion eines komplexen Arguments $z = a + ib$, dann sind die Wirtinger Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial z} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial a} - i\frac{\partial f}{\partial b}\right) \tag{D.70}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}\right) \tag{D.71}$$

Daraus ergibt sich eine höchst elegante Formulierung der Differentialrechnung: Wir fassen jede komplexe Funktion als Funktion $f(z, z^*)$ von zwei Argumenten z und z^* auf, wobei z und z^* als unabhängige Variablen betrachtet werden, d.h.

$$\frac{\partial z}{\partial z} = 1; \qquad \frac{\partial z}{\partial z^*} = 0; \qquad \frac{\partial z^*}{\partial z} = 0; \qquad \frac{\partial z^*}{\partial z^*} = 1$$

Daraus ergeben sich die folgenden Rechenregeln

- Linearität

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Big(af(z,z^*)+bg(z,z^*)\Big)}{\partial z} &= a\frac{\partial f(z,z^*)}{\partial z}+b\frac{\partial g(z,z^*)}{\partial z}\\
\frac{\partial\Big(af(z,z^*)+bg(z,z^*)\Big)}{\partial z^*} &= a\frac{\partial f(z,z^*)}{\partial z^*}+b\frac{\partial g(z,z^*)}{\partial z^*}
\end{aligned}
\tag{D.72}
$$

- Productregel

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Big(f(z,z^*)g(z,z^*)\Big)}{\partial z} &= \frac{\partial f(z,z^*)}{\partial z}g(z,z^*)+f(z,z^*)\frac{\partial g(z,z^*)}{\partial z}\\
\frac{\partial\Big(f(z,z^*)g(z,z^*)\Big)}{\partial z^*} &= \frac{\partial f(z,z^*)}{\partial z^*}g(z,z^*)+f(z,z^*)\frac{\partial g(z,z^*)}{\partial z^*}
\end{aligned}
\tag{D.73}
$$

- Kettenregel

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Big[f\left(g(z,z^*),g^*(z,z^*)\right)\Big]}{\partial z} &= \frac{\partial f(g,g^*)}{\partial g}\frac{\partial g(z,z^*)}{\partial z}+\frac{\partial f(g,g^*)}{\partial g^*}\left(\frac{\partial g(z,z^*)}{\partial z^*}\right)^*\\
\frac{\partial\Big[f\left(g(z,z^*),g^*(z,z^*)\right)\Big]}{\partial z^*} &= \frac{\partial f(g,g^*)}{\partial g}\frac{\partial g(z,z^*)}{\partial z^*}+\frac{\partial f(g,g^*)}{\partial g^*}\left(\frac{\partial g(z,z^*)}{\partial z}\right)^*
\end{aligned}
\tag{D.74}
$$

- Komplexe Konjugation

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left[f(z,z^*)\right]^*}{\partial z} &= \left(\frac{\partial f(z,z^*)}{\partial z^*}\right)^*\\
\frac{\partial\left[f(z,z^*)\right]^*}{\partial z^*} &= \left(\frac{\partial f(z,z^*)}{\partial z}\right)^*
\end{aligned}
\tag{D.75}
$$

D.14 Differentialgeometrie

D.14.1 Linienintegrale

Betrachte die Bahn eines Teilchens im 3-dimensionalen Raum. Wir stellen sie dar als Vektorfunktion $\vec{r}(t)$. Eine solche Funktion bildet einen eindimensionalen Raum, die t-Achse, in den 3-dimensionalen Raum ab. Wir können die Bahn auch ohne die Zeitinformation betrachten, sozusagen als Kondensstreifen des Teilchens. Die Bahn ist dann die Menge aller Punkte im 3-dimensionalen Raum, die erzeugt wird, wenn man alle Punkte der t-Achse mittels $\vec{r}(t)$ in den 3-dimensionalen Raum abbildet.

Typische Probleme sind die nach der Weglänge oder die nach der Arbeit, die durch ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ im 3D Raum an dem Teilchen verrichtet wurde. Im Fall der Weglänge liegt ein ungerichtetes Linienintegral vor, im Fall der Arbeit liegt ein gerichtetes Linienintegral vor.

Eine Linie ist eine Abbildung eines eindimensionalen Raums auf einen mehrdimensionalen Raum. Sie wird dargestellt durch eine Funktion $\vec{r}(s)$.

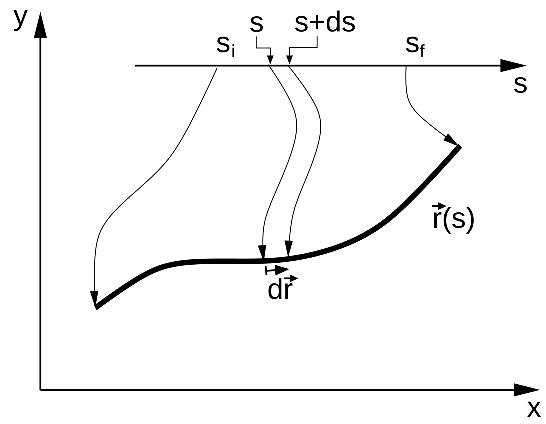


Abb. D.11: Bahnkurve. Die Bahnkurve $\vec{r}(s)$ ist die Abbildung eines eindimensionalen Intervalls $[s_i, s_f]$ auf den mehrdimensionalen Raum. Ein infinitesimales Bahnelement $d\vec{r}$ ist der Vektor $\vec{r}(s+ds) - \vec{r}(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} ds$ für $ds \to 0$. Beachte dass die s-Achse keine Position im $x-y$ Diagramm hat sondern nur aus Platzgründen in das Achsensystem eingezeichnet wurde.

Um ein Bahnintegral zu beschreiben, zerlegen wir die Linie in lineare liniensegmente und lassen anschließend die Länge der Liniensegmente gegen Null gehen.

Weglänge

Wir beginnen mit der Bestimmung der Weglänge, indem wir das eindimensionale Intervall $[s_i, s_f]$ in keine Intervalle $\Delta s = \frac{s_f - s_i}{N}$ zerlegen, wobei N eine ganze Zahl ist die wir anschließend nach unendlich gehen lassen. Wir ersetzen nun die Linie in Segmente. Die Länge der Segmente ist $|\vec{r}(s_{k+1}) - \vec{r}(s_k)|$. Indem wir die Segmente aufsummieren erhalten wir eine Näherung für die Länge der Linie.

$$L = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} |\vec{r}(s_{k+1}) - \vec{r}(s_k)|$$

wobei

$$s_k = s_i + \frac{s_f - s_i}{N}(k-1)$$

Den Grenzübergang $N \to \infty$

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} |\vec{r}(s_{k+1}) - \vec{r}(s_k)| \overset{Taylor}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} |\frac{d\vec{r}}{ds}\Delta s + O(\Delta s)^2| \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \Delta s}_{\to\int ds} \sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)^2} + \underbrace{\sum_k O(\Delta s)^2}_{\to 0} \right] \\
&= \int_{s_i}^{s_f} \underbrace{ds \sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)^2}}_{dr}
\end{aligned}
$$

Damit haben wir die Weglänge auf ein reguläres eindimensionales Integral über das Interval $[s_i, s_f]$ abgebildet.

Wichtig ist dass das integral unabhängig von der Wahl des eindimensionalen Parameters s ist. Betrachten wir zum Beispiel eine andere Parameterisierung indem wir s auf $t(s)$ umtransformieren:

$$
\begin{aligned}
\int_{s_i}^{s_f} ds \sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)^2} &= \int_{t_i}^{t_f} \underbrace{dt \frac{ds(t)}{dt}}_{ds} \sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)^2} \\
&= \int_{t_i}^{t_f} dt \sqrt{\left(\left.\frac{dr(\vec{s})}{ds}\right|_{s(t)} \frac{ds(t)}{dt} \right)^2} \\
&= \int_{t_i}^{t_f} dt \sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2}
\end{aligned}
$$

Im Vorletzten Schritt haben wir die Kettenregel $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$ angewandt. Wir erhalten also denselben ausdruck unabhängig davon, wie wir die Linie parameterisieren. Deshalb wählt man eine Schreibweise, die unabhängig von der Parameterisierung ist.

WEGLÄNGE

$$
L = \int_{\vec{r}} dr \overset{\text{def}}{=} \int_{s_i}^{s_f} ds \sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)^2}
$$

Dabei steht der index $\vec{r}$ für die Menge aller Punkte $\{\vec{r}(s)\}$, die durch Abbildung des eindimensionalen Intervalls $[s_i, s_f]$ auf den mehrdimensionalen Raum hervorgehen.

Ungerichtete Linienintegrale

Analog können wir das Linienintegalintegral einer Funktion $f(\vec{r})$ bestimmen, indem wir jedes Liniensegment mit dem Wert der Funktion f gewichten.

UNGERICHTETES LINIENINTEGRAL

$$\int_{\vec{r}} dr\ f(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{s_i}^{s_f} ds\ \sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)^2} f(\vec{r}(s))$$

Dabei steht der index $\vec{r}$ für die Menge aller Punkte $\{\vec{r}(s)\}$, die durch Abbildung des eindimensionalen Intervalls $[s_i, s_f]$ auf den mehrdimensionalen Raum hervorgehen.

Gerichtete Linienintegrale

Betrachten wir nun ein gerichtetes Linienintegral. Ein Beispiel für ein Linienintegral ist die Arbeit ΔW, die als Kraft mal Weg definiert werden kann. Wir haben also eine Vektorfunktion $F(\vec{r})$ und eine Linie, welche den Weg eines Teilchens beschreibt. Im Gegensatz zum ungerichteten Linienintegral hängt die Arbeit davon ab, ob die Bahn vorwärts oder rückwärts durchlaufen wird. Darüber hinaus geht hier das Liniensegment mit seiner Richtung ein.

Wir stellen das Linienintegral wieder durch seine segmentierte Form dar.[6]

$$\begin{aligned}
\Delta W &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\vec{r}(s_{k+1}) - \vec{r}(s_k)\right) \vec{F}(\vec{r}(s_k)) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{d\vec{r}}{ds}\Delta s + O(\Delta s)^2\right) \vec{F}(\vec{r}(s_k)) \\
&= \int_{s_i}^{s_f} \underbrace{ds\ \frac{d\vec{r}}{ds}}_{dr} \vec{F}(\vec{r}(s))
\end{aligned}$$

Betrachten wir s als Zeitvariable, dann kann man die Arbeit als das Integral über die Zeit von "Kraft mal Geschwindigkeit" auffassen.

Wie beim ungerichteten Linienintegral ist auch das gerichtete Linienintegral unabhängig von der Parameterisierung des Wegs. Das bedeutet, dass das Linienintegral unabhängig von der Geschwindigkeit ist, mit der die Bahn durchlaufen wird. Man testet das indem man die Zeit umtransformiert $t' = t'(t)$, sodass

$$\begin{aligned}
dt' &= \frac{dt'(t)}{dt} dt \quad \Rightarrow \quad dt = dt' \frac{1}{\frac{dt'(t)}{dt}} \\
\vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt'}\frac{dt'(t)}{dt} = \vec{v}'(t'(t))\frac{dt'(t)}{dt}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Delta W &= \int_{t_1}^{t_2} dt' \frac{1}{\frac{dt'(t)}{dt}} \vec{F}(\vec{r}(t'))\vec{v}'(t')\frac{dt'(t)}{dt} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt' \vec{F}(\vec{r}(t'))\vec{v}'(t')
\end{aligned}$$

Wenn das Integral unabhängig von eineer Transformation der Zeitskala ist, dann können wir von der Zeitinformation abstrahieren indem wir das Zeitintegral durch ein Linienintegral ersetzen. Eine Kurzschreibweise für das Linienintegral ist durch die folgende Definition gegeben.

[6] Beachte, dass der folgende Ausdruck kein wirklicher Beweis ist, da ich nicht zeige, dass wir das Linienintegral über das Liniensegment durch den Wert der Kraft am einen Ende und dem Wegelement ausdrücken kann.

Definition D.9 *GERICHTETES LINIENINTEGRAL*

$$\int_{\vec{r}} d\vec{r}\,\vec{F}(\vec{r}) \stackrel{def}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt\,\vec{F}(\vec{r}(t))\frac{d\vec{r}}{dt}$$

D.14.2 Flächenintegrale

Analog zu den Linien lassen sich Flächen darstellen. In diesem Fall wählen wir eine Abbildung $\vec{r}(u,v)$, welche einen Bereich des zweidimensionalen Raums auf die Oberfläche abbildet.

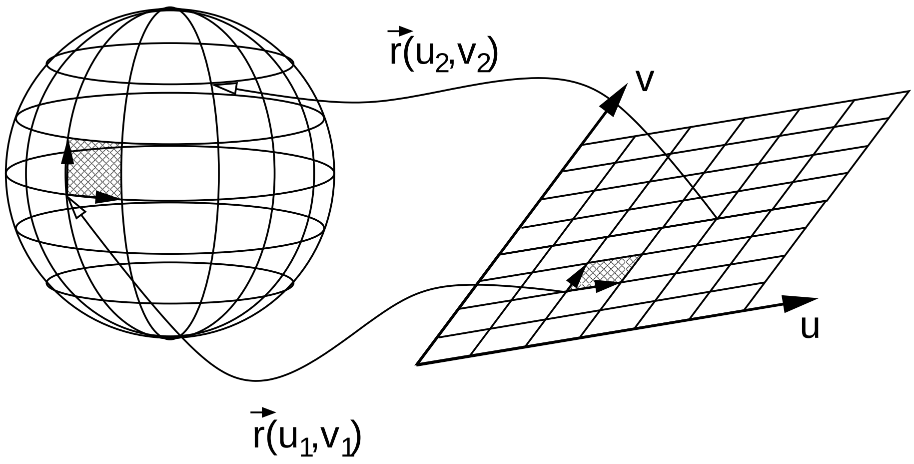


Abb. D.12: Fläche. Eine Fläche wird als Abbildung $\vec{r}(u,v)$ aus einem einem zweidimensionalen Bereich in den dreidimensionalen Raum dargestellt. Die vektoren, welche ein Flächenelement aufspannen sind $d\vec{r}_u = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}du$ und $d\vec{r}_v = \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}dv$. Das Flächensegment hat die Fläche $dA = |d\vec{A}|$ mit $d\vec{A} = d\vec{r}_u \times d\vec{r}_v$. Der Vektor $d\vec{A}$ steht senkrecht auf der Oberfläche und kann daher durch den normierten Normalenvektor $\vec{n}$ als $d\vec{A} = \vec{n}dA$ ausgedrückt werden.

