Klassische Mechanik

Skript zur Vorlesung

Tom Kirchner[1]

unter Mitarbeit von
Tobias Spranger und Dennis Röhrbein

Institut für Theoretische Physik
TU Clausthal

[1]tom.kirchner@tu-clausthal.de

Vorbemerkung

Dieses Skript beruht auf einer Mitschrift zur Vorlesung *Theoretische Physik I*, die ich im Wintersemester 2005/2006 an der TU Clausthal gehalten habe. Es soll einerseits dem geäußerten Wunsch nach einem Leitfaden zur Nacharbeit und Prüfungsvorbereitung Rechnung tragen, andererseits aber nicht möglichst ausführliche Blicke in die einschlägigen Lehrbücher verhindern. Dementsprechend enthält es zwar alle Rechnungen und zentralen Aussagen, die in der Vorlesung behandelt wurden, aber (fast) kein darüber hinausgehendes Material und durchgängig nur wenige erklärende, vertiefende oder gar motivierende Sätze. An den Stellen, an denen ich Ergänzungen für nötig oder nützlich halte, habe ich — wie auch in der Vorlesung selbst — entsprechende Verweise auf die Literatur angefügt. Ich hoffe, dass ihnen nachgegangen wird.

Des Weiteren sind alle Übungsaufgaben, die parallel zur Vorlesung angeboten wurden, im Anhang zusammengestellt. Die gelegentlichen Verweise auf diese Aufgaben können gern als Erinnerung daran verstanden werden, dass ihre Bearbeitung ein wichtiger Bestandteil der Auseinandersetzung mit dem Lehrstoff sein sollte.

Ansonsten gilt, was bei Skripten (und Lehrbüchern) meistens gilt: Trotz redlichen Bemühens wird eine Reihe von Fehlern alle Korrekturrunden überdauert haben. Entsprechende Hinweise nehme ich ebenso wie sonstige Vorschläge und (konstruktive) Kritik gerne entgegen. Wer einen Rechenfehler in Anhang A.4 aufspührt, hat sich eine Flasche Wein verdient!

Tom Kirchner
Clausthal-Zellerfeld im August 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **1**
1.1 Bemerkungen zum Wesen der Theoretischen Physik 1
1.2 Vorbemerkung zur Klassischen Mechanik 2

2 Newton'sche Mechanik **5**
2.1 Die Newton'schen Axiome (1687) 5
2.1.1 Analyse des 1. Axioms: Inertialsysteme und Galilei-Transformationen 6
2.1.2 Analyse des 2. Axioms: grundlegende BWGl 7
2.1.3 Analyse des 3. Axioms: actio = reactio 7
2.1.4 Abschließende Diskussion 9
2.2 Grundbegriffe und Erhaltungssätze 9
2.2.1 Impuls 9
2.2.2 Drehimpuls 11
2.2.3 Arbeit und Energie 15

3 Anwendungen I **21**
3.1 Elementare Bewegungsprobleme 21
3.1.1 Eindimensionale Probleme mit $E = T + U =$ konst. 21
3.1.2 Reibung ($\dot{E} \neq 0$) 31
3.2 Oszillatorprobleme I 43
3.2.1 Motive für das Studium des harmonischen Oszillators . . . 43
3.2.2 Der gedämpfte harmonische Oszillator (1-dim.) 44
3.2.3 Der getriebene harmonische Oszillator - erzwungene Schwingungen 48

4 Hamilton'sches Prinzip und Lagrange'sche Mechanik **67**
4.1 Das Hamilton'sche Prinzip der stationären Wirkung (1823) 67
4.1.1 Grundzüge der Variationsrechnung 68
4.1.2 HP für den einfachsten Fall 70
4.2 Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten 71
4.2.1 Vorbereitungen für einen MP 71
4.2.2 N-Teilchen Systeme 75

4.3 Die Lagrange-Gleichungen 2. Art 79
4.3.1 Herleitung der Lagrange-Gleichungen aus dem Hamilton-Prinzip 80
4.3.2 Äquivalenz der Lagrange-Gleichungen zu den Newton'schen Bewegungsgleichungen 81
4.3.3 Lagrange II und Erhaltungssätze 86
4.3.4 Erweiterungen 91
4.4 Zusammenfassung der Lagrange-Mechanik 94

5 Anwendungen II 97
5.1 Das Zweikörper-Zentralkraftproblem 97
5.1.1 Reduktion auf ein Einkörperproblem 98
5.1.2 Relativbewegung 99
5.1.3 Zusatzbemerkungen 104
5.2 Beschleunigte Bezugssysteme 106
5.2.1 Uniform rotierendes KOS 106
5.2.2 Allgemeine Rotation 108
5.2.3 Allgemeine beschleunigte Bezugssysteme: Rotation und Translation 111
5.2.4 Anwendung: Scheinkräfte auf der rotierenden Erde 112
5.3 Bewegung starrer Körper 115
5.3.1 Vorbereitungen 115
5.3.2 Kinetische Energie und Trägheitstensor 116
5.3.3 Struktur und Eigenschaften des Trägheitstensors 117
5.3.4 Generalisierte Koordinaten für die Rotation: Euler-Winkel 120
5.3.5 Die BWGl'en des starren Körpers 122
5.3.6 Drehimpuls und Drehimpulssatz 122
5.3.7 Drehbewegung starrer Körper: Kreiseltheorie 125
5.4 Oszillatorprobleme II 128
5.4.1 Lagrange-Funktion und -Gleichungen für gekoppelte Oszillatoren 129
5.4.2 Lösung der BWGls 130
5.4.3 Anwendungen 134
5.4.4 Übergang zum Kontinuum: schwingende Saite 141

6 Hamilton'sche Mechanik 145
6.1 Hamilton'sche (Kanonische) Bewegungsgleichungen 145
6.2 Poisson-Klammern 150
6.2.1 Definition und fundamentale Poisson-Klammern 150
6.2.2 Algebraische Eigenschaften der Poisson-Klammer 151
6.2.3 Wichtigkeit der Poisson-Klammer 152
6.3 Erweiterungen 153
6.3.1 Phasenraum und Satz von Liouville 153

6.3.2 Kanonische Transformationen 153
6.3.3 Hamilton-Jacobi-Theorie 153

A Ergänzungen **155**
A.1 Heuristische Einführung der δ-Funktion 155
A.2 Eigenschaften von Fourier-Transformations-Paaren 157
A.3 Kegelschnitte 158
A.4 Details zum starren Körper 161
A.5 Details zur Lösung der BWGls gekoppelter Oszillatoren 166
A.6 Näheres zum dreiatomigen Molekül 168

B Übungen **171**

Kapitel 1

Einführung

1.1 Bemerkungen zum Wesen der Theoretischen Physik

Aufgaben der Theoretischen Physik (TP):

Formulierung, Analyse und Anwendung mathematischer Gesetze und Modelle zur Beschreibung physikalischer Phänomene und Prozesse (Mathematik ist die Sprache der Physik)

Werkzeuge der TP: Mathematik, Computer

Ziele und Nutzen der TP:

- Herausarbeiten weniger "roter Fäden" durch das Gebäude der Physik
- Auffinden allgemeiner Grundprinzipien
- Überprüfung und Interpretation empirischer Daten

"Kanon der TP":

- Klassische Mechanik → Teilchen ('Massenpunkte')
- Klassische Elektrodynamik → Felder (Wellen)
- Quantenmechanik → bewältigt Welle-Teilchen Dualismus
- Statistische Mechanik/Thermodynamik → Beschreibung von "Makrophänomenen" (typischerweise mit 10^{23} Teilchen)

1.2 Vorbemerkung zur Klassischen Mechanik

Definition:

"Mechanik ist die Lehre von der *Bewegung materieller Gegenstände im Raum* und den diese beherrschenden *Gesetzmäßigkeiten*" [Jel]

Analyse:

(i) *Materielle Gegenstände* → mit (träger) Masse ausgestattete Objekte
Massenpunkte ⇔ Punktförmige Teilchen mit Masse (Masse ist ihre einzige relevante Eigenschaft)

(ii) *Bewegung im Raum*: erfordert Klärung der Begriffe Raum + Zeit

Eigenschaften des Raums: (im Rahmen der Klassischen Mechanik (KM))

- dreidimensional
- allseitig unbegrenzt
- enthält Punkte, Geraden, Ebenen
- Parallelenaxiom
- homogen + isotrop

→ dreidimensionaler Euklidischer Raum (präziser unterscheidet man in der Mathematik Euklidische Vektorräume und Euklidische affine Räume)
→ kartesische Koordinatensysteme definierbar