Fläche

Um die Fläche zu bestimmen, zerlegen wir die Oberfläche in ebene Flächensegmente. Dazu diskretisieren wir den zweidimensionalen (u,v)-Raum in diskrete Bereiche. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass der (u,v)-Bereich ein Rechteck $[u_i,u_f]\times[v_i,v_f]$ aufspannt[7]. Die diskreten Gitterpunkte sind

$$u_j = u_0 + j\Delta u$$
$$v_k = v_0 + k\Delta v$$

Entsprechend erhalten wir die Punkte auf der Oberfläche als

$$\vec{r}_{i,j} = \vec{r}(u_0 + i\Delta u, v_0 + j\Delta v)$$

Nun betrachten wir ein Flächensegment, das von vier benachbarten Punkten auf der Oberfläche aufgespannt wird. Wir vernachlässigen hierbei, dass die Seiten des entsprechenden Vierecks nicht

[7] Das Symbol $\times$ bezeichnet hier nicht das Kreuzprodukt, sondern beschreibt, dass das Recheck aus zwei eindimensionalen Intervallen aufgespannt wird.

parallel ist, da dies im Limes insignifikant wird. Dann können wir die Fläche ΔA des Segments durch das Kreuzprodukt der beiden Vektoren $\Delta\vec{r}_u$ und $\Delta\vec{r}_u$, die das Flächensegment aufspannen, ausdrücken. Die beiden Vektoren sind

$$\Delta\vec{r}_u(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r}(u_i+\Delta u, v_j) - \vec{r}(u_i,v_j) = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\Delta u + O(\Delta u^2)$$
$$\Delta\vec{r}_v(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r}(u_i, v_j+\Delta v) - \vec{r}(u_i,v_j) = \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\Delta v + O(\Delta v^2)$$

Sodass das Flächensegment die Form

$$\begin{aligned}\Delta A_{i,j} &= |\Delta\vec{r}_u \times \Delta\vec{r}_v| + O(\Delta u^2, \Delta v^2)\\ &= \left|\left.\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right|_{\vec{r}_{i,j}} \times \left.\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|_{\vec{r}_{i,j}}\right| \Delta u\Delta v + O(\Delta u^2, \Delta v^2)\end{aligned}$$

Die Fläche erhält man Aufsummieren und anschließendem Grenzübergang $\Delta u \to 0$ und $\Delta v \to 0$.

$$\begin{aligned}A &= \lim_{N\to 0}\sum_{i,j} A_{i,j}\\ &= \lim_{N\to 0}\sum_i \Delta u \sum_j \Delta v \left|\left.\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right|_{\vec{r}_{i,j}} \times \left.\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|_{\vec{r}_{i,j}}\right|\\ &= \int du \int dv \left|\frac{\partial\vec{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}(u,v)}{\partial v}\right|\end{aligned}$$

Ungerichtetes Flächeintegral

Ein ungerichtetes Flächenintegral erhält man, indem man jedes Flächensegment mit einer Funktion $F(\vec{r})$ wichtet.

UNGERICHTETES FLÄCHENINTEGRAL

$$\int dA F(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \int du \int dv \left|\frac{\partial\vec{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}(u,v)}{\partial v}\right| F(\vec{r}(u,v))$$

Gerichtetes Flächeintegral

GERICHTETES FLÄCHENINTEGRAL

$$\int d\vec{A}\,\vec{F}(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \int du \int dv \left(\frac{\partial\vec{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}(u,v)}{\partial v}\right) \vec{F}(\vec{r}(u,v))$$

D.14.3 Gauß Theorem

Das Gauß theorem sagt, dass das Integral der Divergenz eines Vektorfeldes über ein Volumen gleich dem Oberflächenintegral des Vektorfeldes ist. Damit wird der die Divergenz als Quelldichte des Vektorfeldes identifiziert.

$$\int d^3r\,\vec{\nabla}\vec{f}(\vec{r}) = \oint d\vec{A}\,\vec{f}(\vec{r}) \tag{D.76}$$

Betrachtet man das Vektorfeld als Fluss einer Flüssigkeit, dann beschreibt die Divergenz zum Beispiel wie stark sich das Volumen eines Farbkleckses in der Flüssigkeit (ohne Diffusion) ausbreitet. Beachte, dass die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes in Wasser näherungsweise verschwindet. Ein idealer Farbklecks kann sich daher nur in seiner Form verändern aber sein gesamtvolumen nicht verändern. Es muss also an den Punkten, bei der die Divergenz ungleich null ist, Wasser hinzugefügt oder abgeleitet werden.

Eindimensionaler Spezialfall

Betrachte

$$\int_a^b dx \frac{df(x)}{dx} = f(b) - f(a)$$

Schreibe mit Hilfe der Heavisidefunktion $\theta_{[a,b]}(x) = \theta(x-a)\theta(b-x)$

Übung: Beschränktes Integral

$$\begin{aligned}
\int dx \theta_{[a,b]}(x) \frac{df}{dx} &= \int dx \Big[\frac{d}{dx} \Big(\theta_{[a,b]}(x) f(x) \Big) - f(x) \frac{d}{dx} \theta_{[a,b]}(x) \\
&= - \int dx f(x) \Big(\delta(x-a)\theta(b-x) + \theta(x-a)\delta(x) \Big) \\
&= - \int dx \Big(f(x)\delta(x-a) - f(x)\delta(x-b) \Big) \\
&= -f(a) + f(b)
\end{aligned}$$

Gauß'scher Satz

Betrachte: Volumenintegral der Divergenz $\vec{\nabla}\vec{f}(r) = \sum_i \frac{df_i}{dx_i}$ eines Gradienten

$$\int_\Omega d^3r \vec{\nabla}\vec{f}(\vec{r})$$

Eine Komponente $g(r) \stackrel{\text{def}}{=} f_z(x)$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega d^3r \frac{dg(\vec{r})}{dz} &= \int dx \int dy \int dz \frac{dg(\vec{r})}{dz} \\
&= \int_{x_-}^{x_+} dx \int_{y_-(x)}^{y_+(x)} dy \Big(g(z_+(x,y)) - g(z_-(x,y)) \Big)
\end{aligned}$$

Flächenelement: $d\vec{u}$ ist ein Vektor der in der Oberfläche liegt und als Projektion auf die xy-Ebene dx (eigentlich $d\vec{x}$) ergibt. $d\vec{v}$ ist genauso durch die Projektion und dy definiert.

$$\begin{aligned}
d\vec{u} &= (dx, 0, \frac{dz_+}{dx}) \\
d\vec{v} &= (0, dy, \frac{dz_+}{dy}) \\
d\vec{A} &= d\vec{u} \times d\vec{v} = (-dy \frac{dz_+}{dx}, -dx \frac{dz}{dy}, dxdy) \\
\Rightarrow dA_z &= dxdy
\end{aligned}$$

$d\vec{A}$ hat die Richtung der Oberflächennormalen und die Größe eines Flächenelementes. $d\vec{A}$ zeigt immer aus dem Volumen heraus.

Vervollständigen:
Die Oberfläche von Ω werde $\partial\Omega$ genannt

$$\int_\Omega d^3r \frac{dg(\vec{r})}{dz} = \oint_{\partial\Omega} dA_z g(x,y,z) = \oint_{\partial\Omega} dA_z f_z(x,y,z)$$

Verallgemeinern und Zusammenfassen auf drei Komponenten: **Gauß'scher Integralsatz**

$$\int_\Omega d^3r \vec{\nabla}\vec{f}(\vec{r}) = \int_{\partial\Omega} d\vec{A}\vec{f}(x,y,z)$$

Andere Herleitung des Gauß'schen Integralsatzes (Eselsbrücke)

$$\begin{aligned}\int_\Omega d^3r \vec{\nabla}\vec{f}(\vec{r}) &= \int d^3r \theta_\Omega(\vec{r})\vec{\nabla}\vec{f}(\vec{r}) = -\int d^3r \vec{f}(\vec{r})\vec{\nabla}\theta_\Omega(\vec{r}) = \int d^3r f(\vec{r})\vec{n}\delta_{\partial\Omega}(\vec{r}) \\ &= \oint_{\partial\Omega} d\vec{A}\vec{f}(\vec{r})\end{aligned}$$

Wir haben verwendet

- ∂_Ω die Oberfläche des Volumens Ω
- die Flächennormale $\vec{n}(r) = \frac{\vec{\nabla}\theta}{|\vec{\nabla}\theta(\vec{r})|}$. Definiert durch den Limes der Stufenfunktionfunktion.
- Die δ-Funktion der Oberfläche. $\delta_{\partial\Omega}(x) = |\nabla\theta(r)|$. Definiert durch

$$\vec{\nabla}\theta_\Omega(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{n}(r)\delta_{\partial\Omega}$$
$$\int drf(r)\delta_{\partial\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \int dAf(r)$$

Varianten des Gauß'schen Integralsatzes

- Eindimensional

$$\int_a^b dx \frac{df(x)}{dx} = f(b) - f(a)$$

- Integral eines Gradienten

$$\int_\Omega d^3r \vec{\nabla}f(\vec{r}) = -\oint_{\partial\Omega} d\vec{A}f(\vec{r})$$

D.14.4 Stokesscher Satz

$$\int_A d\vec{A}(\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{r}) = \int_{\partial A} d\vec{r}\vec{f}(\vec{r}) \qquad \text{(D.77)}$$

Betrachten wir das Vektorfeld wieder als Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit, dann ist die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich ein Ball der mit der Flüssigkeit mitschwimmt, gerade die Hälfte der Rotation des geschwindigkeits Feldes. Die Richtung der Rotation ist die Drehachse.

Eine wichtige Aussage ist, dass ein Vektorfeld, dessen Rotation verschwindet, als Gradientenfeld einer skalaren Funktion dargestellt werden kann. Diese skalare Funktion ist gerade das Linienintegrals des Vektorfeldes von einem Referenzpunkt zu dem Ort an dem der Wert der skalaren Funktion bestimmt werden soll. Der Wert dieses Linienintegrals ist eindeutig und Bahnunabhängig, da in einem Rotationsfreien Vektorfeld das Linienintegral einer geschlossenen Bahn verschwindet.

Beweis:

Betrachte ein kleines Rechteck in der x-y Ebene. Der Ursprung liege im Zentrum des Rechtecks, das die Seitenlängen l_x und l_y habe.

Wire bestimmen nun das Linienintegral des Vektorfeldes $\vec{f}(\vec{r})$ auf dem Rand des Rechtecks.

$$\oint d\vec{r}\vec{f}(\vec{r}) = \int_{-l_y/2}^{+l_y/2} dy \left[\underbrace{f_y(\frac{l_x}{2}, y, 0)}_{(1)} - \underbrace{f_y(\frac{-l_x}{2}, y, 0)}_{(3)} \right]$$
$$+ \int_{-l_x/2}^{+l_x/2} dx \left[\underbrace{-f_x(x, \frac{l_y}{2}, 0)}_{(2)} + \underbrace{f_x(x, -\frac{l_x}{2}, 0)}_{(4)} \right]$$

Nun entwickeln wir die Funktion um den Ursprung

$$f_y(\pm\frac{l_x}{2}, y, 0) = f_y \pm \frac{l_x}{2}\frac{\partial f_y}{\partial x} + y\frac{\partial f_y}{\partial_y} + O(l_x, l_y)^2$$

Dabei werden alle Werte und Ableitungen von f_y auf der rechten Seite am Ursprung genommen. Für das Integral sind dies also Konstanten, die ausgeklammert werden können.

$$\begin{aligned}
\overset{Taylor}{=} & \int_{-l_y/2}^{+l_y/2} dy \left[f_y(0,0,0) + \frac{l_x}{2}\partial_x f_y + y\partial_y f_y + O(l_x^2, l_y^2) \right] \\
& - \int_{-l_y/2}^{+l_y/2} dy \left[f_y(0,0,0) - \frac{l_x}{2}\partial_x f_y + y\partial_y f_y + O(l_x, l_y)^2 \right] \\
& - \int_{-l_x/2}^{+l_x/x} dx \left[f_x(0,0,0) + x\partial_x f_x + \frac{l_y}{2}\partial_y f_x + O(l_x, l_y)^2 \right] \\
& + \int_{-l_x/2}^{+l_x/x} dx \left[f_x(0,0,0) + x\partial_x f_x - \frac{l_y}{2}\partial_y f_x + O(l_x, l_y)^2 \right] \\
= \;\; & 2\int_{-l_y/2}^{+l_y/2} dy \left[\frac{l_x}{2}\partial_x f_y \right] + l_y O(l_x, l_y)^2 - 2\int_{-l_x/2}^{+l_x/x} dx \left[\frac{l_y}{2}\partial_y f_x \right] + l_x O(l_x, l_y)^2 \\
= \;\; & l_x l_y \underbrace{[\partial_x f_y - \partial_y f_x]}_{(\vec{\nabla}\times\vec{f})_z} + l_x O(l_x, l_y)^2 + l_y O(l_x, l_y)^2 \\
= \;\; & \int_{-l_x/2}^{l_x/2} dx \int_{-l_y/2}^{l_y/2} dy \left(\vec{\nabla}\times\vec{f}\right)_z + l_x O(l_x, l_y)^2 + l_y O(l_x, l_y)^2
\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass der Stokessche Satz für ein infinitesimal kleines Rechteck erfüllt ist. Das Resultat kann durch Koordinatendrehung auf beliebig orientierte Rechtecke verallgemeinert werden.

Nun müssen wir zeigen, dass dieser Satz auch für beliebige Flächen gilt. Dazu zerlegen wir diese Fläche in viele kleine Flächenelemente. Man überzeugt sich leicht, dass sich die Linienintegrale an den Kanten, auf denen zwei Flächenelemente zusammenstoßen, wegheben. Die Linienintegrale auf der Außenseite der Fläche lassen sich zu einem einzelnen Linienintegral zusammenfügen.

Zu beachten ist noch ob der Term $l_x O(l_x, l_y)^2 + l_y O(l_x, l_y)^2$ verschwindet, wenn wir die Flächenintegrale verschwindent klein machen. Davon kann man sich anhand eines Dimensionsarguments überzeugen. Betrachte eine Fläche mit den Seitenlängen L. Jede Seite der Fläche werde in N Teile zerlegt, sodass N^2 Flächenelemente mit der Seitenlänge L/N entstehen. Wir erhalten also N^2 mal einen Fehler der Ordnung $(\frac{1}{N})^3$. Der Gesamtfehler verschwindet also für $N \to \infty$.

D.14.5 Zerlegung eines Vektorfeldes in ein Divergenzfreies Feld und ein Rotationsfreies Feld

Jedes beliebige Vektorfeld kann in ein Gradientenfeld, das keine Rotation besitzt, und ein divergenzfreies Feld zerlegt werden.

`Editor: Mehr hier!`

D.14.6 Helmholtz Theorem

`Editor: In bearbeitung: Das ist noch nicht wasserdicht!`

Helmholtz Theorem (Hauptsatz der Vektoranalysis) sagt, dass man jedes Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$ in eine wirbelfreies Feld $\vec{G}(\vec{r})$, d.h. $\vec{\nabla}\times\vec{G}=0$, und ein quellenfreies Feld $\vec{H}(\vec{r})$, d.h. $\vec{\nabla}\vec{H}=0$, zerlegen kann, wenn sein Betrag $|\vec{F}(\vec{r})|$ im Unendlichen wie $\frac{1}{r^2}$ oder schneller verschwindet

$$|\vec{F}(\vec{r}) \overset{|\vec{r}|\to\infty}{=} O(\frac{1}{|r^2|}) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F}(\vec{r})=\vec{G}+\vec{H}$$
$$\text{mit} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{G}=0 \qquad \text{und} \qquad \vec{\nabla}\vec{H}=0$$

Dabei kann das rotationsfreie Feld $\vec{G}$ als Gradient $\vec{G}=\vec{\nabla}U$ eines skalaren Potentials $U(\vec{r})$ und $\vec{H}$ als Rotation $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ eines Vektorfeldes $\vec{A}$ dargestellt werden

Die Funktionen $U(\vec{r})$ und $\vec{A}(\vec{r})$ erfüllen die Poissiongleichungen

$$\vec{\nabla}^2U=\nabla\vec{F}$$
$$\vec{\nabla}^2\vec{A}=-\nabla\times\vec{F}$$

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/erlaeuterung/erlaeuterung441/

Beweis:

1. Wir beginnen damit, das wirbelfreie Vektorfeld $\vec{G}$ zu konstruieren. Bestimme zunächst $U(\vec{r})$ aus

$$\nabla^2U=\vec{\nabla}\vec{F}$$

   Das Potential $U(\vec{r})$ ist bis auf eine Lösung $U_{hom}(\vec{r})$ der homogenen Gleichung, der Laplacegleichung $\vec{\nabla}^2U_{hom}=0$, festgelegt.

2. Nun bestimme

$$\vec{G}(\vec{r})\overset{\text{def}}{=}\vec{\nabla}U$$

   $\vec{G}(\vec{r})$ ist wegen $\nabla\times\vec{G}=\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}U=0$ wirbelfrei.[8] Das Vektorfeld $\vec{G}(\vec{r})$ ist bis auf ein divergenz- und rotationsfreies Feld $\vec{G}_{hom}=\vec{\nabla}U_{hom}$ eindeutig, weil $\vec{\nabla}\vec{G}_{hom}=\vec{\nabla}^2U_{hom}=0$ und $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}U=0$.

3. Wir ziehen das Feld $\vec{G}$ vom Vektorfeld $\vec{F}$ ab und zeigen, dass die Divergenz des restlichen Feldes verschwindet.

$$\vec{H}\overset{\text{def}}{=}\vec{F}-\vec{G}$$

$$\vec{\nabla}\vec{H}=\vec{\nabla}\vec{F}-\vec{\nabla}\underbrace{\vec{G}}_{\vec{\nabla}U}=\vec{\nabla}\vec{F}-\underbrace{\vec{\nabla}^2U}_{\vec{\nabla}\vec{F}}=0$$

[8] Dies folgt direkt aus der Eigenschaft des Levi-Civita Symbols

$$(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla})_i=\sum_{j,k}\underbrace{\epsilon_{i,j,k}}_{=-\epsilon_{i,k,j}}\underbrace{\partial_j\partial_k}_{\partial_k\partial_j}=-\sum_{k,j}\epsilon_{i,k,j}\partial_k\partial_j$$

. Da der Operator mit seinem Negativen identisch ist, verschwindet sie.

4. Die Lösungen für $\vec{G}(\vec{r})$ und $\vec{H}(\vec{r})$ besitzen immer noch die Freiheit ein wirbel- und quellenfreies Feld $\vec{G}_{hom}$ zu addieren.
$$\vec{G}' = \vec{G} + \vec{\nabla} U_{hom} \qquad \vec{H}' = \vec{H} - \vec{\nabla} U_{hom}$$
Wählen wir U_{hom} derart, dass U im Unendlichen verschwindet, dann ist U_{hom} eindeutig bestimmt. Daraus folgt, dass auch die Vektorfelder $\vec{G}$ und $\vec{H}$ eindeutig sind.

D.14.7 Totales Differential

Das totale Differential kann man sich als Ableitung einer skalaren Funktion entlang eines Pfades vorstellen. Das infinitesimale Bahnsegment ist dabei $d\vec{x}$.

Dasselbe in unterschiedlichen Schreibweisen
$$\begin{aligned}
\frac{df(\vec{x}(t),t)}{dt} &= \Big[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\vec{x}(t)} \dot{x}_i\Big] + \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{\vec{x}(t)} \\
\frac{df}{dt} &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \\
df &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt \\
df &= d\vec{x}\vec{\nabla} f + \frac{\partial f}{\partial t} dt
\end{aligned}$$

Eine praktische Anwendung findet das totale Differential bei der Bestimmung der Arbeit ΔW, die von einem Potential an einem Teilchen verrichtet wird, das sich auf einer Bahn $x(t)$ bewegt.
$$\Delta W = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x}\,\vec{F} = -\int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x}\,\vec{\nabla} V = -\int_{t_1}^{t_2} dt\,\frac{d\vec{x}}{dt}\vec{\nabla} V,$$
Beachte, dass wir für ein Bahintegral im Allgemeinen auch den Weg festlegen müssen. Nur wen das Bahnintegral wegunabhängig ist, reicht es aus, nur die Endpunkte $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ anzugeben.

D.15 Taylor-Entwicklung

D.15.1 Eindimensionale Taylor-Entwicklung

Eine beliebig oft differenzierbare Funktion kann wie folgt in eine Potenzreihe entwickelt werden, die sogenannte **Taylorreihe**
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n f}{dx^n}|_{x_0}(x-x_0)^n \tag{D.78}$$
$$= f(x_0) + \frac{df}{dx}|_{x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}|_{x_0}(x-x_0)^2 + O(x-x_0)^3. \tag{D.79}$$
Diese Identität gilt nur innerhalb eines Konvergenzradius r_c, d.h. für $|x-x_0| < r_c$. Der Konvergenzradius hängt vom Entwicklungspunkt x_0 ab. Typischerweise ist der Konvergenzradius der Abstand des Entwicklungspunktes von der nächsten Diskontinuität oder Polstelle.

Der Begriff $O(x-x_0)^3$ bedeutet Terme der Art $(x-x_0)^n$ mit $n \geq 3$. Wir sagen "Terme der Ordnung $(x-x_0)^3$ und höher".

Die Bedeutung der Taylor-Reihe liegt darin, dass die Terme niedriger Ordnung bei hinreichend kleinen Abweichungen vom Entwicklungspunkt dominieren. Man erhält also eine gute Näherung in einer kleinen Umgebung von x_0, obwohl man alle Terme ab einer gewissen Ordnung n_{max} vernachlässigt.

D.15.2 Mehrdimensionale Taylor-Entwicklung

Die mehrdimensionale Verallgemeinerung der Taylor-Entwicklung hat die Form

$$f(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1,\dots,i_n}^{D} \left[\frac{d^n f}{dx_{i_1} \dots dx_{i_n}} |_{\vec{X}} \prod_{j=1}^{n} (x_{i_j} - X_{i_j}) \right] \tag{D.80}$$

$$= f(\vec{X}) + \sum_{i}^{D} \frac{df}{dx_i} |_{\vec{X}} (x_i - X_i) \tag{D.81}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{D} \frac{d^2 f}{dx_i dx_j} |_{\vec{X}} (x_i - X_i)(x_j - X_j) + O(|\vec{x} - \vec{X}|)^3 \tag{D.82}$$

wobei $\vec{X}$ der Entwicklungspunkt und D die Dimension des Vektors $\vec{x}$ ist. Wiederum gilt die Identität nur innerhalb vom Konvergenzradius r_c, d.h. für $|\vec{x} - \vec{X}| < r_c|$.

D.16 Least-square Fit

Die Methode der minimalen quadratischen Abweichung wird verwendet, um Funktionen optimal an Daten anzupassen.

Stellen wir uns zum Beispiel ein Infrarotspektrum vor. Für eine unbekannte Substanzmischung haben wir die Datenpunkte der Absorption erhalten. Die Spektren der möglicherweise darin enthaltenen Substanzen seien bekannt. Es gilt aber jetzt zu bestimmen, welche dieser Substanzen in welchem Verhältniss in der Mischung vorhanden sind. Als zusätzliche Schwierigkeit muss berücksichtigt werden, dass die Datenpunkte einen experimentellen Fehlerbalken besitzen.

Seien $g_i(x)$ die Einzelspektren als Funktion der Frequenzen x. Wir verwenden das Symbol x, um auf das allgemeine Prinzip hinzuweisen. Die Datenpunkte der Substanzmischung seien $f_i = f(x_i)$.

Das Spektrum der Substanzmischung kann idealerweise durch eine Superposition der Einzelspektren dargestellt werden

$$f(x) \approx \sum_i g_i(x) F_i \tag{D.83}$$

Wir bestimmen die Koeffizienten F_i, so dass die quadratische Abweichung $Q(\vec{F})$ minimal wird.

$$Q(F_1, \dots, F_N) = \sum_i \left(f(x_i) - \sum_j g_j(x_i) F_j \right)^2$$

Wie nennen diese Funktion Penalty-Funktion[9]. Sie bestraft also die Abweichung. Sie verschwindet, wenn die Superposition exakt durch die Datenpunkte passt. Je größer der Wert der Penalty-Funktion, desto schlechter können die Einzelspektren das Gesamtspektrum beschreiben.

Um das Minimum zu finden, bestimmen wir die Nullstelle des Gradienten:

$$\begin{aligned}
\frac{dQ}{dF_k} &\stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow 0 &= \sum_i 2 \left(f(x_i) - \sum_j g_j(x_i) F_j \right) (-g_k(x_i)) \\
&= -2 \underbrace{\sum_i g_k(x_i) f(x_i)}_{b_k} + 2 \sum_j \underbrace{\sum_i g_k(x_i) g_j(x_i)}_{A_{k,j}} F_j
\end{aligned}$$

[9]Penalty=Bestrafung

Dies entspricht einem linearen Gleichungssystem für die Koeffizienten F_j

$$\boldsymbol{A}\vec{F} = \vec{b} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F} = \boldsymbol{A}^{-1}\vec{b}$$

wobei

$$A_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i g_i(x_i) g_j(x_i)$$

und

$$b_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i g_i(x_i) f(x_i)$$

Mit diesen Koeffizienten erhalten wir die beste Anpassung an die Funktion $f(x)$ durch Gl D.83. Dies ist das Prinzip der minimalen quadratischen Abweichung.

D.17 Fouriertransformation

Die **Fouriertransformation** ist ein zentrales Hilfsmittel der Theoretischen Physik.

D.17.1 Darstellung einer Funktion $f(x)$ durch einen Funktionensatz $\{g_i(x)\}$

Die Fouriertransformation ist nur ein Beispiel für eine Entwicklung einer Funktion in einen Funktionensatz. Andere Beispiele sind Besseltransformationen und Laplacetransformationen. Quantenmechanische Rechnungen sind ohne die Entwicklung in spezielle Funktionensätze undenkbar. Deshalb wird hier zunächst das allgemeine Prinzip dargestellt. Anschließend werden wir das Prinzip auf die Fouriertransformation spezialisieren.

Es sei ein beliebiger Satz von komplexen Funktionen $g_i(x)$ gegeben. Idealerweise ist ein solcher Funktionensatz "vollständig", was bedeutet, dass jede beliebige Funktion exakt durch einen solchen Funktionensatz darstellbar ist.

Wir suchen also eine Darstellung der Funktion $f(x)$ in der Form

$$f(x) \approx \sum_i g_i(x) \cdot F_i \tag{D.84}$$

mit den Entwicklungskoeffizienten F_i. Man bestimmt F_i so, dass die kleinste quadratische Abweichung[10] Q minimal wird.

Die quadratische Abweichung $Q(F_i)$ ist wie folgt definiert:

$$Q\big(\{F_i\}\big) = \int \Big| f(x) - \sum_i g_i(x) \cdot F_i \Big|^2 \, dx \stackrel{!}{=} \min$$

Siehe hierzu Abb. D.13.

Aus der Minimalbedingung von Q folgt:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial Q}{\partial F_i^*} &= \int \Big[f(x) - \sum_j g_j(x) F_j \Big] \Big[-g_i^*(x) \Big] \, dx \\ \Rightarrow \underbrace{\int g_i^*(x) f(x) \, dx}_{b_i} &= \sum_j \underbrace{\int g_i^*(x) g_j(x) \, dx}_{S_{ij}} F_j \end{aligned} \tag{D.85}$$

[10] Anpassung mit kleinster quadratischer Abweichung= Engl.: least square fit

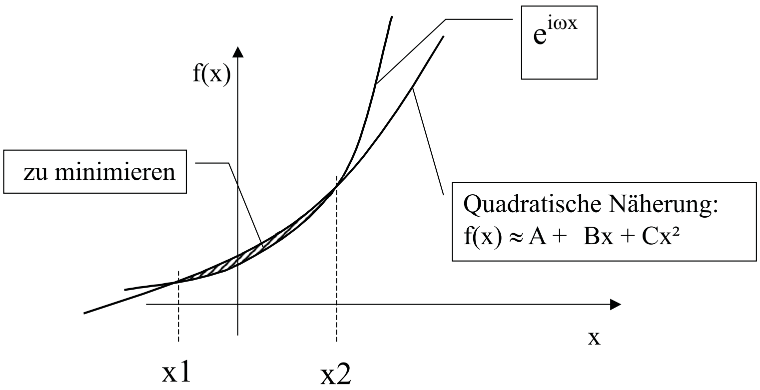


Abb. D.13: Näherungsfunktion $f(x)$. Editor: Diese Figur muss überarbeitet werden; Beschriftung $e^{i\omega x}$ muss weg.

In Matrixschreibweise:

$$\vec{b} = \boldsymbol{S}\vec{F} \Rightarrow \vec{F} = \boldsymbol{S}^{-1}\vec{b}$$

Wir nennen die Matrix $\boldsymbol{S}$ mit

$$S_{i,j} = \int dx\; g_i^*(x) g_j(x) \tag{D.86}$$

die **Überlappmatrix**.

Mit der Inversen der Überlappmatrix[11] erhalten wir den Ausdruck für die Entwicklungskoeffizienten F_i:

$$F_i = \sum_j \boldsymbol{S}_{ij}^{-1} \int g_j^*(x) f(x)\; dx \tag{D.87}$$

Einsetzen in Gl. D.84 liefert die beste Anpassung der Funktion $f(x)$ durch das Funktionensystem

$$f(x) \cong \sum_{ij} g_i(x) S_{ij}^{-1} \int dx\; g_j^*(x) f(x) \tag{D.88}$$

mit der Überlappmatrix aus Gl. D.86.

Die Identität gilt dann exakt, wenn der gewählte Funktionensatz vollständig im Raum stetiger und quadratintegrierbarer Funktionen ist und die Funktion stetig ist.

D.17.2 Fouriertransformation einer periodischen Funktion

Wir betrachten der Einfachheit halber zunächst nur periodische Funktionen.

Eine Funktion $f(x)$ heißt **periodisch**, wenn es eine Zahl L gibt, sodass $f(x+L) = f(x)$ für alle x gilt.

Die Fouriertransformation verwendet als Funktionensatz ebene Wellen

$$g_n(x) = Ce^{ik_n x} \qquad \text{wobei} \qquad k_n = \frac{2\pi}{L} n \tag{D.89}$$

[11]Beachte, dass $S_{i,j}^{-1}$ als Matrixelement der Inversen Matrix $(\boldsymbol{S}^{-1})_{i,j}$ und nicht als Inverses des Matrixelements $\frac{1}{S_{i,j}}$ zu lesen ist.

Dabei sind die n ganze Zahlen. Die k_n werden **reziproke Gitterpunkte** genannt. Die Bedingung für die erlaubten Werte der k_n folgt daraus, dass die zugelassenen ebenen Wellen die vorgeschriebene Periodizität besitzen müssen.