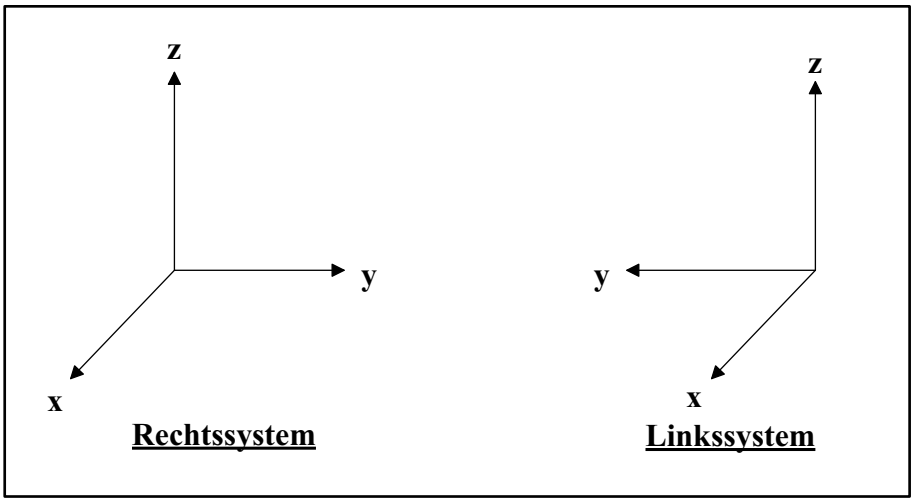


Abbildung 1.1: Kartesisches Rechts- / Linkssystem

$\Longrightarrow$ Beschreibung von Gegebenheiten im Raum $\rightarrow$ Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$

Eigenschaften der Zeit:

– homogener Parameter (kein ausgezeichneter Zeitnullpunkt)

$\rightarrow$ **Bewegung im Raum** wird beschrieben durch:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ Bahnkurve (Trajektorie) } \mathbf{r}(t) \\ \bullet \text{ Geschwindigkeit } \mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) \\ \bullet \text{ Beschleunigung } \mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \text{'Kinematik':} \\ \text{mathematische Beschreibung} \\ \text{von Bewegungen ohne Berück-} \\ \text{sichtigung der verursachenden} \\ \text{Kräfte} \end{array}$$

Erweiterungen des Raumbegriffs: (außerhalb dieser Vorlesung)

– Spezielle Relativitätstheorie $\rightarrow$ 4-dim. (Raumzeit) "Minkowski" Raum
– Allgemeine Relativitätstheorie $\rightarrow$ (lokal) gekrümmte Räume
– Quantenmechanik $\rightarrow$ ∞-dim. Hilbert-Raum

(iii) *Gesetzmäßigkeiten*:
Was bewirkt die Bewegung von Objekten?
$\rightarrow$ Newton'sche Axiome (Kraftbegriff)
$\rightarrow$ insbesondere Bewegungsgleichung (BWGl) $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} \longrightarrow$ Dynamik

$$\mathbf{F} \overset{1/m}{\rightleftarrows} \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} \overset{\text{DGL+AB}}{\rightleftarrows} \mathbf{r}(t)$$

$\rightarrow$ weitere Grundbegriffe (Impuls, Drehimpuls, Arbeit, Energie,...)

Weitere Aspekte der Mechanik:

Es gibt alternative (äquivalente) Formulierungen der KM ("Lagrange", "Hamilton")

- beruhen auf übergeordnetem "Wirkungsprinzip" (jenseits der KM gültig)
- ebnen den Weg zur QM
- sind (teilweise) flexibler in der Handhabung und praktischen Anwendung

Bemerkung zur Literatur:

Abgesehen von den im folgenden zitierten Werken, sind die Bücher [WH], [Fey] und [LL] erwähnenswert.

Kapitel 2

Newton'sche Mechanik

2.1 Die Newton'schen Axiome (1687)

Axiom: Keines Beweises bedürfender Grundsatz; Näheres: [Jel], Kap. 3.1

Lex prima: "Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern."

Lex secunda: "Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher die Kraft wirkt."

Lex tertia: "Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung." (actio = reactive)

Lex quarta: Kräfte addieren sich wie Vektoren (Kräfteparallelogramm)

Bei Newton findet man außerdem die folgende Definition:
Impuls ("Bewegungsgröße");

$$\mathbf{p} := m\mathbf{v}$$

Näheres zu Newtons Formulierung der Grundprinzipien: [Jel], Kap. 3.2; [Som], §1

2.1.1 Analyse des 1. Axioms: Inertialsysteme und Galilei-Trans- formationen

Das 1. Axiom ist das **"Galilei'sche Trägheitsprinzip"**: falls $\mathbf{F} = 0 \longrightarrow \mathbf{p} =$ konst. Es betont die Gleichwertigkeit von Ruhe und gleichförmig-geradliniger Bewegung.

Die absolute Größe des Impulses hängt offensichtlich ab von der Wahl des Bezugssystems. Das Axiom impliziert, dass die Beschreibung eines physikalischen Vorgangs aus der Sicht zweier Bezugssysteme, die mit konstanter Geschwindigkeit gegeneinander bewegt sind, gleichwertig ist.

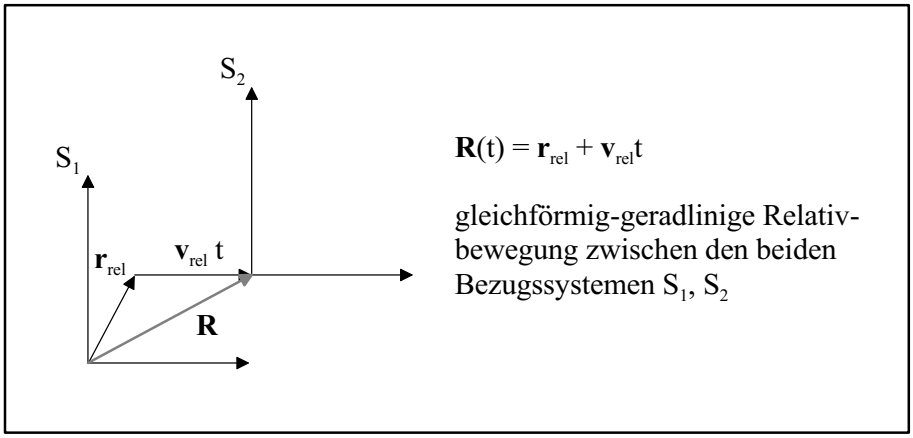


Abbildung 2.1: Zwei gleichförmig-geradlinig gegeneinander bewegte Bezugssysteme

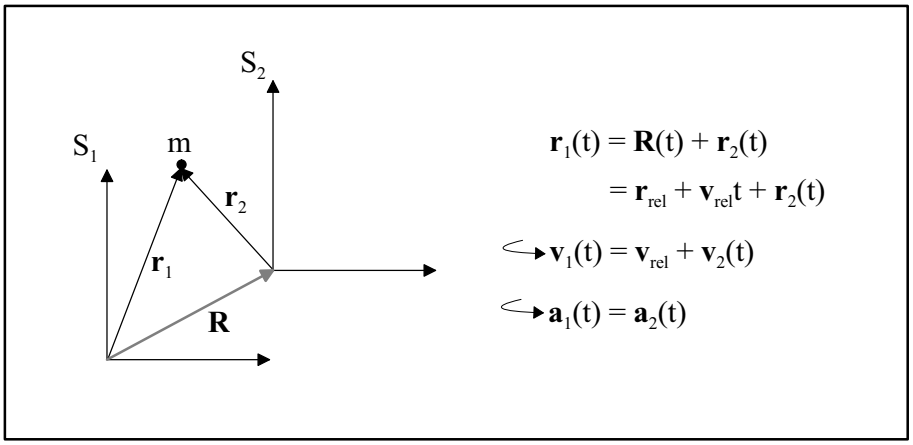


Abbildung 2.2: MP aus Sicht zweier gleichförmig-geradlinig gegeneinander bewegter Bezugssysteme

Definition: **Inertialsystem** (IS): Bezugssystem, in dem sich ein kräftefreier Körper geradlinig-gleichförmig bewegt:

$$\begin{array}{lll} \text{falls} & \mathbf{F} = 0 & \longrightarrow \quad \mathbf{a_1} = \mathbf{a_2} = 0 \\ \text{falls} & \mathbf{F} \neq 0 & \longrightarrow \quad \mathbf{a_1} = \mathbf{a_2} \neq 0 \end{array}$$

Galilei-Transformation (GT): $\Longleftrightarrow (\mathbf{r_1}, t_1) \longrightarrow (\mathbf{r_2}, t_2)$
mit $\mathbf{r_2} = \mathbf{r_1} - \mathbf{r}_{rel} - \mathbf{v}_{rel} t$ und $t_2 = t_1 = t$ (Näheres: Übung 1.4)

2.1.2 Analyse des 2. Axioms: grundlegende BWGl

$$\boxed{\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}} \qquad \text{gilt im IS}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}$$

$$\text{falls } \dot{m} = 0 \longrightarrow \quad \boxed{m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}}$$

$\dot{m} \neq 0$: z.B. klassisches Raketenproblem (siehe Übung 3.2), spezielle Relativitätstheorie

Folgerungen:

(i) $0 = \mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} \Longrightarrow \mathbf{p} = \text{konst.} \longleftrightarrow$ 1. Axiom

(ii) 'Forminvarianz' der BWGl unter GTs

$$S_1 : m\mathbf{a_1} = \mathbf{F_1} = m\mathbf{a_2} = \mathbf{F_2} : S_2$$

Beispiel: senkrechter Wurf aus fahrendem Zug ($\mathbf{v}_{Zug} = \text{konst.}$) (vgl. Übung 1.4)

$S_1 \curvearrowright$ $\qquad\qquad$ $S_2 \updownarrow$

Obwohl die "Dynamik" dieselbe ist, sieht der Ablauf der Bewegung aus der Sicht zweier gegeneinander bewegter Bezugssysteme verschieden aus.