Wir überprüfen, ob die Testfunktionen $g_n(x)$ periodisch sind:

$$g_n(x+L) = Ce^{ik_nx}\underbrace{e^{ik_nL}}_{1} = Ce^{ik_nx} = g_n(x)$$

Die **Überlappmatrix *S*** der Testfunktionen $g_n(x)$ ergibt sich aus Gl. D.85 als:

$$S_{n,m} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} g_n^*(x)g_m(x)\,dx = |C|^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{i(k_m-k_n)x}\,dx$$

Fallunterscheidung für n und m:

$$S_{n=m} = |C|^2 \cdot L$$
$$S_{n\neq m} = |C|^2 \cdot \frac{1}{i(k_m-k_n)}\Big[\underbrace{e^{i(k_m-k_n)L}}_{=1} - \underbrace{e^{i(k_m-k_n)0}}_{=1}\Big] = 0$$

Daraus folgt:

$$S_{n,m} = |C|^2 \cdot L\,\delta_{n,m} \qquad \text{(Orthogonalität)}$$

Da die Überlappmatrix $\boldsymbol{S}$ diagonal ist, lässt sie sich leicht invertieren.

$$S^{-1}_{n,m} = \frac{1}{|C|^2L}\,\delta_{n,m}$$

Einsetzen von $\boldsymbol{S}^{-1}$ in Gl. D.88 ergibt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n,m} g_n(x)S^{-1}_{nm}\int dx\; g_m^*(x)f(x) \\ &= \sum_{n,m}\underbrace{Ce^{ik_nx}}_{g_n(x)}\underbrace{\frac{\delta_{n,m}}{|C|^2L}}_{S^{-1}_{nm}}\int dx\;\underbrace{C^*e^{-ik_mx}}_{g_m^*(x)}f(x) \\ &= \sum_n Ce^{ik_nx}\underbrace{\frac{1}{CL}\int dx\; e^{-ik_nx}f(x)}_{F_n} \end{aligned}$$

So erhält man die diskrete Fouriertransformation

$$f(x) = C\sum_n e^{ik_nx}F_n \tag{D.90}$$

$$F_n = \frac{1}{CL}\int dx\; e^{-ik_nx}f(x) \tag{D.91}$$

wobei die zweite Gleichung die **Vorwärtstransformation** und die erste die **Rückwärtstransformation** genannt wird.

Konventionen für die Faktoren in der Fourier Transfomation

Etwas verwirrend ist die Vielzahl von Konventionen bei Fouriertransformationen. So kann der Faktor C beliebig gewählt werden, und außerdem kann das Vorzeichen von k_n vertauscht werden.

1. $C = 1$: einfacher Funktionensatz: $g_n = e^{ik_n x}$
2. $C = \frac{1}{\sqrt{L}}$ symmetrische Form $g_n = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_n x}$

Wir werden die Konvention mit dem einfachen Funktionensatz übernehmen.

DISKRETE FOURIERTRANSFORMATION

$$f(x) = \sum_n e^{ik_n x} F_n \tag{D.92}$$

$$F_n = \frac{1}{L} \int dx\; e^{-ik_n x} f(x) \tag{D.93}$$

Dabei ist Gl. D.93 die Vorwärtstransformation und Gl. D.92 die Rückwärtstransformation. Die diskrete Fouriertransformation erfordert Periodizität der Funktion $f(x)$

$$f(x+L) = f(x)$$

Die diskreten Werte k_n sind

$$k_n = \frac{2\pi}{L} n$$

wobei n eine ganze Zahl ist.

D.17.3 Fouriertransformation für allgemeine Funktionen

Man lasse die Periode L gegen Unendlich laufen ($L \to \infty$). Dann liegt eine nichtperiodische Funktion vor.

Abstand der reziproken Gitterpunkte:

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} k_{n+1} - k_n \stackrel{Gl.\ D.89}{=} \frac{2\pi}{L}$$

Diskrete Fouriertransformation im Grenzfall unendlicher Periode $L \to \infty$:

$$f(x) \stackrel{Gl.\ D.90}{=} \frac{C}{\Delta} \underbrace{\sum_n \Delta}_{\int dx} e^{ik_n x} F_n \stackrel{\Delta \to 0}{\Rightarrow} f(x) = \frac{C}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} dk\; e^{ikx} F(k)$$

$$\underbrace{F_n}_{F(k_n)} \stackrel{Gl.\ D.91}{=} \frac{1}{2\pi C} \underbrace{\frac{2\pi}{L}}_{\Delta} \int dx\; e^{-ik_n x} f(x) \longrightarrow F(k) = \frac{\Delta}{2\pi C} \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-ikx} f(x)$$

Um den Grenzübergang $\Delta \to 0$ bilden zu können, muss C mit Δ skaliert werden. Deshalb führen wir ein neues Symbol $\tilde{C} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{C}{\Delta}$ ein.

$$f(x) = \tilde{C} \int_{-\infty}^{\infty} dk\; e^{ikx} F(k)$$

$$F(k) = \frac{1}{2\pi\tilde{C}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-ikx} f(x)$$

Wiederum gibt es zwei übliche Konventionen, nämlich

- den einfachen Funktionensatz mit

$$\tilde{C} = \frac{1}{2\pi} \qquad \text{sodass} \qquad g_k(x) = \mathrm{e}^{ikx}$$

- und die symmetrische Form mit

$$\tilde{C} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad \text{sodass} \qquad g_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{ikx}$$

In der Physik hat sich im Gegensatz zur Mathematik die Konvention mit dem einfachen Funktionensatz durchgesetzt. Wenn man also in Tabellen nachschlägt, ist es wichtig, immer die gewählte Konvention zu beachten.

KONTINUIERLICHE FOURIERTRANSFORMATION

$$f(x) = \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx} F(k) \tag{D.94}$$

$$F(k) = \int dx\, e^{-ikx} f(x) \tag{D.95}$$

D.17.4 Einige Sätze zur Fouriertransformation

Umkehrsatz

Der Umkehrsatz sagt, dass die Rücktransformation in eine Vorwärtstransformation umgewandelt werden kann.

$$f(x) = \int \frac{dk}{2\pi} F(k) e^{ikx} \qquad \Leftrightarrow \qquad F(x) = \int \frac{dk}{2\pi} \left[2\pi f(-k)\right] e^{ikx} \tag{D.96}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int \frac{dk}{2\pi} F(k) e^{ikx} \\
\stackrel{FT}{\Rightarrow} F(k) &= \int dx f(x) e^{-ikx} \\
\stackrel{x \leftrightarrow k}{\Rightarrow} F(x) &= \int dk f(k) e^{-ixk} = \int \frac{dk}{2\pi} 2\pi f(k) e^{-ikx} \\
\stackrel{k \to -k}{\Rightarrow} F(x) &= \int \frac{dk}{2\pi} 2\pi f(-k) e^{ikx}
\end{aligned}$$

Beachte, dass im letzten Schritt dk in $-dk$ übergeht, was einen Faktor -1 verursacht. Auf der anderen Seite werden auch die Integrationsgrenzen vertrauscht, was diesen Faktor kompensiert.

Verschiebungssatz

Der **Verschiebungssatz** sagt, dass die Verschiebung einer Funktion im Realraum der Multiplikation der Fouriertransformierten im reziproken Raum entspricht.

$$g(x) = f(x-a) \Leftrightarrow G(k) = F(k) e^{-ika} \tag{D.97}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
G(k) &= \int dx g(x) e^{-ikx} = \int dx f(x-a) e^{-ikx} \stackrel{y=x-a}{=} \int dy f(y) e^{-ik(y+a)} \\
&= \left[\int dy f(y) e^{-iky}\right] e^{-ika} = F(k) e^{-ika}
\end{aligned}$$

Der Umkehrsatz erlaubt eine weitere nützliche Aussage zu treffen, nämlich, dass die Multiplikation einer Funktion im Realraum mit einer ebenen Welle einer Verschiebung im reziproken Raum entspricht.

$$g(x) = f(x)e^{ikx} \Leftrightarrow G(k) = F(k)e^{-ika} \tag{D.98}$$

Beweis:

$$G(k) = \int dx g(x)e^{-ikx} = \int dx f(x)e^{iax}e^{-ikx} = \int dx f(x)e^{-i(k-a)x} = F(k-a)$$

Skalierungssatz

Der Skalierungssatz sagt, dass die Fouriertransformierten einer glatten Funktion stark am Ursprung $k = 0$ lokalisiert ist, d.h. die Fouriertransformierte liefert nur in der Nähe des Ursprungs wesentliche Beiträge.

$$g(x) = f(ax) \Leftrightarrow G(k) = \frac{1}{a}F(k/a) \tag{D.99}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} G(k) &= \int dx g(x)e^{-ikx} = \int dx f(ax)e^{-ikx} \overset{y=ax;dy=adx}{=} \frac{1}{a}\int dy f(y)e^{-iky/a} \\ &= \left[\frac{1}{a}\int dy f(y)e^{-i(k/a)y}\right] = \frac{1}{a}F(k/a) \end{aligned}$$

Faltungssatz

Der Faltungssatz sagt, dass eine Faltung durch die Fouriertransformation in ein Produkt übergeht.

$$h(x) = \int g(x-x')f(x')\,dx' \Leftrightarrow H(k) = G(k)F(k) \tag{D.100}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} H(k) &= \int dx h(x)e^{-ikx} = \int dx \int dx' g(x-x')f(x')e^{-ikx} \\ &= \int dx \int dx' g(x-x')e^{-ik(x-x')}f(x')e^{-ikx'} \\ &= \int dx' f(x')e^{-ikx'} \int dx g(x-x')e^{-ik(x-x')} \\ &\overset{y=x-x'}{=} \int dx' f(x')e^{-ikx'} \int dy g(y)e^{-ik(y)} = G(k)F(k) \end{aligned}$$

Ableitung

Eine Ableitung im Realraum entspricht einer Multiplikation mit ik im Fourierraum

$$g(x) = \partial_x f(x) \Leftrightarrow G(k) = ikF(k) \tag{D.101}$$

Eine Voraussetzung ist, dass die Funktion im Unendlichen verschwindet.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
G(k) &= \int dx g(x) e^{-ikx} = \int dx (\partial_x f(x)) e^{-ikx} \\
&= \int dx \left[\partial_x (f(x)\mathrm{e}^{-ikx}) - f(x)(\partial_x e^{-ikx})\right] \\
&= \underbrace{\int dx \partial_x (f(x)\mathrm{e}^{-ikx})}_{=0 \text{ wenn } f(x)-f(-x)\to 0 \text{ für } x\to\infty} - \int dx f(x)(\partial_x \mathrm{e}^{-ikx}) \\
&= -\int dx f(x)(-ik\mathrm{e}^{-ikx}) = ik \int dx f(x) e{-}ikx = ikF(k)
\end{aligned}
$$

D.17.5 Zusammenstellung von Rechenregeln

Eine Tabelle weiterer Fouriertransformationen findet man in mathematischen Tabellenwerken wie den Bronstein.[5] Es ist allerdings immer zu beachten wie die Fouriertransformation definiert wurde!

$$
\begin{aligned}
f(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} F(k) &\Leftrightarrow F(k) = \int dx\ e^{-ikx} f(x) \\
g(x) = \partial_x f(x) &\Leftrightarrow G(k) = ikF(k) \\
h(x) = \int g(x-x')f(x')\ dx' &\Leftrightarrow H(k) = G(k)F(k) \\
g(x) = f(ax) &\Leftrightarrow G(k) = \frac{1}{a} F(k/a) \\
g(x) = af(x) &\Leftrightarrow G(k) = aF(k) \\
h(x) = f(x) + g(x) &\Leftrightarrow H(k) = F(k) + G(k) \\
g(x) = f(x+a) &\Leftrightarrow G(k) = F(k)e^{ika} \\
g(x) = xf(x) &\Leftrightarrow G(k) = i\partial_k F(k) \\
g(x) = f(x)e^{ik_0 x} &\Leftrightarrow G(k) = F(k-k_0) \\
f(x) = 1 &\Leftrightarrow F(k) = 2\pi\delta(k) \\
f(x) = \delta(x) &\Leftrightarrow F(k) = 1 \\
f(x) = e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\alpha})^2} &\Leftrightarrow F(k) = \sqrt{2\pi}\alpha e^{-\frac{\alpha^2 k^2}{2}} \\
\mathrm{Im}[f(x)] = 0 &\Leftrightarrow F(k) = F^*(-k) \\
\int f(x) dx &= F(k=0)
\end{aligned}
$$

Mit $\mathrm{Im}[c]$ wird der Imaginärteil von c bezeichnet.

- Funktionen, die im Realraum sehr ausgedehnt und glatt sind, sind im reziproken Raum am Ursprung lokalisiert.
- Die Vorwärtstransformation kann durch Umformung aus der Rücktransformation gewonnen werden.

D.18 Funktionale

Funktionale sind für den Studenten zunächst etwas abschreckende Objekte. Dabei sind sie ganz einfach als Verallgemeinerungen allbekannter Konzepte zu verstehen.

Deshalb wollen wir hier die Funktionale im Zusammenhang mit Ihrem “Stammbaum” darstellen. Dieser Stammbaum führt von Vektoren, über Funktionen und Funktionen von mehreren Variablen zu Funktionalen. Das verbindende Element ist dass wir alle Objekte in diesem Stammbaum als Abbildungen begreifen koennen. Schließlich machen wir nur einen diskreten Index kontinuierlich, um auf den Begriff des Funktionals zu kommen.

D.18.1 Vektoren und Funktionen als Abbildungen

Hier betrachten wir eine Reihe von mathematischen Objekten als Abbildungen.

1. Ein **Vektor** ordnet jeder Zahl i aus einem diskreten Zahlenbereich eine Zahl v_i zu:

$$\vec{f} : i \to f_i; \qquad \text{Beispiel:} \qquad \vec{f} = (1, 4, 9)$$

2. Eine **Funktion** ordnet jeder Zahl aus einem kontinuierlichen Zahlenbereich eine Zahl zu:

$$f(t) : t \to f(t); \qquad \text{Beispiel:} \qquad f(t) = t^2$$

3. Eine **Funktion eines Vektors**: ordnet einem N-tupel von Zahlen, also einem Vektor, eine Zahl zu.

$$f(\vec{x}) : \vec{x} \to f(\vec{x}); \qquad \text{Beispiel:} \qquad f(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

4. Ein **Funktional** ordnet jeder Funktion aus einem Funktionenraum eine Zahl zu:

$$F[x(t)] : x(t) \to F[x(t)]; \qquad \text{Beispiel:} \qquad F[x(t)] = \int_a^b x^2(t)\, dt$$

Der Schlüssel zur Erklärung ist, eine Funktion als einen Vektor mit kontinuierlichen Indizes aufzufassen. Der Zusammenhang wird deutlich, wenn die Funktion wie in Abb. D.14 diskretisiert dargestellt wird. Dazu wählen wir einen Satz von Stützstellen im Intervall $[t_a, t_b]$ wie z.B.:

$$t_i = t_a + \Delta(i - 1)$$

wobei $\Delta = \frac{t_b - t_a}{N-1}$ der Abstand der Stüztstellen ist und N die Anzahl der Stützstellen. Die Funktionswerte

$$f_i \stackrel{\text{def}}{=} f(t_i)$$

bilden zusammen einen N-dimensionalen Vektor. Erhöhen wir die Anzahl der Stützstellen koennen wir die Funktion beliebig genau darstellen.

Funktionale sind im Allgemeinen Integrale oder Funktionen von Integralen.

D.18.2 Funktionalableitungen

Ein weiteres Konzept ist die **Funktionalableitung**. Wir wollen dieses Konzept wieder über die Analogie zwischen Vektor und Funktion erklären. Dadurch wird die Funktionalableitung zu einer natürlichen Verallgemeinerung der partiellen Ableitung.