2.1.3 Analyse des 3. Axioms: actio = reactio

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{F}_{12} : \text{ Kraft von Teilchen 1 auf Teilchen 2} \\ \\ \mathbf{F}_{21} : \text{ Kraft von Teilchen 2 auf Teilchen 1} \end{array}\right\} \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

$$\xrightarrow{\text{2.Axiom}} \quad m_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = -m_2\mathbf{a}_2$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{|\mathbf{a}_2|}{|\mathbf{a}_1|} \equiv \frac{a_2}{a_1} \quad \longrightarrow \quad \text{dynamische Definition eines Massenverhältnisses}$$

absolute Skala wird durch Festlegung der Standardmasse [m] = 1kg eingeführt

→ die 'träge Masse' ist damit ein (skalares) Maß für den Widerstand gegen Bewegungsänderung

→ Kraft: abgeleitete Größe (nach 2. Axiom) $[\mathbf{F}] = 1\ \frac{kg \cdot m}{s^2} = 1$ N

Mögliche Situationen:

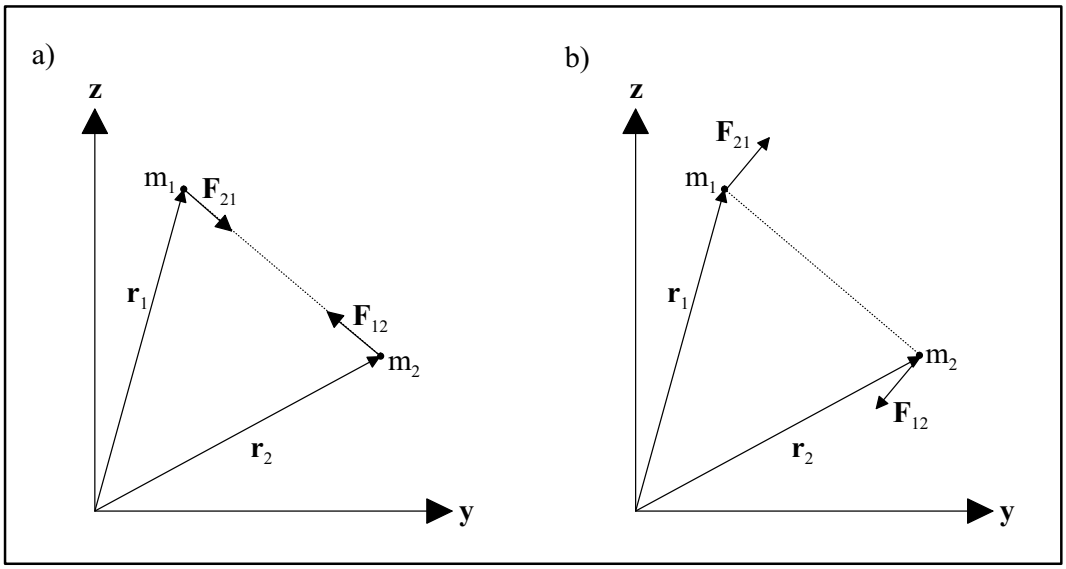


Abbildung 2.3: Illustration zum 3. Axiom: die Kraftvektoren können, müssen aber nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Sie müssen aber in entgegengesetzte Richtung zeigen.

- 3. Axiom erfüllt für Gravitations- und Coulombwechselwirkung
- Darüber hinaus gilt es i.a. nur in modifizierter Form [DL], Kap. 3.1.6

2.1.4 Abschließende Diskussion

(i) Physikalischer Ursprung von Kräften wird in KM nicht behandelt

(ii) Grundproblem der KM: Lsg. der gewöhnlichen DGl 2. Ordnung

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \qquad (+\ \mathrm{AB's})$$

Analytische Lösungsverfahren sind nur für Spezialfälle bekannt, ein numerisches Lösungsverfahren wird in [Blö] KM, Kap. 2.3 vorgestellt

(iii) Erhaltungssätze folgen als Konsequenz der Axiome

2.2 Grundbegriffe und Erhaltungssätze

2.2.1 Impuls

a) Einfachste Situation: <u>ein</u> kräftefreier Massenpunkt (MP):

$\mathbf{F} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{p} = \text{konst.} = m\mathbf{v}_0$ Impulserhaltung

$\hookrightarrow \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t$ geradlinig – gleichförmige Bewegung

b) System von N MPs

Einige nützliche Begriffe:

- 'innere Kraft' $\mathbf{f}_{ki}$: Wechselwirkung zwischen zwei MPs (Kraft von k auf i)
- 'äußere Kraft' $\mathbf{F}_i$: äußerer Einfluss auf den i-ten MP
- 'Abgeschlossenes System': System ohne äußere Kräfte ($\mathbf{F}_i = 0$ für $i = 1, ..., N$)
- 'Offenes System': $\mathbf{F}_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, ..., N\}$
- Gesamtmasse: $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$
- Position des 'Schwerpunktes' (SP) (auch Massenmittelpunkt): $\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i$
- SP-Geschwindigkeit: $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i$
- SP (Gesamt-) Impuls: $\mathbf{P} = M\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i$
- Position eines MPs bzgl. SP: $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$

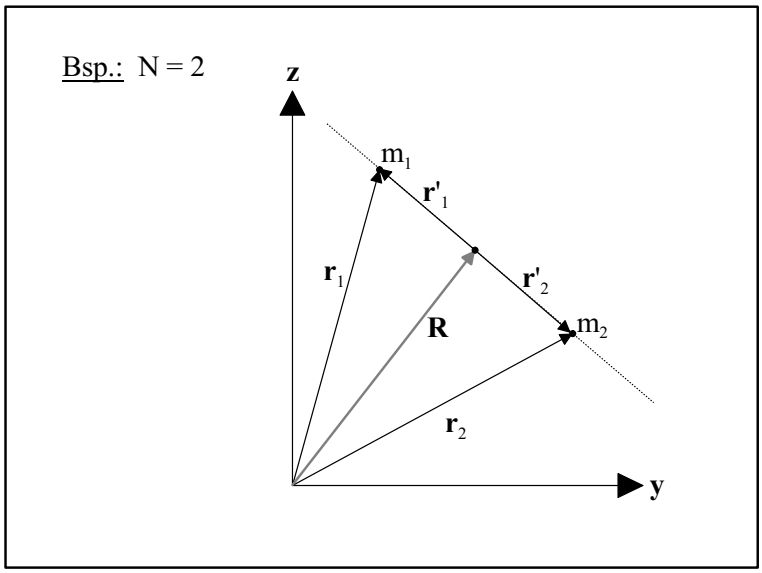


Abbildung 2.4: Zur Definition des Schwerpunktes

◁ BWGl für k-ten MP:

$$\dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{F}_k + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{f}_{ik}$$

beachte : $\mathbf{f}_{ik} = -\mathbf{f}_{ki} \longrightarrow \mathbf{f}_{kk} = 0$

$$\longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{N} \dot{\mathbf{p}}_k = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k + \sum_{i,k=1}^{N} \mathbf{f}_{ik}$$

$$\qquad\qquad \shortparallel \qquad\qquad \shortparallel \qquad\qquad \shortparallel \qquad\qquad \text{(3. Axiom)}$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_{ext} + 0} \qquad \text{Impulssatz / SP-Satz}$$

"Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse in ihm vereinigt wäre und alle äußeren Kräfte an ihm angreifen würden."

Impulserhaltung (gilt in abgeschlossenen Systemen):

$$\boxed{\text{falls} \quad \mathbf{F}_{ext} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\mathbf{P}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{P} = \text{konst.}}$$

In einem abgeschlossenen System kann man von einem 'raumfesten' IS durch eine GT in das inertiale 'SP-System' (charakterisiert durch $\mathbf{R}' = \mathbf{P}' = 0$) übergehen.