Bilden wir den Gradienten einer Funktion eines Vektors, dann erhalten wir wiederum einen Vektor. Wir köennen die Änderung einer Vektorfunktion mit Hilfe des Gradienten in erster Ordnung in der Abweichung von einem Aufpunkt darstellen

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + (\vec{x} - \vec{x}_0)\, \vec{\nabla}\Big|_{\vec{x}_0} f + O(d\vec{x}^2) \tag{D.102}$$

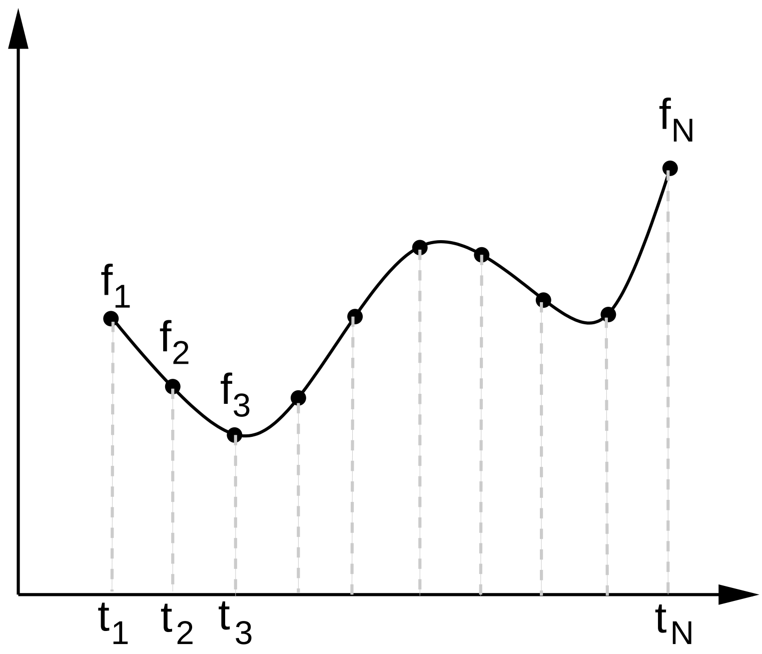


Abb. D.14: Der Zusammenhang zwischen einer Funktion und einem Vektor wird deutlich, wenn man die Funktion diskretisiert, und als N-tupel von Funktionswerten an den N Stützstellen darstellt.

Wir bezeichnen

$$d\vec{x} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{x} - \vec{x}_0$$

als Variation des Arguments $\vec{x}$ und

$$df \stackrel{\text{def}}{=} f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)$$

als Variation der Funktion.

Wir schreiben als Gl. D.102 in der Form

$$f(\vec{x}_0 + d\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \underbrace{d\vec{x}\ \vec{\nabla}\big|_{\vec{x}_0} f}_{df} + O(d\vec{x}^2)$$

$$df = d\vec{x}\vec{\nabla} f = \sum_{i=1}^{N} dx_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Ersetzen wir die Variation des Arguments durch $dx_i = \lambda\delta_{i,j}$ erhalten wir eine direkte Definition der Partiellen Ableitung.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\vec{x}_0} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\{x_j + \lambda\delta_{j,i}\}) - f(\{x_j\})}{\lambda}$$

Jetzt gehen wir analog vor um die Variation des Funktionals zu bestimmen.

$$F[x(t) + dx(t)] = F[x(t)] + \int dt\ dx(t) \frac{\delta F}{\delta x(t)} + O(\delta x(t)^2)$$

$$\begin{aligned} F[x(t) + \lambda\,\delta(t - t_0)] - F[x(t)] &= \int dt\ \lambda\ \delta(t - t_0) \frac{\delta F}{\delta x(t)} + O(\lambda^2) \\ &= \lambda\ \left.\frac{\delta F}{\delta x(t_0)}\right|_{[x(t)]} + O(\lambda^2) \end{aligned}$$

Also gilt

$$\left.\frac{\delta F}{\delta x(t_0)}\right|_{[x(t)]} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{F[x(t) + \lambda\, \delta(t - t_0)] - F[x(t)]}{\lambda} \tag{D.103}$$

D.19 Deltafunktion

Abb. D.15: Paul Dirac, 1902-1984

Die **Deltafunktion** ist streng genommen keine Funktion, sondern eine Distribution. Distributionen sind die Grenzwerte konvergenter Funktionenreihen, deren Grenzwert selbst keine Funktion ist. Die von Paul Dirac[12] eingeführte Deltafunktion war wahrscheinlich die erste Distribution. Deshalb wird die Deltafunktion auch als Dirac-Funktion bezeichnet. Heute ist die Distributionentheorie ein Zweig der Mathematik, dessen Grundlage vom Mathematiker L. Schwartz gelegt wurde. 1950 erhielt Schwartz für diese Entwicklung die Fields Medaille, die höchste Auszeichnung für einen Mathematiker. Eine gute Lektüre ist das Buch "Einführung in die Theorie der Distributionen" von Wolfgang Walter[31].

Wir beginnen mit der Definition der Deltafunktion

Definition D.10 *DELTAFUNKTION*
Die Deltafunktion ist dadurch definiert, dass für alle stetigen und beliebig oft differenzierbare Funktionen f(x) der folgende Zusammenhang gilt:

$$\int \delta(x - x_0) f(x)\, dx = f(x_0)$$

Einige Eigenschaften der Deltafunktion sind:

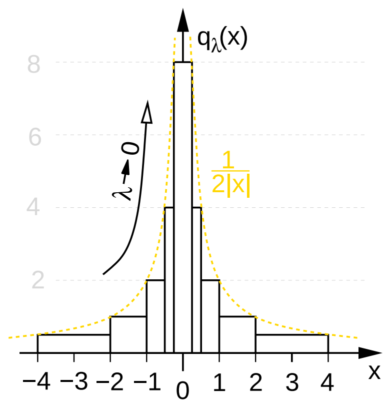
1. Die Deltafunktion kann als Grenzwert einer Funktionenfolge $q_\lambda(x)$ dargestellt werden. Die Glieder $q_\lambda(x)$ haben die Eigenschaften

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_\lambda(x)\, dx = 1$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \left\{ q_\lambda(x \neq 0) \right\} = 0$$

Ein Beispiel für eine solche Funktionenfolge sind Stufenfunktionen

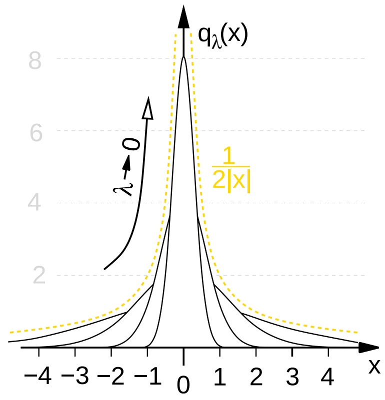
$$q_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda} & \text{für } |x| < \lambda \\ 0 & \text{für } |x| > \lambda \end{cases}$$



Ein weiteres Beispiel ist eine Folge von normierten Gaussfunktionen

[12] Paul Dirac, 1902-1984 Britischer theoretischer Physiker, Nobelpreis in Physik 1933. Stellte die Dirac Gleichung für die relativistische, quantenmechanische Beschreibung von Elektronen auf.

$$q_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2}$$



2. Es gilt:

$$\delta(x \neq 0) = 0$$
$$\delta(x = 0) = \infty$$

Diese beiden Eigenschaften stellen noch keine Definition der Deltafunktion dar. Es gibt viele Funktionen mit diesen Eigenschaften, welche aber keine Deltafunktion sind.

3. Die Deltafunktion ist eine Verallgemeinerung des Kronecker-Symbols Gl. D.19

$$f_i = \sum_j \delta_{ij} f_j$$

auf kontinuierliche Indizes.

D.19.1 Rechenregeln für die Deltafunktion

1. Folgerung aus der Symmetrie:

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

2. Umgang mit Faktoren

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot \delta(x)$$

3. Beziehung zur Heavisidefunktion $\vartheta(x)$:

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(x')\, dx' = \vartheta(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta(x) = \frac{d}{dx}\vartheta(x)$$

Die Heavisidefunktion $\vartheta(x)$ ist eine Funktion, die in Abb. D.16 dargestellt und wie folgt intervallweise definiert ist:

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

4. Partielle Integration

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dx}\delta(x)\right) f(x - x_0)\, dx = -\left.\frac{d}{dx}\right|_{x_0} f(x)$$

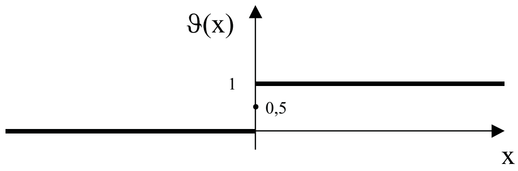


Abb. D.16: Heavisidefunktion $\vartheta(x)$

D.20 Methode der Lagrange-Multiplikatoren

Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren erlaubt es, das Extremum einer Funktion $V(\vec{x})$ bei gegebenen Zwangsbedingungen $G(\vec{x}) \equiv 0$ zu bestimmen.

Die Idee der Methode der Lagrangeschen-Multiplikatoren ist die folgende: Wir betrachten die Funktion $V(\vec{x})$ als Potential. Ausserdem betrachten wir eine Bewegung der Art $\dot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}V$.[13] Diese Bewegung ist so gewählt, dass sie einem Minimum von $V(\vec{x})$ zustrebt.

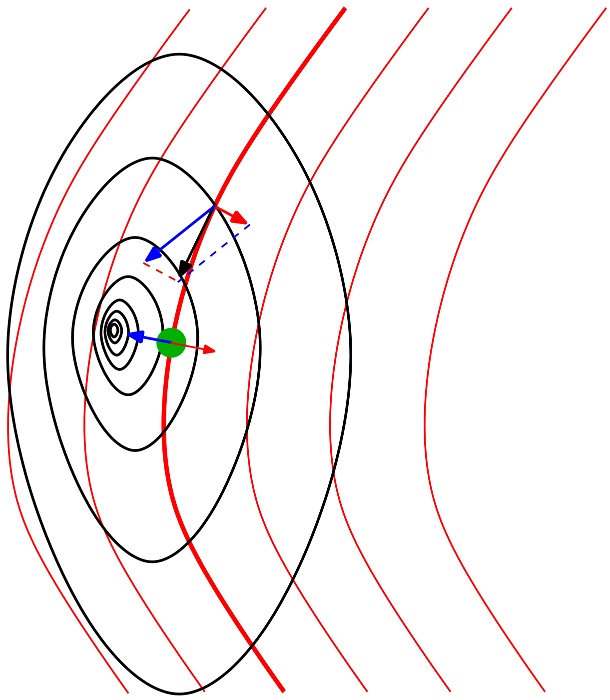


Abb. D.17: Skizze zur Methode der Lagrange Multiplikatoren. Die schwarzen Linien stellen die Äquipotentiallinien der Potentials $V(\vec{x})$ dar. Die roten Linien sind die Äquipotentiallinien der Funktion $G(\vec{x})$, die sie Zwangebedingung über $G(\vec{x}) = 0$ definiert. Auf der dicken rote Linie ist die Zwangsbedingung erfüllt. Das Minimum von $V(\vec{x})$ auf der Hyperfläche, auf der die $G(\vec{x}) = 0$ gilt ist, der dicke grüne Punkt. Die blauen Pfeile stellen gerade die Kräfte des Potentials $V(\vec{x})$ dar, und die roten Pfeiledie Zwangskräfte $\lambda\vec{\nabla}G$.

[13] Beachte, dass dies nicht die Newtonsche Bewegungsgleichung ist, da nur die erste Zeitableitung eingeht. Man kann sich die Bewegungsgleichung aus einer stark gedämpften Bewegung ableiten, die durch die Newtonsche Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}) - \alpha\dot{\vec{x}}$ beschrieben wird. Ist die Reibung sehr groß, dann wird die Geschwindigkeit, und damit auch die Beschleunigung sehr klein. Die Trägheitskräfte sind dann vernachlässigbar, sodass wir die Bewegung durch die Gleichung $\dot{\vec{x}} = \frac{1}{\alpha}\vec{F}(\vec{x})$ approximativ beschreiben können.

Die Zwangsbedingung $G(\vec{x}) = 0$ legt eine Hyperfläche fest, von der die Bahn $\vec{x}(t)$ nicht abweichen darf. Im Allgemeinen treibt die Kraft $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ die Bahn aber aus dieser Hyperfläche heraus, was zur Verletzung der Zwangsbedingung führt.

Um die Bahn auf der Hyperfläche zu halten, müssen zusätzliche **Zwangskräfte** angreifen. Die Zwangskräfte müssen senkrecht auf der Hyperfläche stehen, weil sie sonst die Bewegung in der Hyperfläche beeinflussen würden. Solange die Zwangskräfte senkrecht auf der Hyperfläche stehen, haben sie keine Komponente in der Hyperfläche und nur diese sind für die Bewegung in der Hyperfläche relevant.

Die Funktion $G(x)$, welche gerade die Zwangsbedingung definiert, hat gerade eine Äquipotentialfläche auf der Hyperfläche. Das bedeutet, dass der Gradient $\vec{\nabla G}$ senkrecht auf der Hyperfläche steht. Wir wählen also $-\vec{\nabla G}\lambda$ als Zwangskraft, wobei der **Lagrange-Parameter** λ noch zu wählen ist.

Die Gesamtkraft ist also $-\vec{\nabla}V - \vec{\nabla}G\lambda = -\vec{\nabla}(V + G\lambda)$. Damit die Bahn auf der Hyperfläche bleibt, darf keine Komponente der Gesamtkraft aus der Hyperfläche herauszeigen. Aus dieser Bedingung bestimmen wir den Lagrange-Parameter. Beachte, dass der Lagrange-Parameter vom Ort auf der Hyperfläche abhängt.

Betrachten wir nun das Minimum von $V(\vec{x}$ auf der Hyperfläche[14], dann darf die Gesamtkraft $-\vec{\nabla}(V(\vec{x}) + \lambda G(\vec{x})$ weder eine Komponente parallel zur Hyperfläche haben, weil es sonst kein Minimum wäre, noch darf sie eine Komponente senkrecht zur Hyperfläche haben, weil die Bahn sonst die Hyperfläche verlassen würde. Am Minimum gilt also $\vec{\nabla}(V + G\lambda) = 0$.

Deshalb definieren wir uns ein neues Potential $F(\vec{x}, \lambda) = V(\vec{x}) + \lambda G(\vec{x})$, das noch vom Lagrange-Parameter λ abhängt. Für jeden Wert von λ erhalten wir ein Minimum. Nur bei einem Wert von λ erfüllt das Minimum auch die Zwangsbedingung. Wie finden wir diesen Wert? Nur wenn die Zwangsbedingung erfüllt ist, d.h. $G(\vec{x}) = 0$, ist $F(\vec{x}, \lambda)$ unabhängig von λ. Wir können also die Bedingung $\frac{dF}{d\lambda} = 0$ verwenden, um den Lagrange-Parameter zu bestimmen. Dies führt uns auf zwei Bedingungen

$$\vec{\nabla}F = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

Diese Gleichungen sind gerade die Aussage der Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

In dieser Beschreibung haben wir uns das Extremum als Minimum vorgestellt. Abgesehen von der Bewegungsgleichung $\dot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}V$ wurde das aber nirgends verwendet. Tatsächlich bestimmt die Methode der Lagrange-Parameter ein Extremum oder einen Sattelpunkt auf der Hyperfläche.

Nun wollen wir den Gedankengang nochmals, aber kompakter durchführen, was uns den Lösungsweg beschreibt.

1. Definiere eine Funktion

$$F(\vec{x}, \lambda) = V(\vec{x}) + \lambda G(\vec{x})$$

   (a) $G(\vec{x}) = 0$ definiert eine $d - 1$-dimensionale Hyperfläche im d-dimensionalen Raum.