2.2.2 Drehimpuls

a) ein MP:
Definition: Drehimpuls (= Moment des Impulses)

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \qquad (\text{'Pseudovektor'}) \\ |\mathbf{l}| &= l = rp \sin\gamma \end{aligned}$$

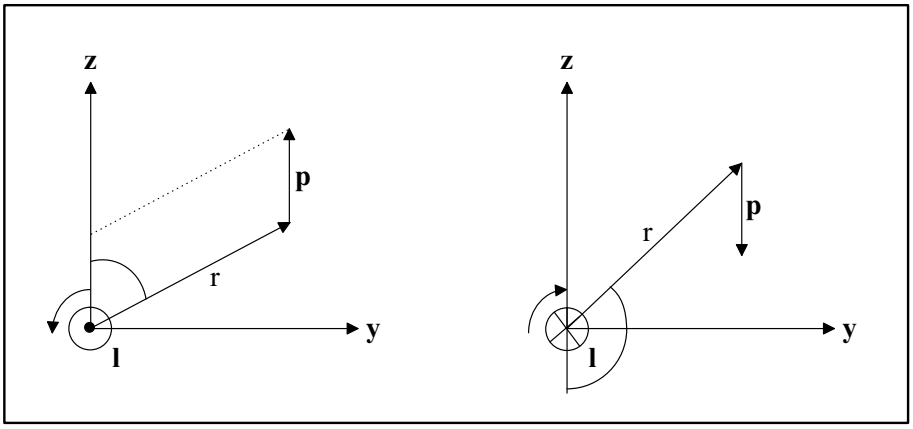


Abbildung 2.5: Im linken Bild zeigt der Drehimpulsvektor aus dem Blatt heraus, im rechten Bild hinein

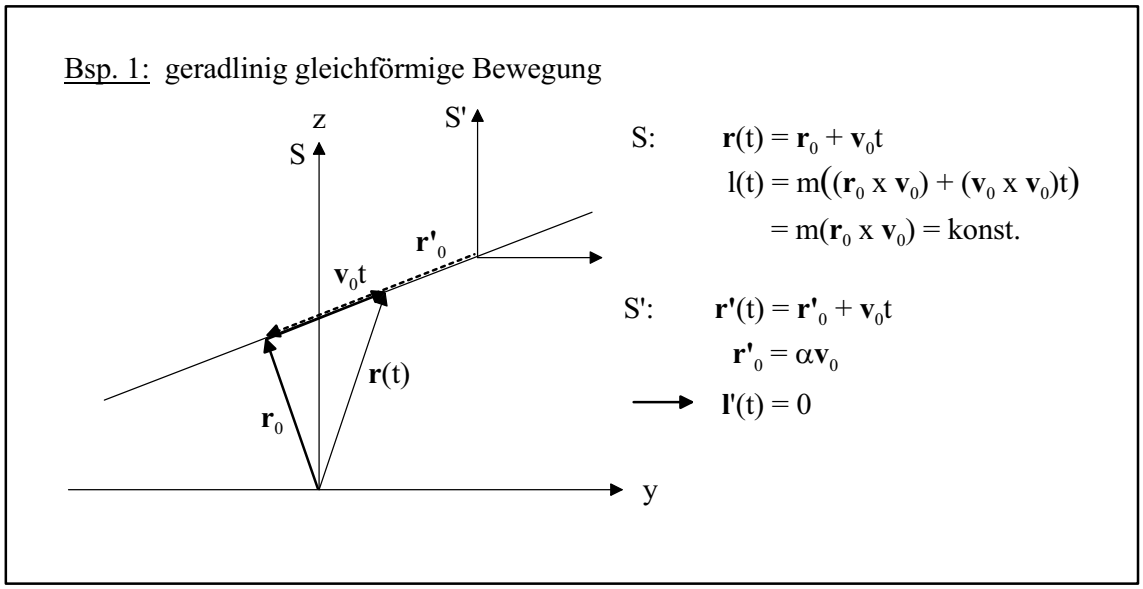


Abbildung 2.6: geradlinig-gleichförmige Bewegung aus Sicht zweier IS

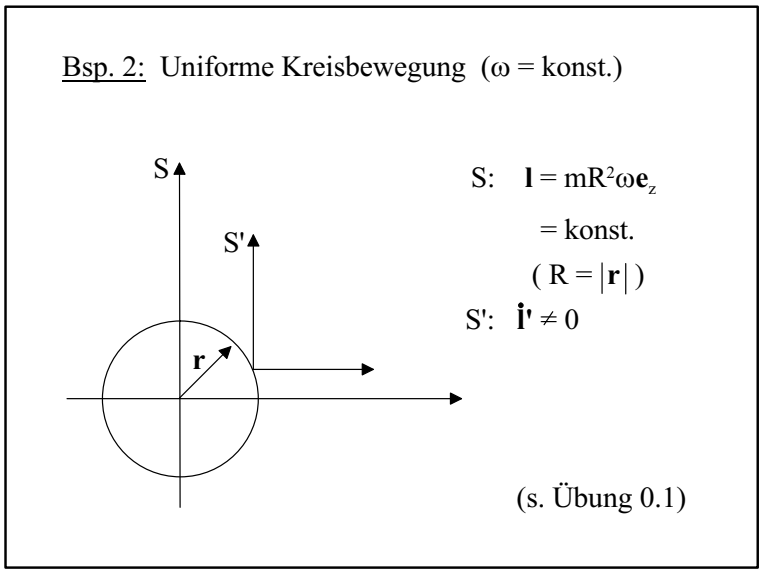


Abbildung 2.7: Uniforme Kreisbewegung

Bemerkung: Vollständige Angabe von $\mathbf{l}$ verlangt Festlegung des Bezugspunktes für die Momentbildung (gilt für jedes Moment eines Vektors)

$\lhd$ $$\dot{\mathbf{l}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = m(\mathbf{v} \times \mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Definition: Drehmoment $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{M}} \quad \text{Drehimpulssatz}$$

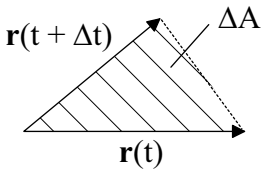
$$\boxed{\text{falls} \quad \mathbf{M} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\mathbf{l}} = 0, \ \mathbf{l} = \text{konst.}} \quad \text{Drehimpulserhaltung}$$

$$\begin{array}{llll} \mathbf{M} = 0 \quad \text{falls} & (i) & \mathbf{F} = 0 & \\ & (ii) & \mathbf{F} = F\mathbf{e}_r \ : & \text{Zentralkraft} \quad \mathbf{F} \parallel \mathbf{r} \end{array}$$

Zwei Aspekte der Drehimpulserhaltung:

(i) Erhaltung der Richtung $\longrightarrow$ ebene Bewegung

(ii) Erhaltung des Betrages:
◁



$$
\begin{aligned}
\Delta A &\approx \frac{1}{2}|\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}(t+\Delta t)| \\
&= \frac{1}{2}|\mathbf{r}(t)\times\big[\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)\big]| \\
\frac{\Delta A}{\Delta t} &= \frac{1}{2}|\big[\mathbf{r}(t)\times\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t}\big]| \\
\xrightarrow{\Delta t\to 0} &= \frac{1}{2}|\mathbf{r}\times\mathbf{v}| \\
\hookrightarrow \quad \dot{\mathbf{A}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) \\
&= \frac{1}{2m}\,\mathbf{l}
\end{aligned}
$$

(als Richtung wird die Flächennormale festgelegt)

'Flächengeschwindigkeit'

$|\dot{\mathbf{A}}| = \text{konst.} \longrightarrow$ Flächensatz ("Gleiche Zeiten, gleiche Flächen")

b) System von N MPs:

<u>Definition:</u> Gesamtdrehimpuls

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}(t) &= \sum_{k=1}^{N}\mathbf{l}_k(t) \\
&= \sum_{k}\big(\mathbf{r}_k(t)\times\mathbf{p}_k(t)\big) \\
\longrightarrow \dot{\mathbf{L}} &= \sum_{k}(\mathbf{r}_k\times\dot{\mathbf{p}}_k) \\
&= \sum_{k=1}^{N}(\mathbf{r}_k\times\mathbf{F}_k)+\sum_{i,k=1}^{N}(\mathbf{r}_k\times\mathbf{f}_{ik})
\end{aligned}
$$

<u>Nebenrechnung :</u>

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,k}(\mathbf{r}_k\times\mathbf{f}_{ik}) &= \sum_{i,k}(\mathbf{r}_i\times\mathbf{f}_{ki}) = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\big\{(\mathbf{r}_k\times\mathbf{f}_{ik})+(\mathbf{r}_i\times\mathbf{f}_{ki})\big\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,k}\big\{(\mathbf{r}_k\times\mathbf{f}_{ik})-(\mathbf{r}_i\times\mathbf{f}_{ik})\big\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,k}\big\{(\mathbf{r}_k-\mathbf{r}_i)\times\mathbf{f}_{ik}\big\} = 0, \quad \text{falls} \\
\mathbf{f}_{ik} &= (\mathbf{r}_k-\mathbf{r}_i)f_{ik}
\end{aligned}
$$

($\mathbf{f}_{ik}$ zeigt in Richtung von $(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)$; vgl. Abb. 2.3)

$$\text{Gesamtdrehmoment} \quad \mathbf{M} = \sum_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k) = \sum_k \mathbf{M}_k$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}} \quad \text{Drehimpulssatz}$$

$$\text{falls } \mathbf{M} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{L}} = 0 \\ \\ \mathbf{L} = konst. \end{array} \right\} \quad \text{Drehimpulserhaltung}$$

(gilt in abgeschlossenen Systemen)

<u>Drehimpuls + Schwerpunkt:</u> (vgl. Abbildung 2.4)

$$\text{Ausgangspunkt}: \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{r'}_k + \mathbf{R}\ ; \quad \mathbf{v}_k = \mathbf{v'}_k + \mathbf{V}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \quad \mathbf{L} &= \sum_k m_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k) \\ &= \sum_k m_k \big\{ (\mathbf{r'}_k + \mathbf{R}) \times (\mathbf{v'}_k + \mathbf{V}) \big\} \\ &= \underbrace{\sum_k m_k (\mathbf{R} \times \mathbf{V})}_{= M(\mathbf{R} \times \mathbf{V}) = \mathbf{R} \times \mathbf{P} \equiv \mathbf{L}_{SP}} + (\mathbf{R} \times \mathbf{v'}_k) + (\mathbf{r'}_k \times \mathbf{V}) + (\mathbf{r'}_k \times \mathbf{v'}_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lhd \quad \sum_k m_k \mathbf{r'}_k &= \sum_k m_k (\mathbf{r}_k - \mathbf{R}) = \sum_k m_k \mathbf{r}_k - M\mathbf{R} = M\mathbf{R} - M\mathbf{R} = 0 \\ \longrightarrow \sum_k m_k \mathbf{v'}_k &= \frac{d}{dt} \sum_k m_k \mathbf{r'}_k = 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{L} = \mathbf{L}_{SP} + \mathbf{L}' \quad \text{wobei} \quad \mathbf{L}_{SP} = \mathbf{R} \times \mathbf{P},\ \mathbf{L}' = \sum_k \mathbf{l'}_k = \sum_k m_k (\mathbf{r'}_k \times \mathbf{v'}_k)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = \sum_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k) &= \sum_k \big\{ (\mathbf{R} + \mathbf{r'}_k) \times \mathbf{F}_k \big\} \\ &= \mathbf{R} \times \sum_k \mathbf{F}_k + \sum_k (\mathbf{r'}_k \times \mathbf{F}_k) = \mathbf{R} \times \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{M'}_{ext} \\ &= \mathbf{M}_{SP} + \mathbf{M'}_{ext} \end{aligned}$$

$$\overset{\text{Drehimpulssatz}}{\Longrightarrow} \quad \dot{\mathbf{L}}_{SP} + \dot{\mathbf{L}}'_{ext} = \mathbf{M}_{SP} + \mathbf{M}'_{ext}$$

Wegen $\dot{\mathbf{L}}_{SP} = M(\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{V}}) = \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{P}} \overset{\text{SP-Satz}}{=} \mathbf{R} \times \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{M}_{SP}$ folgt

$\boxed{\dot{\mathbf{L}}_{SP} = \mathbf{M}_{SP}}$	Drehimpulssatz für SP
$\boxed{\dot{\mathbf{L}}' = \mathbf{M}'_{ext}}$	Drehimpulssatz für Teilchensystem bzgl. SP

(hat dieselbe Form wie der ursprüngliche Drehimpulssatz, obwohl das SP-System i.a. kein Inertialsystem ist)

2.2.3 Arbeit und Energie

a) Ein MP:

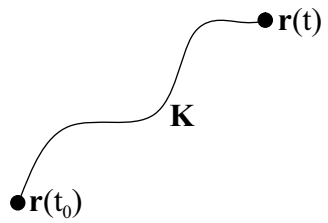
<u>Definition 'Arbeit':</u> Sei $\mathbf{r}(t)$ die in $[t_0,\ t]$ durchlaufene Bahn

$$A := \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t'),\ \mathbf{v}(t'),\ t'\big) \cdot \mathbf{v}(t')\ dt' \qquad \text{Arbeit}$$

Falls Kraft "Vektorfeld" $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ ist:

Arbeit ist ein Kurvenintegral

$$\begin{aligned} A &= \int_K \mathbf{F}(\mathbf{r})\ d\mathbf{r} \qquad \text{mit} \\ d\mathbf{r} &= \mathbf{v}(t')\ dt' \end{aligned}$$



siehe [Lüc], Kap. 4.2

Diskussion:

(i) Falls $\mathbf{F} =$ konst. und Weg geradlinig $\longrightarrow A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$

(ii) $A = 0$ falls $\mathbf{F} \perp \mathbf{r}$

Beispiel 1: 'Hochhalten' einer Masse m im Schwerefeld
$\longrightarrow \; A = 0$ (da $\mathbf{v} = 0$)

Beispiel 2: Uniforme Kreisbewegung

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= (R\cos\omega t,\ R\sin\omega t) \\
\mathbf{v} &= (-R\omega\sin\omega t,\ R\omega\cos\omega t) \\
\mathbf{a} &= (-R\omega^2\cos\omega t,\ -R\omega^2\sin\omega t) \\
&= -\omega^2\mathbf{r} \\
\longrightarrow m\mathbf{a} &= \mathbf{F}(\mathbf{r}) \\
&= -m\omega^2\mathbf{r} \\
\longrightarrow \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{F} \perp d\mathbf{r} &= \mathbf{v}\ dt \implies A = 0
\end{aligned}$$

(iii) $[A] = 1\frac{kgm^2}{s^2} = 1Nm = 1\text{Joule}$

(iv) $P := \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t'), t'\big) \cdot \mathbf{v}(t')dt' = \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t\big) \cdot \mathbf{v}(t)$

"Leistung" $[P] = 1\frac{J}{s} = 1\text{Watt}$

$$\begin{aligned}
\triangleleft \qquad A &= \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t'), t'\big) \cdot \mathbf{v}(t')\ dt' \\
&\overset{\text{2. Axiom}}{=} m\int_{t_0}^{t} \dot{\mathbf{v}}(t') \cdot \mathbf{v}(t')\ dt' \\
&= \frac{m}{2}\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt'}\big(\mathbf{v}^2(t')\big)\ dt' \\
&= \frac{m}{2}\big(\mathbf{v}^2(t) - \mathbf{v}^2(t_0)\big) \\
&= \frac{1}{2m}\big(\mathbf{p}^2(t) - \mathbf{p}^2(t_0)\big)
\end{aligned}$$

Definition: kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \geq 0$$

$$\boxed{\longrightarrow \quad T(t) = T(t_0) + A(t_0 \to t)}$$

'A-T-Relation' (gilt für alle Kräfte)

<u>Definition:</u> konservatives Kraftfeld

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) := -\nabla U(\mathbf{r})$$

$$\left.\begin{array}{l} \Longleftrightarrow \int_{K1} \mathbf{F}(\mathbf{r}')\ d\mathbf{r}' = \int_{K2} \mathbf{F}(\mathbf{r}')\ d\mathbf{r}' \\ \Longleftrightarrow \oint_K \mathbf{F}(\mathbf{r}')\ d\mathbf{r}' \ = 0 \end{array}\right\} \text{Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals}$$

$$\overset{\text{Beweisandeutung}}{\Longrightarrow} \quad \begin{aligned} \int_{K1} \mathbf{F}(\mathbf{r}')\ d\mathbf{r}' &= -\int_{K1} \nabla U(\mathbf{r}')\ d\mathbf{r}' \\ = -\int_{r_0}^{r} dU &= U(\mathbf{r}_0) - U(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Rückweg wird gezeigt unter der Zuhilfenahme des Mittelwertsatzes.

Außerdem folgt:

$$rot\ \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = 0$$

(denn $rotgradU = 0$ für alle $U(r)$)

Rückweg wird gezeigt mit dem Integralsatz von Stokes:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F})\ d\mathbf{A} = \oint_K \mathbf{F}\ d\mathbf{r} \qquad \text{(siehe [Lüc], Kap. 4.3)}$$

Zusammenfassung konservatives Kraftfeld :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F} = -\nabla U & \Longleftrightarrow & \nabla \times \mathbf{F} = 0 \\ \Updownarrow & \nwarrow\ \searrow & \Updownarrow \\ \int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} & \Longleftrightarrow & \oint_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \\ \text{wegunabhängig} & & \end{array}$$

<u>Definition :</u> $\quad U(\mathbf{r}) = -\int^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}$ "potentielle Energie"

Übliche Festlegung der unbestimmten Konstanten durch $U(\mathbf{r}) \overset{\mathbf{r}\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Aus A − T − Relation folgt : $\quad A = U(1) - U(2) \ = \ T(2) - T(1)$

$$\Longleftrightarrow \qquad T(1) + U(1) \ = \ T(2) + U(2)$$

$$\boxed{E = T + U = \text{konst.}}$$ Energieerhaltung

<u>Allgemeinere Situation:</u>

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_{konservativ} + \mathbf{F}_{dissipativ} \\ \nabla \times \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F}_{diss} \neq 0 \end{aligned}$$

$\lhd$ <u>Newton II:</u>

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}} &= -\nabla U(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_{diss} \qquad | \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{F}_{diss} \cdot \mathbf{v} &= m\dot{\mathbf{v}}\mathbf{v} + \nabla U \mathbf{v} \\ \Longleftrightarrow \mathbf{F}_{diss} \cdot \mathbf{v} &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{m}{2}\mathbf{v}^2 + U(\mathbf{r}(t))\Big) \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\Big(T + U\Big) = \frac{dE}{dt} = \mathbf{F}_{diss} \cdot \mathbf{v}}$$ allg. Energiesatz

<u>Definition :</u> $A_{diss} = \int \mathbf{F}_{diss} \cdot \mathbf{v}\ dt \longrightarrow \frac{dA_{diss}}{dt} = \mathbf{F}_{diss} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{P}_{diss}$

b) System von N MPs:

Ausgangspunkt: BWGl für k-ten MP: $\dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{F}_k + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{f}_{ik}$