   (b) Auf diesen Hyperflächen gilt

$$F(\vec{x}, \lambda) = V(\vec{x})$$

   für eine beliebiges λ

   (c) $\vec{\nabla}G$ ist ein Normalenvektor auf der Hyperfläche.

   (d) Liegt bei $\vec{x}$ ein Extremum von $V(\vec{x})$ auf dieser Hyperfläche, so steht $\vec{\nabla}V(\vec{x})$ senkrecht auf der Hyperfläche. Die Änderung von V ist $dV = d\vec{x} \cdot \vec{\nabla}V$ für eine infinitsimale Auslenkung. Aus $dV = 0$ für Auslenkungen, welche die Zwangsbedingung(en) nicht verletzen, folgt:

$$d\vec{x} \perp \vec{\nabla}V$$

[14] Wir sprechen nicht vom Minimum von $V(\vec{x})$ im ganzen Raum, da dieses ja nicht auf der Hyperfläche liegen muss.

(e) Es gibt ein λ, so dass gilt:

$$\vec{\nabla} V(\vec{x}) + \lambda \vec{\nabla} G(\vec{x}) = 0$$

2. Bestimme x und λ so, dass

$$\begin{array}{cc} \vec{\nabla} F = 0 & \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \\ \downarrow & \downarrow \\ \vec{\nabla} V + \lambda \vec{\nabla} g = 0 & G(x) = 0 \end{array}$$

Die Rechenregel kann nun wie folgt zusammengefasst werden, wobei wir jetzt auf mehrere Zwangsbedingungen verallgemeinern.

1. Bilde

$$F(\vec{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = V(\vec{x}) + \sum_{\alpha} \lambda_\alpha G_\alpha(\vec{x})$$

Man suche das Extremum von F:

$$\vec{\nabla} F = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda_\alpha} = 0$$

Beispiel 1

Aufgabe: Finde den stationären Punkt der Funktion

$$V(x, y) = x^2 + 2y^2$$

unter der Zwangsbedingung

$$G(x, y) \overset{\text{def}}{=} x + y - 3 = 0$$

Lösung: Zuerst stellen wir das erweiterte Potential auf

$$F(x, y, \lambda) \overset{\text{def}}{=} V(x, y) + \lambda G(x, y) = x^2 + 2y^2 + \lambda(x + y - 3)$$

Nun bilden wir alle Ableitungen und setzen diese zu Null.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dF}{dx} = 2x + \lambda && \rightarrow && x(\lambda) = -\frac{1}{2}\lambda \\ 0 &= \frac{dF}{dy} = 4y + \lambda && \rightarrow && y(\lambda) = -\frac{1}{4}\lambda \\ 0 &= \frac{dF}{d\lambda} = x + y - 3 \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist nichts weiter wie die Zwangsbedingung selbst. Wir setzen das Ergebnis für $x(\lambda)$ und $y(\lambda)$ in die Zwangsbedingung ein, um den Lagrange-Parameter λ zu bestimmen.

$$G(x(\lambda), y(\lambda)) = -\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4}\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -4$$

Durch Einsetzen des Lagrange-Parameters erhalten wir die Position des Minimums.

$$x = 2 \qquad y = 1$$

Beispiel 2

Aufgabe: Finde den stationären Punkt der Funktion

$$V(x_1,x_2,x_3) = (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 + 2x_3^2$$

unter den Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} G_1(x_1,x_2,x_3) &\stackrel{\text{def}}{=} x_1 + 2x_2 - 2 = 0 \\ G_2(x_1,x_2,x_3) &\stackrel{\text{def}}{=} x_2 - x_3 - 3 = 0 \end{aligned}$$

Lösung: Zuerst stellen wir das erweiterte Potential auf

$$\begin{aligned} F(\vec{x},\lambda_1,\lambda_2) &\stackrel{\text{def}}{=} V(\vec{x}) + \lambda_1 G_1(\vec{x}) + \lambda_2 G_2(\vec{x}) \\ &= (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 + 2x_3^2 \\ &\quad + \lambda_1(x_1 + 2x_2 - 2) + \lambda_2(x_2 - x_3 - 3) \end{aligned}$$

Nun bilden wir alle Ableitungen und setzen diese zu Null.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dF}{dx_1} = 2(x_1-1) + \lambda_1 \qquad \Rightarrow \qquad x_1(\lambda_1,\lambda_2) = 1 - \frac{1}{2}\lambda_1 \\ 0 &= \frac{dF}{dx_2} = 2(x_2-2) + 2\lambda_1 + \lambda_2 \qquad \Rightarrow \qquad x_2(\lambda_1,\lambda_2) = 2 - \lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 \\ 0 &= \frac{dF}{dx_3} = 4x_3 - \lambda_2 \qquad \Rightarrow \qquad x_3(\lambda_1,\lambda_2) = \frac{1}{4}\lambda_2 \end{aligned}$$

Die Ableitungen nach λ müssen wir nicht extra bilden, da sie ja gerade die Zwangsbedingung sind. Wir setzen das Ergebnis für $x_i(\lambda_1,\lambda_2)$ in die Zwangsbedingungen ein, um die Lagrange-Parameter λ_1 und λ_2 zu bestimmen. Dies liefert und ein Gleichungssystem für die Lagrange-Parameter:

$$\begin{aligned} 0 &= G_1(\vec{x}(\lambda_1,\lambda_2)) \stackrel{\text{def}}{=} x_1 + 2x_2 - 2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\lambda_1\right) + 2\left(2 - \lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2\right) - 2 = -\frac{5}{2}\lambda_1 - \lambda_2 + 3 \\ 0 &= G_2(\vec{x}(\lambda_1,\lambda_2)) \stackrel{\text{def}}{=} x_2 - x_3 - 3 = 0 \\ &= \left(2 - \lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2\right) - \frac{1}{4}\lambda_2 - 3 = -\lambda_1 - \frac{3}{4}\lambda_2 - 1 \end{aligned}$$

Wir lösen das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{5}{2}\frac{3}{4} - 1} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -1 \\ -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{8}{7} \begin{pmatrix} \frac{13}{4} \\ -\frac{11}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{26}{7} \\ -\frac{44}{7} \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen der Lagrange-Parameters erhalten wir die Position des Minimums.

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2}\lambda_1 = -\frac{6}{7} \qquad \wedge \qquad x_2 = 2 - \lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 = \frac{10}{7} \qquad \wedge \qquad x_3 = \frac{1}{4}\lambda_2 = -\frac{11}{7}$$

Appendix E

Die fundamentalen Naturkräfte

Die fundamentalen Wechselwirkungen lassen sich einfach aufzählen:

- die Gravitation
- die elektrische Wechselwirkung
- die Magnetismus
- die schwache Kraft
- die starke Kraft

E.1 Gravitationskraft

Die Gravitation wirkt zwischen allen Teilchen, die eine Masse tragen. Sie wird durch ein Wechselwirkungspotential der Form

$$V(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

beschrieben. Dabei ist $G = 6.6725985 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}$ Newtons Gravitationskonstante.[6] m_1 und m_2 sind die Massen der beiden Teilchen und $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ deren Positionen. Das Potential ist also gerade invers proportional zum Abstand der Teilchen.

Die Gravitation bestimmt die Physik auf unserer, makroskopischen, Längenskala. Mit ihr lässt sich die Bahn eines Schneeballs genauso beschreiben wie die Bewegung der Planeten im Sonnensystem.

Lagrangefunktion in der klassischen Theorie der Gravitation

Betrachten wir als Beispiel die Planetenbewegung: Die Planeten, ihre Monde und die Sonne haben die Massen m_i und wechselwirken über die Gravitationskraft. Im Folgenden unterscheiden wir nicht mehr zwischen Sonne, Planeten und Monden. Wenn wir also von Planeten sprechen, meinen wir immer auch die Sonne und die Monde der Planeten. Die Zentren der Planeten seien durch $\vec{r}_i(t)$ bezeichnet.

Die Lagrangefunktion des Planetensystems hat die Form "kinetische weniger potentielle Energie".

$$\mathcal{L}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^{N} G \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ in der Summe berücksichtigt, dass jedes Planetenpaar zweimal in der Doppelsumme auftritt, aber nur einmal gezählt werden darf.

Die Euler-Lagrange-Gleichungen, deren Ableitung dem Leser überlassen ist, haben die Form

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = -m_i \sum_{j:j\neq i}^{N} G \frac{m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2} \cdot \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Auf der rechten Seite steht also die Kraft die von den Nachbarplaneten auf den i-ten Planeten ausgeübt wird. Der zweite Bruch ist der Einheitsvektor, der vom j-ten Nachbarplaneten j auf den betrachteten, i-ten, Planeten zeigt. Die Kraft zeigt also immer auf die Nachbarplaneten hin. Der Planet wird also von den Nachbarplaneten angezogen. Die Summe ist nun eine Einfachsumme und erstreckt sich auf alle Nachbarplaneten, also nicht den i-ten Planeten selber.

Grenzen der klassischen Theorie der Gravitation

Unsere Vorstellung der Gravitation wurde mit Einsteins **Allgemeiner Relativitätstheorie** grundlegend verändert. Einstein führte die Gravitation auf eine komplexe Verzerrung des Raum-Zeit-Kontinuums zurück, was eine nichttriviale mathematische Beschreibung voraussetzt. Die Unterschiede zu der hier vorgestellten klassischen Theorie der Gravitation, die von Newton entwickelt wurde, lassen sich anhand der **Periheldrehung** des Merkurs oder anhand der Ablenkung von Lichtstrahlen durch die Anziehung der Sonne experimentell nachweisen. Der Merkur vollführt, im Unterschied zu den anderen Planeten, keine elliptischen Bahnen. Stattdessen verändert sich die Ausrichtung der Ellipse sich mit der Zeit, was im Wiederspruch zu der klassischen Theorie steht. Dies wird in Kapitel 6.7 besprochen. Die Ablenkung von Licht durch die Sonne war eine der ersten Bestätigungen der allgemeinen Relativitätstheorie: Bei einer Sonnenfinsternis wurde beobachtet, dass die Sternbilder in der Umgebung der Sonne verzerrt werden, da die Lichtstrahlen vom Gravitationsfeld der Sonne abgelenkt werden. Da Licht aus masselosen Teilchen, den Photonen, besteht, sollte klassisch kein Effekt auftreten.

Gravitationsfeld auf der Erdoberfläche

Betrachten wir nun Prozesse auf der Erdoberfläche: Ändert sich der Abstand vom Zentrum des Planeten nur unwesentlch, können wir die Gravitationskraft vereinfachen, indem wir eine Taylorentwicklung um einen Bezugspunkt ansetzen, und nur die wichtigsten Terme berücksichtigen.

Der Erdradius ist etwa $R = 6380\ \mathrm{km}$ und die Erdmasse ist $M = 5.98 \cdot 10^{24}\mathrm{kg}$.[32] Wir wählen ein Koordinatensystem (Siehe Kapitel 5), in dem die Erde im Ursprung liegt. Ein Körper der Masse m am Ort $\vec{r}$ erfährt das Potential

$$V(\vec{r}) = -G\frac{Mm}{|\vec{r}|}$$

Wir entwickeln das Potential nun in eine Taylor-Reihe um einen Punkt $\vec{r}_0$ auf der Erdoberfläche, der in der Nähe der Verbindungslinie vom Erdzentrum zum betrachteten Teilchen liegt. Das Koordinatensystem soll nun außerdem so gewählt sein, dass die z-Achse in Richtung von $\vec{r}_0$ zeigt.

$$\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= -G\frac{Mm}{|\vec{r}_0|} + G\frac{Mm}{|\vec{r}_0|^2} \cdot \underbrace{\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}}_{\vec{e}_z}(\vec{r}-\vec{r}_0) + O(|\vec{r}-\vec{r}_0|^2) \\
&= -G\frac{Mm}{R} + G\frac{Mm}{R^2}\vec{e}_z\,(\vec{r}-\vec{r}_0) + O(|\vec{r}-\vec{r}_0|^2) \\
&= -G\frac{Mm}{R} + m\underbrace{G\frac{M}{R^2}}_{=g}(z-z_0) + O(|\vec{r}-\vec{r}_0|^2) \\
&= -G\frac{Mm}{R} + mg(z-z_0) + O(|\vec{r}-\vec{r}_0|^2)
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Fallbeschleunigung $g \stackrel{\text{def}}{=} \frac{GM}{R^2} = 9.803 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ eingeführt. Wir nennen die Kraft $F = mg$, die ein Körper aufgrund der Gravitation ausübt, sein Gewicht[1]. Bestimmen wir nun die Erdanziehungskraft, erhalten wir

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = -mg\vec{e}_z + O(z - z_0)^2$$

Die Erde übt in der Nähe der Erdoberfläche auf jeden Körper eine Anziehungskraft aus, die proportional zur Masse des Körpers ist und senkrecht nach unten, also auf den Erdmittelpunkt zeigt.

Die Konstante (erster Term) im Potential ist unerheblich, da aus ihr keine Kräfte resultieren. Man kann sie daher weglassen. Die Lagrangefunktion für dieses vereinfachte Problem ist also

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - mg(z - z_0)$$

E.1.1 Elektromagnetismus

Die elektrische Kraft und der Magnetismus waren die ersten Grundkräfte, die vereinheitlicht wurden. Bis dahin wurden Elektrizität und Magnetismus als zwei unabängige Phänomene betrachtet. Auf einer Längenskala von Nanometern, spielt die Gravitation praktisch kaum eine Rolle. Das liegt daran, dass der Elektromagnetismus eine viel stärkere Kraft als die Gravitation darstellt. Der Grund warum wir dennoch auf unserer Längenskala fast nur die Gravitation erfahren, ist dass die Gravitationskraft rein anziehend ist, während die elektromagnetische Wechselwirkung sowohl anziehend als auch abstoßend sein und sich daher selber kompensieren kann.

Die Lagrangefunktion hat die Form

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - q\Phi(\vec{r}, t) + q\dot{\vec{r}}\vec{A}(\vec{r}, t) \tag{E.1}$$

Dabei ist q die Ladung des Teilchens, Φ das elektrische Potential und $\vec{A}$ das **Vektorpotential**, das wir im nächsten Band von ΦSX kennen lernen werden. **Elektrostatisches Potential** und Vektorpotential hängen über

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}, t) - \dot{\vec{A}}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

mit dem **elektrischen Feld** $\vec{E}$ und dem Magnetfeld $\vec{B}$ zusammen.

Bestimmen wir die Euler-Lagrange-Gleichung, erhalten wir nach einigen komplizierten Umformungen

$$m\ddot{\vec{r}} = q\left[-\dot{\vec{A}} - \vec{\nabla}\Phi + \vec{v} \times \left(\nabla \times \vec{A}\right)\right] = q\left[\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}\right]$$

Dies ist gerade die **Lorentz-Kraft**, die Kraft die elektromagnetische Felder auf ein geladenes Teilchen ausüben.

E.1.2 Starke Kraft

Die starke Kraft hält die Atomkerne zusammen. Sie wirkt zwischen Neutronen und Protonen. Sie ist um vieles stärker als die elektromagnetische Kraft, aber sie wirkt nur auf extrem kurze Distanzen, etwa auf 10^{-15} m, was dem Durchmesser eines Atomkerns entspricht. Wäre sie schwächer als die elektromagnetische Kraft, würde der Atomkern aufgrund der elektrostatischen Abstoßung der Protonen im Atomkern auseinanderplatzen.

[1] Man sollte also immer die Masse eines Körpers von seinem Gewicht unterscheiden.