<u>Einschränkungen:</u>

(i) $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k(\mathbf{r}_k) = -\nabla_k U_k(\mathbf{r}_k)$ (äußere Kräfte sind konservativ)

(ii) $\mathbf{f}_{ik} = \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) = -\mathbf{f}_{ki}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)$ (innere Kräfte hängen nur jeweils von $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)$ ab)

(iii) $\nabla_k \times \mathbf{f}_{ik} = \nabla_i \times \mathbf{f}_{ki} = 0$ (sind konservativ)

$$\longrightarrow \quad \mathbf{f}_{ik} = -\nabla_k V_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k),\ \mathbf{f}_{ki} = -\nabla_i V_{ki}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)$$

Konservative innere Kräfte zwischen zwei MPs können auf ein gemeinsames Potential zurückgeführt werden (d.h $V_{ik} = V_{ki}$)

$$\boxed{\nabla_k V_{ik} = -\nabla_i V_{ki}}$$ "Zwei-Teilchen-Wechselwirkung"

$$
\begin{aligned}
\triangleleft \qquad \dot{\mathbf{p}}_k &= \mathbf{F}_k + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{f}_{ik} \\
\longrightarrow \quad \sum_k \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{v}_k &= \sum_k m_k \cdot \dot{\mathbf{v}}_k \cdot \mathbf{v}_k - \sum_k \mathbf{F}_k(\mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{v}_k \\
\text{RS}: \qquad &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_k m_k \mathbf{v}_k^2 + \sum_k \nabla_k U_k(\mathbf{r}_k) \cdot \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\sum_k \Big(\frac{m_k}{2}\mathbf{v}_k^2 + U_k(\mathbf{r}_k(t))\Big) \\
&= \frac{d}{dt}\sum_k \Big(T_k + U_k\Big) \;=\; \frac{d}{dt}\Big(T + U\Big) \\
\text{LS}: \qquad &= \frac{1}{2}\sum_{i,k} \Big(\mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{v}_k + \mathbf{f}_{ki}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{v}_i\Big) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i \neq k} \Big(\mathbf{f}_{ik} \cdot \mathbf{v}_k - \mathbf{f}_{ik} \cdot \mathbf{v}_i\Big) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i \neq k} \mathbf{f}_{ik} \cdot \big(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i\big)
\end{aligned}
$$

Definiere :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_{ik} &:= \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k \\
\mathbf{v}_{ik} &:= \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hookrightarrow \quad \nabla_i V_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) &= \nabla_{ik} V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) = -\nabla_k V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) \\
\hookrightarrow \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) &= -\nabla_k V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) = \nabla_{ik} V_{ik}(\mathbf{r}_{ik})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\longrightarrow \quad \text{LS}: \qquad &= -\frac{1}{2}\sum_{i \neq k} \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) \cdot \mathbf{v}_{ik} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i \neq k} \nabla_{ik} V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) \cdot \frac{d\mathbf{r}_{ik}}{dt} \\
&= -\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sum_{i \neq k} V_{ik}\big(\mathbf{r}_{ik}(t)\big) \\
&= -\frac{d}{dt} V
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(T + U + V\Big) &= 0 \\ T + U + V = E &= \text{konst.} \end{aligned}} \quad \longrightarrow \text{Energieerhaltung}
$$

Die Beträge zur Gesamtenergie E:

- $T = \sum_k T_k$: kinetische Energie des Teilchensystems
- $U = \sum_k U_k$: potentielle Energie aufgrund äußerer Kräfte
- $V = \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} V_{ik} = \sum_{i<k} V_{ik}$: 'interne' WW-Energie: $\begin{pmatrix} N \\ 2 \end{pmatrix}$ Beträge

<u>Beispiele:</u>

$$\begin{aligned}
\underline{N = 2:} \qquad V &= \frac{1}{2}\left(V_{12} + V_{21}\right) \overset{V_{12} \equiv V_{21}}{=} V_{12} \\
\underline{\mathrm{N} = 3:} \qquad V &= \frac{1}{2}\left(V_{12} + V_{13} + V_{23} + V_{21} + V_{31} + V_{32}\right) \\
&= \underbrace{V_{12} + V_{13} + V_{23}}_{\sum\limits_{i<k} V_{ik}}
\end{aligned}$$

Kapitel 3

Anwendungen I

3.1 Elementare Bewegungsprobleme

3.1.1 Eindimensionale Probleme mit $E = T + U =$ konst.

a) Qualitative Vorbemerkung

Betrachte potentielle Energie und ziehe qualitative Schlüsse über die möglichen Bewegungsformen aus dem Energiesatz

$$E = T + U \quad \Longleftrightarrow \quad E - U(x) = T \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{E \geq U(x)}$$

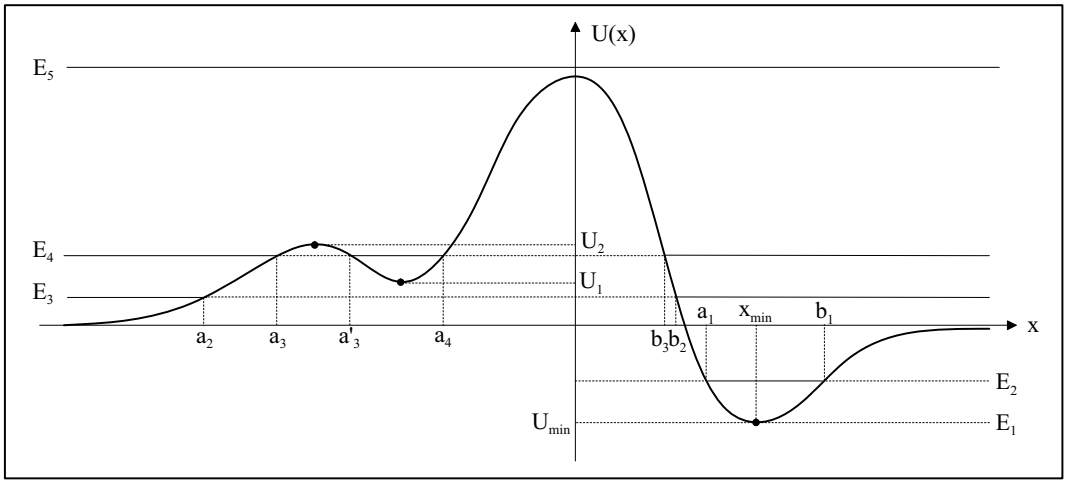


Abbildung 3.1: Generisches eindimensionales Potential

(i) $E < U_{min}$: nicht möglich

(ii) $E_1 = U_{min}$: ruhender MP bei $x = x_{min}$

(iii) $U_{min} < E_2 < 0$: gebundene (finite) Bewegung in $[a_1, b_1]$
$\dot{x}(a_1) = v(a_1) = v(b_1) = \dot{x}(b_1) = 0; \quad a_1, b_1$ "Umkehrpunkte"

(iv) $0 < E_3 < U_1$: ungebundene (infinite) Bewegung entweder in $(-\infty, a_2]$ oder in $[b_2, \infty)$

(v) $U_1 < E_4 < U_2$: finite Bewegung in $[a_3', a_4]$ oder infinite in $(-\infty, a_3]$ oder $[b_3, \infty)$

(vi) $U_{max} < E_5$: infinite Bewegung in $(-\infty, \infty)$

Eine analoge Diskussion ist möglich im dreidimensionalen Raum im Falle eines Zentralkraftproblems (vgl. Kap. 5.1.2)

b) Quantitative Vorbemerkung:

$$\lhd \qquad E = T + U \iff v^2(t) = \frac{2(E - U(x))}{m}$$
$$\iff \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2(E - U(x))}{m}}$$

Lösung der DGl durch 'Variablentrennung':

$$\hookrightarrow \qquad \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2(E-U(x))}{m}}} = \int_{t_0}^{t} dt$$

$$\iff t = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \Big[E - U(x')\Big]^{-\frac{1}{2}} \, dx' + t_0 = t(x)$$

$\longrightarrow$ Umkehrung liefert $x(t)$

$\longrightarrow$ Energiesatz = 1. Integral der BWGl

c) Mathematische Vorbemerkung zur gewöhnlichen DGls:
Siehe dazu [Lüc], Kap.5; [Blö], Kap. 3.2, Anhang C.3; [DL], Mathematische Ergänzungen (CD), Kap. 2 und 6

(i) <u>Hinreichende</u> Existenz- und Eindeutigkeitsbedingungen:

$$\lhd \qquad \dot{x} = f(x, t)$$

(explizite) gewöhnliche DGl 1. Ordnung
Falls f stetig (partiell) differenzierbar ist, so existiert (für jedes Paar von Anfangswerten (x_0, t_0)) eine <u>eindeutige</u> Lösung der DGl., d.h.

$$\exists\, x(t) : \; \dot{x} = f(x(t), t) \quad \text{mit} \quad x(t_0) = x_0$$

(ii) Analoges gilt für DGl-Systeme:

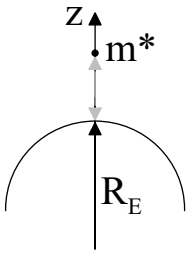
$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1, ..., x_n, t) \\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, ..., x_n, t) \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= f_n(x_1, ..., x_n, t)
\end{aligned}$$

(iii) Eine DGl n-ter Ordnung kann man auf ein System von DGl's 1. Ordnung zurückführen, insbesondere:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= f(x, v, t) \end{aligned}$$

(iv) Systematische Lösungsmethoden sind nur für spezielle Typen von DGl's bekannt (insb. lineare DGl's mit konstanten Koeffizienten)

d) <u>Beispiel:</u> Bewegung im homogenen Schwerefeld (der Erde):



$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= -m^* g \mathbf{e}_z \\
g &= \frac{M_E \cdot \gamma}{R_e^2} \\
&= 9,81 \, \frac{m}{s^2} \quad \text{(Gravitationsbeschleunigung)} \\
& \quad m^* : \text{ schwere Masse des MPs}
\end{aligned}$$

<u>mit den Werten:</u>

Gravitationskonstante	γ	$=$	$6,6726 \cdot 10^{-11} \; \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$
Erdbeschleunigung	g	$=$	$9,81 \; \frac{m}{s^2}$
Erdmasse	m_E	$=$	$5,97 \cdot 10^{24} \; kg$
Radius Erde	R_E	$=$	$6,378 \cdot 10^6 \; m$

Frage 1: träge und schwere Masse
$\longrightarrow$ <u>empirisch:</u> $m = m^*$ (mit Messgenauigkeit $\frac{\Delta m}{m} = \frac{m - m^*}{m} \lesssim 10^{-10}$)
$\longrightarrow$ <u>theoretisch:</u> $m = m^*$ ist eine Grundannahme der Allgemeinen Relativitätstheorie (ein Aspekt des sogenannten Äquivalenzprinzips: "Gravitationskräfte sind äquivalent zu Trägheitskräften")

Frage 2: Wie kommt man vom allg. Gravitationsgesetz zur obigen Kraft für das homogene Schwerefeld der Erde?

Exkurs zu Frage 2:
Ausgangspunkt: Newtons Gravitationsgesetz

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{21} &= -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{r}_{12} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \end{aligned}$$

(zur Veranschaulichung siehe hierzu Abbildung 2.3)

$$\text{prüfe}: \qquad \nabla_1 \times \mathbf{F}_{21} = \nabla_2 \times \mathbf{F}_{12} = 0$$

potentielle Energie:

$$U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \equiv U_{12} = U_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

(prüfe: $\nabla_1 U_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{12} = -\nabla_2 U_{12}$)

<u>Schritte:</u>

– Potentielle Energie des MPs m aufgrund einer diskreten Massenverteilung $(m_1, ..., m_N)$

$$U(\mathbf{r}) = -\gamma m \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

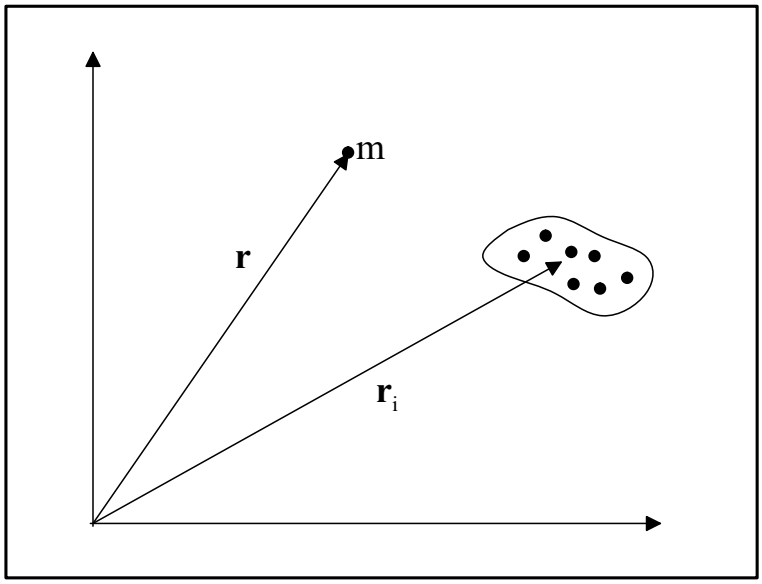


Abbildung 3.2: Zum Feld einer diskreten Verteilung von MPs

– Potentielle Energie aufgrund kontinuierlicher Massenverteilung

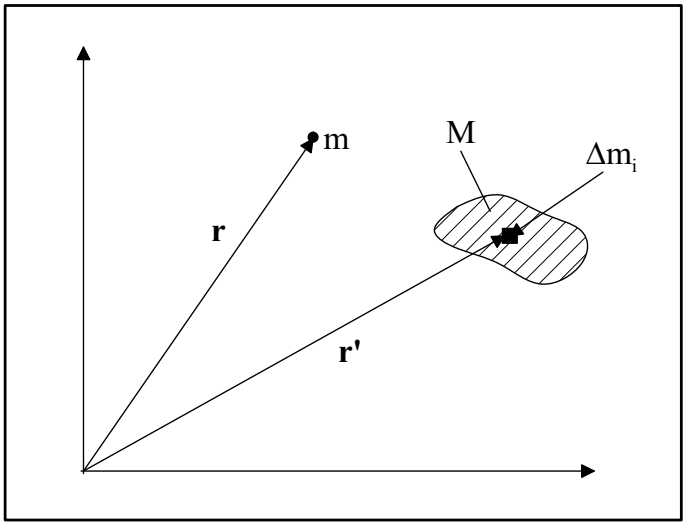


Abbildung 3.3: Zum Feld einer kontinuierlichen Massenverteilung

$$m_i \equiv \Delta m_i \quad \approx \quad \rho(\mathbf{r}_i)\Delta V_i \quad \stackrel{\Delta m_i \to 0}{\longrightarrow} \quad \rho(\mathbf{r}')\ dV' = \rho(\mathbf{r}')\ d^3r'$$

$$\longrightarrow M = \sum_i \Delta m_i \quad \stackrel{\Delta m \to 0}{\longrightarrow} \quad \int_V \rho(\mathbf{r}') d^3r'$$

$$\longrightarrow U(\mathbf{r}) = -\gamma m \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\ d^3r'$$

– Annahme: homogene Massenverteilung $\rho(\mathbf{r}') = \rho_0$
Zur Auswertung des Integrals in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} d^3r' &= r'^2\ dr' \sin\theta'\ d\theta'\ d\phi' \\ \text{wähle o.B.d.A.} \qquad \mathbf{r} &= (0,0,z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow U(\mathbf{r}) &= -\gamma m \rho_0 \int \frac{d^3r'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'}} \\ &= -\gamma m \rho_0 \int_0^{R_E} dr' r'^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta'\ d\theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'}} \int_0^{2\pi}\ d\varphi' \end{aligned}$$

1. Substitution:

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta'\ ; \qquad & x(0) = 1 \\ dx &= -\sin\theta'\ d\theta'\ ; \qquad & x(\pi) = -1 \end{aligned}$$

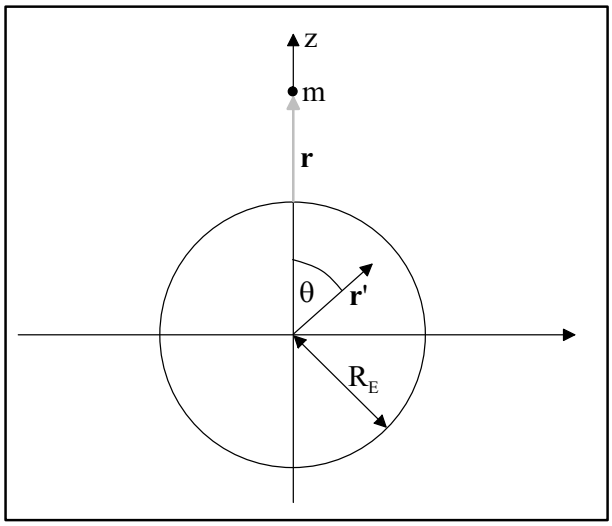


Abbildung 3.4: Geeignetes Koordinatensystem zur Auswertung des Integrals

$$U(\mathbf{r}) = -2\pi\gamma m\rho_0 \int_0^{R_E} dr' r'^2 \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'}}$$

Bemerkung: Zu diesem Zwischenergebnis gelangt man auch direkt durch die Zerlegung des Volumenelements $d^3r' = r'^2\ dr'\ d(\cos\theta')\ d\phi'$ und der Verwendung der entsprechenden Integrationsgrenzen.