Das Wechselwirkungspotential hat die Form

$$V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = C\frac{e^{-\lambda|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Diese Form wurde von Hideki Yukawa[2] vorgeschlagen.[**?**] C ist eine Konstante, die ich noch nicht bestimmen konnte. λ ist invers proportional zur Masse des Teilchens das für die Wechselwirkung zuständig ist. So wie Photonen die für die elektromagnetische Wechselwirkung verantwortlich sind, sind Mesonen für die starke Kraft zuständig.

Die starke Kraft selber ist nur der Rest der Farbkraft die zwischen den **Quarks**, den Bausteinen von Protonen und Neutronen wirkt. Es gibt sechs Quarks und ihre Antiquarks. Die Quarks haben die elektrische Ladungen

Name	Symbol	Charge	Spin
Up	u	$+\frac{2}{3}$ e	$\pm\frac{1}{2}$
Down	d	$-\frac{1}{3}$ e	$\pm\frac{1}{2}$
Strange	s	$+\frac{2}{3}$ e	$\pm\frac{1}{2}$
Charmed	c	$-\frac{1}{3}$ e	$\pm\frac{1}{2}$
Bottom	b	$+\frac{2}{3}$ e	$\pm\frac{1}{2}$
Top	t	$-\frac{1}{3}$ e	$\pm\frac{1}{2}$

Dazu kommen die Antiquarks, deren elektrische Ladung entgegengesetzt ist. Die

Nukleonen, wie Protonen und Neutronen setzen sich aus jeweils drei dieser Quarks zusammen. Ein Neutron wird mit ddu bezeichnet, was bedeutet dass es aus zwei Down Quarks und einem Up Quark besteht. Ein Proton hat die Zusammensetzung uud. Die elektrische Ladung der Nukleonen ergibt sich durch Addition der elektrischen Ladungen der Quarks. Mesonen bestehen aus zwei Quarks, einem Quark und einem Antiquark.

Die Wechselwirkung zwischen den Quarks hat die seltsame Eigenschaft dass sie mit dem Abstand immer stärker wird. Deswegen kann man Quarks niemals einzeln beobachten. Jedes Quark trägt eine Farbladung, und nur zusammengesetzte Teilchen deren Farbladungen sich aufheben können einzeln existieren.

E.1.3 Schwache Kraft

Die Schwache Kraft wirkt nur über kurze Distanzen und ist ausserdem schwach. die Schwache Kraft ist für den β-Zerfall von Atomkernen verantwortlich.

Die schwache Kraft wurde von Abdus Salam, Shelden Glashow and Steven Weinberg mit dem Elektromagnetismus vereinheitlicht, wofür sie 1979 mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet wurden.

[2]Hideki Yukawa, Japanischer Physiker 19070-1981. Nobelpreis für Physik 1949.

Appendix F

Drehmoment und Leistung eines Autos

Das Drehmoment ist eine etwas unanschauliche Größe, die ich an einer alltäglichen Situation demonstrieren möchte. Dazu betrachte ich die Rolle des Drehmoments auf die Leistung und Beschleunigung eines Autos. Die folgenden Überlegungen gehen von sehr vereinfachten Annahmen auf wie z.B. dass das Auto nur einen Gang hat, und dass der Wirkungsgrad konstant ist, und dass bei Vollgas immer dieselbe Menge Treibstoff pro Umdrehung verbrannt wird. Ich hoffe, dadurch die Grundlagen besser herausarbeiten zu können.

Ich gehe davon aus, dass der Motor bei bei Vollgas bei jeder Umdrehung die gleiche Menge eines Benzin-Luft Gemischs verbrennt und deshalb dieselbe Energie in Bewegungsenergie umwandelt. Die freigesetzte Energie ist mit dem Anteil der eingespritzen Benzinmenge verknüpft.

Die Reaktionsenergie pro Mol Oktan (C_8H_{18}) ist

$$
\begin{aligned}
& C_8H_{18} + 25O_2 \rightarrow 8CO_2 + 9H_2O \\
\Delta E = \Big[\underbrace{229.3}_{octane} + 25(\underbrace{\ 0\ }_{oxygen}) - 8(\underbrace{-394}_{CO_2}) - 9(\underbrace{-242}_{H_2O})\Big] & \mathrm{kJ/mol} = 5560 \mathrm{kJ/mol}
\end{aligned}
\tag{F.1}
$$

(Quelle: `https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_enthalpy_of_formation`, retrieved Mar. 22, 2017)

Der nutzbare Anteil der Energie ist natürlich geringer, weil der Wirkungsgrad eines Ottomotors im Bereich 35-40 % und der eines Dieselmotors bei 50 % liegt.[1] Der Wirkungsgrad $\eta = \frac{P_{\text{Arbeit}}}{P_{\text{Wärme}}}$ des Motors gibt an welcher Anteil P_{Arbeit} der Leistung $P_{\text{wärme}}$, die in Form von Wärme durch die Verbrennung des Kraftstoffs erzeugt wird, tatsächlich auch in Form von Arbeit, also für den Vortrieb, genutzt werden kann. Nur ein Teil der erzeugten Wärme kann in Arbeit umgewandelt werden. Der Rest wird als Verlustwärme an die Umgebung abgegeben.

Dreht der Motor also mit einer bestimmten Drehzahl ω, dann erzeugt der Motor bei Vollgas eine gegebene Leistung $P(\omega)$ die linear mit der Drehzahl ω ansteigt.

$$P(\omega) = A\omega \tag{F.2}$$

$P(\omega)$ ist die sogenannte **Leistungskurve** des Motors.

$$A = \Delta E\eta/(2\pi) \tag{F.3}$$

ist das Produkt aus verbranntem Treibstoff pro Umdrehung, dem Wirkungsgrad und einem konstanten Faktor. Die Drehzahl wird in Umdrehungen pro Minute angegeben.

[1](Quelle: `https://de.wikipedia.org/wiki/Wirkungsgrad`, retrieved Mar. 22, 2017)

Betrachten wir die Beschleunigung eines Autos mit einer solchen Leistungskurve.

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = mv\dot{v} \tag{F.4}$$

Mit Hilfe des Übersetzungsverhältnisses $k = \omega_{Rad}/\omega_{Motor}$ zwischen der Drehzahl der Reifen und der Motordrehzahl, sowie dem Radius r der Räder, erhalten wir die Übersetzung der Motordrehzahl int die Geschwindigkeit des Fahrzeugs.

$$v = 2\pi r\omega_{Rad} = 2\pi r \cdot k\frac{\omega_{Motor}}{2\pi} = k\omega_{motor} r \tag{F.5}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} P(t) &= mv(t)\dot{v}(t) = \frac{A}{kr}v(t) = A\,\omega_{Motor} \\ \Rightarrow \dot{v}(t) &= \frac{A}{kmr} \\ \Rightarrow x(t) &= \frac{1}{2}\frac{A}{kmr}t^2 \end{aligned} \tag{F.6}$$

Mit jeweils demselben Gang beschleunigt das Fahrzeug also mit konstanter Beschleunigung.

Drehmomentbetrachtung: Die Beschleunigung des Fahrzeugs ist wiederum mit der Kraft verknüpft mit der die Räder auf die Strasse einwirken.

$$m\ddot{x} = F \tag{F.7}$$

Diese Kraft lässt sich wiederum durch das Drehmoment $\vec{D}_{rad} = \vec{r} \times \vec{F}$ ausdrücken. Kraft $\vec{F}$ und Reifenradius r sind hier orthogonal, sodass $D_{rad} = rF$.

Die Beschleunigung ist also

$$\ddot{x} = \frac{D_{rad}}{mr} \tag{F.8}$$

Das Drehmoment D_{rad}, welches am Rad angreift, ist aber nicht gleich dem Drehmoment D_{motor} des Motors. Die Arbeit ist Kraft mal Weg, was wiederum in Drehmoment mal Winkelaenderung $\Delta\phi$ übersetzt werden kann.

$$\Delta E = F\Delta s = Fr\Delta\phi = D\Delta\phi \tag{F.9}$$

In einem Getriebe wird die Rotation des Motors idealerweise verlustfrei in die Rotation der Antriebswelle und damit der Räder übersetzt. Es gilt also

$$D_{Motor}\Delta\phi_{Motor} = \Delta E = D_{Rad}\Delta\phi_{Rad} \tag{F.10}$$

Deshalb gilt

$$D_{rad} = D_{motor}\frac{\Delta\phi_{Motor}}{\Delta\phi_{Rad}} = D_{Motor}\frac{1}{k} \tag{F.11}$$

Wir erhalten also

$$x(t) = \frac{1}{2}\frac{D_{Motor}}{kmr}t^2 \tag{F.12}$$

Die Beschleunigung ist also direkt mit dem Drehmoment, dem Übersetzungsverhältnis, der Masse des Fahrzeugs und der Radgröße verknüpft.

Vergleich Leistung und Drehmoment Durch Vergleich mit der obigen Gleichung erhalten wir

$$\frac{A}{kmr} = \frac{D_{Motor}}{kmr} \Rightarrow A = D_{Motor} \tag{F.13}$$

Das Drehmoment bei Vollgas ergibt sich also durch

$$D_{Motor} = \Delta E \eta / (2\pi) \tag{F.14}$$

Es ist also in etwa unabhängig von der Drehzahl.

Damit erhalten wir

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{1}{k} \frac{\Delta E \eta}{2\pi mr} t^2 \tag{F.15}$$

Im Vergleich zu einem Ottomotor hat ein Dieselmotor einen höheren Wirkungsgrad und eine größeren Energieinhalt pro Liter Treibstoff. Dies führt zu einem höheren Drehmoment. Da er aber gleichzeitig langsamer dreht, wird das Getriebe mit einer anderen Übersetzung gebaut, was das hohe Drehmoment wiederum ausgleicht.

Will man also das Testosteronequivalent von Diesel- und Ottomotoren vergleichen, sollte man das Drehmoment des Motors mit dem Drehzahlbereich multiplizieren. Ein oft genutzes Verkaufsargument für Dieselmotoren basiert also auf einer Verwechslung von Drehmoment des Motors und dem des Rads.

Appendix G

Streuprobleme

G.1 Zweikörperstoß

Das Zweikörperstossproblem lässt sich durch Symmetrien stark vereinfachen. Betrachten wir zunächst die Symmetrien und die daraus resultierenden Erhaltungsgrößen.

- Aus der räumlichen Translationssymmetrie des Gesamtproblems folgt die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses. Wir spalten also die Bewegungsgleichung des Gesamtimpulses ab und gehen in Schwerpunkts und Relativekoordinaten.

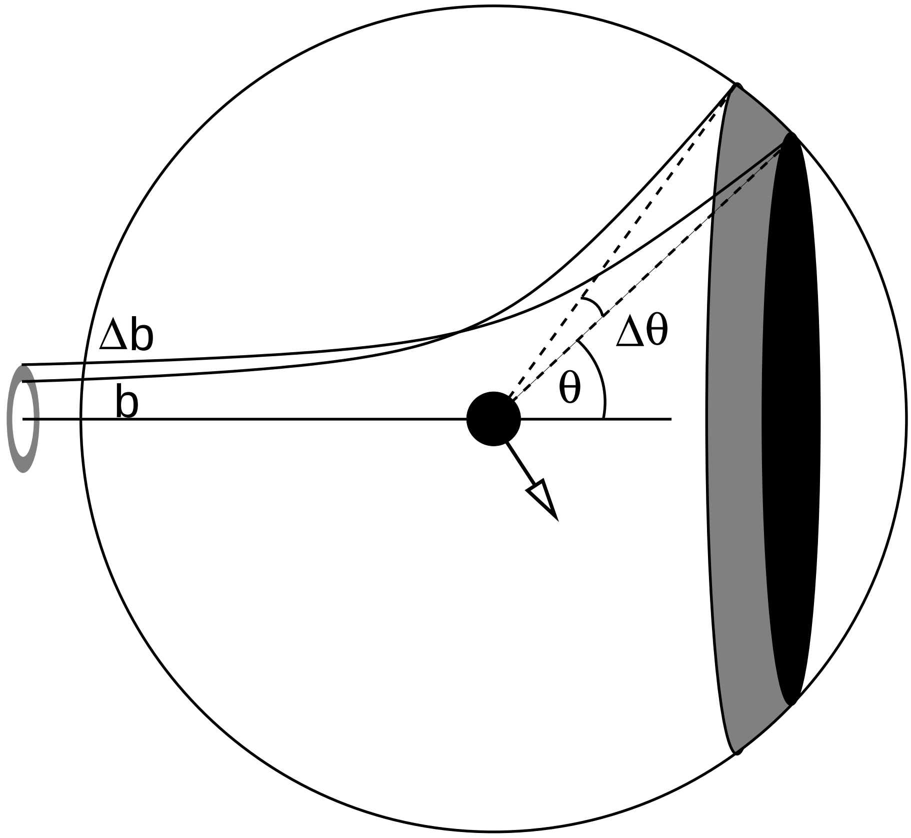
- Aus der Zeittranslationssymmetrie des Problems folgt die Energieerhaltung. Man nennt Stösse bei denen die Energie erhalten bleibt, **elastisch**.

  Es gibt auch Probleme bei denen Energie verloren geht oder sogar gewonnen wird. In diesen Fällen spricht man von **inelastischen Stößen**. Eigentlich sind bei inelastischer Stößen mehr als zwei Partner beteiligt, von denen einer nicht betrachtet wird. Solch ein zusätzlicher Partner kann ein Phonon sein, das beim Stoss erzeugt wird und Impuls und Energie wegtransportiert. Es kann auch eine interne Anregung sein, sodass energie vom Stoßpartner absorbiert wird, wodurch eines der streuenden Teilchen in einen höherenergetischen Zustand überführt wird.

Wir gehen so vor, dass wir zunächst das Problem in relativkoordinaten untersuchen und das Resultat anschliessend in die absolutkoordinatentransformieren.

In Relativkoordinaten ist

G.2 Streuquerschnitte



Der **Stoßparameter** ist der Abstand um die das Teilchen das Target verfehlen würde, wenn sich beide gleichförmig und geradlinig bewegen würden.

Der **Streuquerschnitt** ist der Anteil der Teilchen die in ein Winkelelement $d\Omega$ gestreut werden, relativ zur Gesamtzahl der pro Flächenelement enfallenden Teilchen. Der Streuquerschnitt hat damit die Einheit einer Fläche.

Gehen wir davon aus, dass wir den Winkel $\theta(b, E)$ der gestreuten Teilchen als Funktion des Stoßparameters und der Energie bestimmen können.

G.3 Rutherford-Streuung

Die Rutherfordstreuung beschreibt die Streuung eines geladenen Teilchens an einem geladenen Streuzentrum. Der Name weist auf den Rutherfordschen Streuversuch[1] des Jahres 1909 hin. Hierbei wurden α-Teilchen, also Helium-Kerne, durch eine dünne Goldfolie geleitet. In seinem Streuversuch wies er nach, dass Materialien nicht aus einer kontinuierlichen Ladungsverteilung sondern dass der Großteil der Masse in nahezu punktförmigen Atomkernen vereinigt ist.

Die Rutherford Streuung spielt eine wichtige technologische Rolle bei der Beschreibung der Elektronentransport eigenschaften von Materialien mit geladene Defektatome.

[1]Ernest Rutherford (1871-1937 Neuseeländischer Experimentalphysiker. Erhielt 1908 den Nobelpreis fuer Chemie "for his investigations into the disintegration of the elements, and the chemistry of radioactive substances".

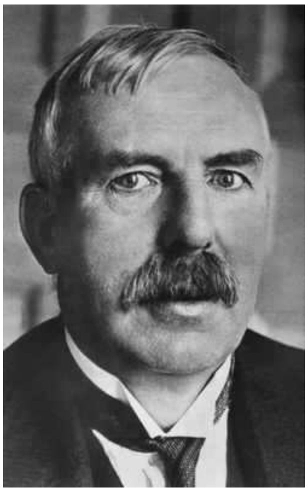


Abb. G.1: Lord Ernest Rutherford of Nelson, Aufnahmen wahrscheinlich von 1908

Appendix H

Bewegungsgleichung der Phasenraumdichte

Dieses Kapitel ist nur backupmaterual fuer den Author.

Da keine Trajektorie $\vec{x}(t)$ aus dem Bereich $\Omega(t)$ austreten kann, gilt

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} d^6x\ \rho(\vec{x},t) \\
&= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\left[\int_{\Omega(t+\Delta)} d^6x\ \rho(\vec{x},t+\Delta) - \int_{\Omega(t)} d^6x\ \rho(\vec{x},t)\right] \\
&= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\Big[\int_{\Omega(t+\Delta)} d^6x\ \rho(\vec{x},t+\Delta) \underbrace{- \int_{\Omega(t+\Delta)} d^6x\ \rho(\vec{x},t) + \int_{\Omega(t+\Delta)} d^6x\ \rho(\vec{x},t)}_{=0} - \int_{\Omega(t)} d^6x\ \rho(\vec{x},t)\Big] \\
&= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\Big[\int_{\Omega(t+\Delta)} d^6x\ \left[\Delta\frac{\partial\rho}{\partial t} + O(\Delta^2)\right] + \oint_{\partial\Omega(t)} d\vec{A}\ \Delta\vec{v}(\vec{x})\rho(\vec{x},t) + O(\Delta^2)\Big] \\
&= \lim_{\Delta\to 0}\Big[\int_{\Omega(t+\Delta)} d^6x\ \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + O(\Delta)\right] + \oint_{\partial\Omega(t)} d\vec{A}\ \vec{v}(\vec{x})\rho(\vec{x},t) + O(\Delta)\Big] \\
&= \int_{\Omega(t)} d^6x\ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \oint_{\partial\Omega(t)} d\vec{A}\ \vec{v}(\vec{x},t)\rho(\vec{x},t) \\
&\overset{Gauss}{=} \int_{\Omega(t)} d^6x\ \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\Big(\vec{v}(\vec{x},t)\rho(\vec{x},t)\Big)\right] \\
&\overset{Gauss}{=} \int_{\Omega(t)} d^6x\ \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \Big(\vec{\nabla}\vec{v}(\vec{x},t)\Big)\rho(\vec{x},t) + \vec{v}(\vec{x},t)\vec{\nabla}\rho(\vec{x},t)\right]
\end{aligned}
$$

Da diese Aussage fuer beliebiege Volumina $\Omega(0)$ gilt, verschwindet nicht nur das Intgral, sondern auch der Integrand.

$$
0 = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \Big(\vec{\nabla}\vec{v}(\vec{x},t)\Big)\rho(\vec{x},t) + \vec{v}(\vec{x},t)\vec{\nabla}\rho(\vec{x},t) \tag{H.1}
$$

In dieser Aussage steckt eigentlich noch keine Physik, außer dass sich die Teilchen entlang differenzierbarer Bahnen bewegen, und nicht einfach auftauche oder verschwinden.

Die Gleichung Gl. H.1 liefert zusammen mit dem Verschwinden der Divergenz Gl. 8.8

$$
0 = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v}(\vec{x},t)\vec{\nabla}\rho(\vec{x},t) = \frac{d}{dt}\rho(\vec{x}(t),t) \tag{H.2}
$$

Die Phasenraumdichte über einem Punkt der sich mit der Trajektorie mitbewegt, bleibt also unverändert.

Appendix I

Symbole

∂_t	Zeitableitung
∂_x	Ableitung nach x
$\dot{x}$	Zeitableitung der Funktion $x(t)$
$\ddot{x}$	zweite Zeitableitung der Funktion $x(t)$
$\delta(x)$	Diracsche Deltafunktion
$\delta_{i,j}$	Kronecker Delta
$\epsilon_{i,j,k}$	Levy-Civita Symbol
$\otimes$	Dyadisches Produkt
$\times$	Kreuzprodukt
$\vec{\nabla}$	Gradient
$\theta(x)$	Heaviside Funktion
c^*	komplex Konjugierte der Zahl c
$\boldsymbol{M}^\top$	Transponierte der Matrix $\boldsymbol{M}$
$\boldsymbol{M}^\dagger$	hermitesch konjugierte der Matrix $\boldsymbol{M}$
$\mathrm{Sp}[\boldsymbol{M}]$	Spur der Matrix $\boldsymbol{M}$

Appendix J

Griechisches Alphabet

A	α	alpha	N	ν	nu
B	β	beta	Ξ	ξ	ksi
Γ	γ	gamma	O	o,	omicron
Δ	δ	delta	Π	π, ϖ	pi
E	ϵ, ε	epsilon	P	ρ, ϱ	rho
Z	ζ	zeta	Σ	σ, ς	sigma
H	η	eta	T	τ	tau
Θ	θ, ϑ	theta	Υ	υ	upsilon
I	ι	iota	Φ	ϕ, φ	phi
K	κ	kappa	X	χ	chi
Λ	λ	lambda	Ψ	ϕ	phi
M	μ	mu	Ω	ω	omega

Appendix K

Zum Author

Prof. Dr. rer.nat Peter E. Blöchl studierte Physik an der Technischen Universität Karlsruhe. Anschließend forschte er an den Max Planck Instituten für Metallforschung und Festkörperforschung in Stuttgart an Weiterentwicklungen von Elektronenstrukturmethoden in Verbindung mit der LMTO Methode sowie der theoretischen Untersuchung von Grenzflächen. Nach seiner Promotion im Jahr 1989 ging er mit einem World Trade Fellowship an das renommierte T.J. Watson Research Center, Yorktown Heights in den USA. 1990 folgte er einem Angebot des IBM Forschungslaboratoriums in Rüschlikon, Schweiz, das gerade wegen zwei Nobelpreisen in Physik (Rastertunnelmikroskop 1986 und Hochtemperatursupraleitung 1987) im Rampenlicht stand. Neben seiner Tätigkeit am Forschungslabor nahm er im Sommersemester 1995 eine Gastprofessur an der TU Wien wahr, wo er sich 1997 habilitierte. Im Jahr 2000 verließ er das IBM Forschungslaboratorium nach 10-jähriger Tätigkeit und folgte einem Ruf auf eine Professur für Theoretische Physik an der Technischen Universität Clausthal. Prof. Blöchl ist seit 2003 Mitglied der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft.

Der Forschungsschwerpunkt von Prof. Blöchl liegt auf dem Gebiet der ab-initio Simulationen, also der parameterfreien Simulation von Prozessen in Materialien und Molekülen auf der Basis der Quantenmechanik. Er entwickelte die Methode der Projektor augmentierten Wellen, eine der verbreitetsten Simulationsmethoden für die Elektronenstruktur. Diese Arbeit wurde bisher über 35,000 mal zitiert.[1] Es ist unter den 100 wissenschaftlichen Publikationen mit den meisten Zitaten, unter Berücksichtigung aller Disziplinen und Zeiten. Es ist unter den zehn häufigst-zitierten Veröffentlichungen von Physical Review, die in seiner 120 Jahre alten Geschichte erschienen sind.[2] Neben seinen methodischen Arbeiten decken seine Forschungsthemen ein breites Feld der Simulationen von der Biochemie über die Chemie zu Festkörperphysik und den Materialwissenschaften ab. Prof Blöchl hat bei 8 Patenten mitgewirkt und etwa 100 wissenschaftliche Publikationen publiziert, unter anderem in so renommierten Zeitschriften wie “Nature”. Seine Arbeiten wurden mehr als 48,000 mal zitiert und er hat einen H-index von 44.[3]

[1] Researcher ID: B-3448-2012
[2] Oct. 15, 2014, Suche im Physical Review Online Archive mit dem Suchkriterium “a-z”.
[3] Researcher ID: B-3448-2012

Appendix L

Zur Philosophie der PhiSX Reihe

In the ΦSX series, I tried to implement what I learned from the feedback given by the students which attended the courses and that relied on these books as background material.

The course should be **self-contained**. There should not be any statements "as shown easily..." if, this is not true. The reader should not need to rely on the author, but he should be able to convince himself, if what is said is true. I am trying to be as complete as possible in covering all material that is required. The basis is the mathematical knowledge. With few exceptions, the material is also developed in a sequence so that the material covered can be understood entirely from the knowledge covered earlier.

The derivations shall be **explicit**. The novice should be able to step through every single step of the derivation with reasonable effort. An advanced reader should be able to follow every step of the derivations even without paper and pencil.

All **units** are explicit. That is, formulas contain all fundamental variables, which can be inserted in any desirable unit system. Expressions are consistent with the SI system, even though I am quoting some final results in units, that are common in the field.

The equations that enter a specific step of a derivation are noted as **hyperlinks** ontop of the equation sign. The experience is that the novice does not immediately memorize all the material covered and that he is struggling with the math, so that he spends a lot of time finding the rationale behind a certain step. This time is saved by being explicit about it. The danger that the student gets dependent on these indications, is probably minor, as it requires some effort for the advanced reader to look up the assumptions, an effort he can save by memorizing the relevant material.

Important results and equations are highlighted by including them in **boxes**. This should facilitate the preparations for examinations.

Portraits of the key researchers and short biographical notes provide independent associations to the material. A student may not memorize a certain formula directly, but a portrait. From the portrait, he may associate the correct formula. The historical context provides furthermore an independent structure to organize the material.

The two first books are in german (That is the intended native language) in order to not add complications to the novice. After these first books, all material is in English. It is mandatory that the student masters this language. Most of the scientific literature is available only in English. English is currently the language of science, and science is absolutely dependent on international contacts.

I tried to include many graphs and figures. The student shall become used to use all his senses in particular the **visual sense**.

I have slightly modified the selection of the material commonly tought in most courses. Some topics, which I consider of mostly historical relevance I have removed. Others such as the Noether theorem, I have added. Some, like chaos, stochastic processes, etc. I have not added yet.

Bibliography

[1] C. Kiefer. Quantentheorie. [Fischer-Taschenbücher] / Fischer-Taschenbücher. Fischer-Taschenbuch-Verlag, 2004. ISBN 9783596153565. URL `http://books.google.de/books?id=UHIrcAAACAAJ`.

[2] Edward Nelson. Derivation of the schrödinger equation from newtonian mechanics. Phys. Rev., 150:1079, 1966.

[3] K.Y. Billah and R.H. Scanlan. Resonance, tacoma narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks. Am. J. Phys., 59:118, 1991.

[4] DTV-Lexikon der Physik. Deutscher Taschenbuchverlag, 1970.

[5] I.N. Bronstein and K.A. Semendjajew. Taschenbuch der Mathematik. BSB B.G. eubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1983.

[6] E.R. Cohen, T. Cvitas, J.G. Frey, B. Holmström, K. Kuchitsu, R. Marquardt, I. Mills, F. Pavese, M. Quack, J. Stohner, H.L. Strauss, M. Takami, and A.J. Thor, editors. Quantities, Units and Sumbols in Physical Chemistry, IUPAC Green Book. IUPAC and RSC Publishing, Cambridge, 3 edition, 2008. URL `http://media.iupac.org/publications/books/gbook/IUPAC-GB3-2ndPrinting-Online-22apr2011.pdf`.

[7] E. Noether. Invariante variationsprobleme. Nachr. v. d. Ges. d. Wiss.zu Göttingen, page 235, 2018.

[8] P.J. Mohr and B.N. Taylor. Codata recommended values of the fundamental physical constants: 1989. Rev. Mod. Phys., 72:351, 2000.

[9] R.P.Feynman, R.B.Leighton, and M. Sands. The Feynman Lectures on Physics. Addison Wesley, 1961.

[10] G. Börner. Der nachhall des urknalls. Physik Journal, 4:21, 2005.

[11] A.G. Riess et al. Astron. J., 116:1009, 1998.

[12] S. Perlmutter et al. Nature, 391:51, 1998.

[13] S. Hawking. Das Universum ein der Nussschale. Deutscher Taschenbuch Verlag, 2001?

[14] D. J. Fixsen, E. S. Cheng, J. M. Gales, J. C. Mather, R. A. Shafer, and E. L. Wright. The cosmic microwave background spectrum from the full cobe firas data set. Astrophys. J., 437: 576, 1996. doi: 10.1086/178173.

[15] A. Penzias. Nobel lectures, Physics 1971-1980, chapter The Origin of Elements. Scientific Publishing Co., 1992.

[16] R.A. Alpher and R.C. Herman. Remarks on the evolution of the expanding universe. Phys. Rev., 75:1089, 1949.

[17] R.A. Alpher and H. Bethe und G. Gamow. The origin of chemical elements. Phys. Rev., 73: 803, 1948.

[18] E.R. Cohen and P. Giamoco. Symbols, units, nomenclature and fundamental constants in physics 1987 revision. Physica, 146A:1, 1987. URL iupap.org/wp-content/uploads/2014/05/A4.pdf.

[19] A. D. McNaught and A. Wilkinson, editors. IUPAC Compendium of Chemical Terminology. Blackwell Scientific Publications, Oxford, 2 edition, 1997. doi: doi:10.1351/goldbook. URL http://goldbook.iupac.org.

[20] The International System of Units (SI). Bureau International des Poids et Mesures, 8 edition, 2006. URL http://www.bipm.org/en/publications/si-brochure/.

[21] P.J. Mohr and B.N. Taylor. The fundamental physical constants. Physics Today, 56:guide, 2003.

[22] P.Mohr, B.N. Taylor, and D.B. Newell. Codata recommended values of the fundamental physical constants: 2006. Rev. Mod. Phys., 80:633, 2008.

[23] Peter J. Mohr, Barry N. Tayor, and David B. Newell. Codata recommended values of the physical constants: 2010. Rev. Mod. Phys., 84:1527, 2012.

[24] Peter J. Mohr, David B. Newell, and Barry N. Taylor. Codata recommended values of the fundamental physical constants: 2014. Arxiv, 1507:07956, 2015. URL arxiv.org/abs/1507.07956.

[25] J.E.Marsden und A.J. Tromba. Vektoranalysis: Einführung, Aufgaben, Lösungen. Spektrum Verlag, 2005.

[26] L. Wittgenstein. Tractatus logico-philosophicus (Logisch-Philosophische Abhandlung). 1921.

[27] Ludwig Wittgenstein. Philosophische Untersuchungen. 1953.

[28] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and Brian P. Flannery. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, 1992. The first edition was still in Fortran, in the second edition , it was called numerical recipes in fortran77 with 2nd volume about fortran 90. The third edition from 2007 is in C++. The second edition is available online under http://www.nrbook.com/a/bookfpdf.php.

[29] J.G. Powles. Teaching the prototype differential equations of physics. Eur. J. Phys., 11:323, 1990.

[30] Wolfgang Fischer und Ingo Lieb. Funktionentheorie. Vieweg Verlag, 1983. ISBN ISBN 3-528-27247-3.

[31] Wolfgang Walter. Einführung in die Theorie der Distributionen. BI-Wiss.Verl., 1994.

[32] D.C. Giancoli. Physics for Scientists and Engineers – with Modern Physics. Prentice Hall, 2000.

Index