2. Substitution:

$$\begin{aligned} y &= r^2 + r'^2 - 2rr'x \\ dy &= -2rr'\ dx \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \triangleleft \qquad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'x}} = -\frac{1}{2rr'} \int_{y(-1)}^{y(1)} \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{rr'} \left[r^2 + r'^2 - 2rr'x\right]^{\frac{1}{2}} \Big|_{-1}^{1} \\ &= -\frac{1}{rr'} \left[\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'} - \sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr'}\right] \\ &= -\frac{1}{rr'} \left[\sqrt{(r - r')^2} - \sqrt{(r + r')^2}\right] \\ &= -\frac{1}{rr'} \left[\begin{array}{ll} r - r' - (r + r') & r > r' \\ r' - r - (r + r') & r' > r \end{array}\right. \\ &= \left[\begin{array}{ll} \frac{2}{r} & r > r' \\ \frac{2}{r'} & r' > r \end{array}\right. \end{aligned}$$

Fallunterscheidung zur weiteren Auswertung:

<u>Fall 1 :</u> $r > R_E$ (d.h. $r > r'$)

$$\begin{aligned} \longrightarrow \quad U(\mathbf{r}) &= -4\pi\gamma m\rho_0 \frac{1}{r}\int_0^{R_E} r'^2\, dr' \\ &= \underbrace{-\frac{4\pi}{3}\rho_0 R_E^3}_{M_E}\gamma\frac{m}{r} \\ &= -\gamma\frac{mM_E}{r} \quad = \quad U(r) \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = -\gamma\frac{mM_E}{r^3}\mathbf{r} = -\gamma\frac{mM_E}{r^2}\mathbf{e_r}$$

<u>Definition:</u>

$$\left.\begin{aligned} &'\text{Gravitationsfeld}' \; G(\mathbf{r}) = \tfrac{1}{m}\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\gamma\tfrac{M_E}{r^2}\mathbf{e_r} \\ &'\text{Gravitationspotential}' \; \phi(\mathbf{r}) = \tfrac{1}{m}U(\mathbf{r}) = -\gamma\tfrac{M_E}{r} \end{aligned}\right\} \text{unabhängig vom 'Probekörper' } m$$

Entwicklung für $r = R_E + z'$ mit $z' \ll R_E$ (Erdnähe):

$$\begin{aligned} \longrightarrow \quad U(r) &= -\gamma m M_E \frac{1}{R_E + z'} \\ &= -\gamma\frac{mM_E}{R_E}\cdot\frac{1}{1+\frac{z'}{R_E}} \\ &\approx -\gamma\frac{mM_E}{R_E}\cdot\left(1 - \frac{z'}{R_E} + \left(\frac{z'}{R_E}\right)^2 \pm ...\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\approx -\gamma\frac{mM_E}{R_E} + \gamma\frac{mM_E}{R_E^2}z' \pm .... \\ &= U_0 + mgz' + ... \qquad \left(\text{mit } g = \gamma\frac{mM_E}{R_E^2}\right) \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \quad \tilde{U} = U - U_0 = mgz \; ; \quad \mathbf{F}(z) = -\frac{dU}{dz}\,\mathbf{e}_z = -mg\mathbf{e_z}$$

$\longrightarrow$ homogenes Schwerefeld

<u>Fall 2 :</u> $r < R_E \quad \longrightarrow \quad \displaystyle\int_0^{R_E} dr' = \underbrace{\int_0^{r} dr'}_{r > r'} + \underbrace{\int_r^{R_E} dr'}_{r' > r}$

$$\begin{aligned}
\longrightarrow \quad U(r) &= -4\pi\gamma m\rho_0\Big\{\frac{1}{r}\int_0^r r'^2\,dr' + \int_r^{R_E} r'\,dr'\Big\} \\
&= -4\pi\gamma m\rho_0\Big\{\frac{1}{3}r^2 + \frac{1}{2}\big(R_E^2 - r^2\big)\Big\} \\
&= -4\pi\gamma m\rho_0\Big[\frac{1}{2}R_E^2 - \frac{1}{6}r^2\Big]
\end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad M_E = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R_E^3 \quad \Longleftrightarrow \quad \rho_0 = \frac{3}{4\pi}\frac{M}{R_E^3}$$

$$\boxed{U(r) = -\gamma m M_E\left[\frac{3}{2}\frac{1}{R_E} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R_E^3}\right]}$$

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = -\gamma\frac{mM_E}{R_E^3}\mathbf{r}}$$

<u>Zusammenfassung:</u>

$$U(r) = -\gamma m M_E \begin{cases} \frac{1}{r} & r \geq R_E \\ \frac{3}{2}\frac{1}{R_E} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R_E^3} & r \leq R_E \end{cases}$$

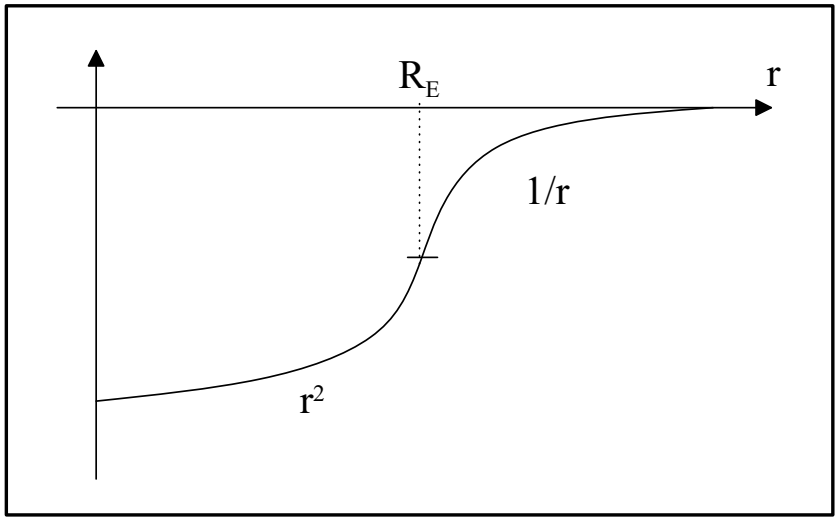


Abbildung 3.5: Potentialverlauf im Inneren und im Außenbereich der Erde

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\gamma m M_E \begin{cases} \frac{1}{r^3}\mathbf{r} & r \geq R_E \\ \frac{1}{R_E^3}\mathbf{r} & r \leq R_E \end{cases}$$

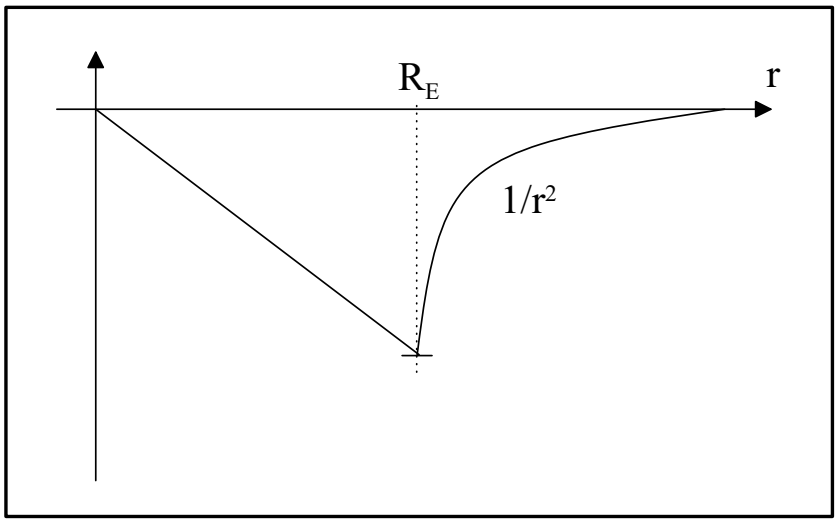


Abbildung 3.6: Verlauf der Erdanziehungskraft außerhalb und innerhalb der Erde

Zusatzbemerkungen:

(i) $\phi(r) = -\gamma \frac{M}{r}$ für $r > R$ gilt für jede isotrope Dichteverteilung ($\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$).
Literatur: [DL], Kap. 3.2.4.1
"Das Gravitationspotential/-feld einer isotropen Massenverteilung sieht von außen aus wie das eines Massenpunktes der Gesamtmasse M im SP."

(ii) Analoge Aussagen gelten in der Elektrostatik

(iii) Alternative Rechenmethoden führen zum selben Ziel. Stichworte: "Gauß'sches Gesetz", "Multipolentwicklung"

Zurück zur BWGl für Bewegung im homogenen Schwerefeld:

$$\ddot{z} = -g \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{z} = v_z \\ \dot{v}_z = \frac{dv_z}{dt} = -g \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\xrightarrow{\text{Variablentrennung}} \quad \int dv_z &= -g \int dt \\
v_z(t) &= -gt + C_1 \\
\text{AB}: \quad v_z(0) &= v_0 = C_1 \\
\int dz &= -g \int dt + v_0 \int dt \\
\Longrightarrow \quad z(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + C_2 \\
\text{AB}: \quad z(0) &= z_0 \;=\; C_2
\end{aligned}
$$

$$
\text{insb.} \quad \xrightarrow{v_0=0} \quad \boxed{z(t) = z_0 - \frac{1}{2} g t^2} \quad \text{freier Fall aus Ruhelage}
$$

<u>Alternativer Lösungsweg:</u>

$$
\begin{aligned}
\text{Ausgangspunkt (E – Satz)} \quad t(z) &= \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{z_0}^{z} \Big[E - U(z')\Big]^{-\frac{1}{2}} \, dz' \quad (t_0 = 0) \\
\text{mit } \; U(z) = mgz \qquad t(z) &= -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{z_0}^{z} \frac{dz'}{\sqrt{E - mgz'}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{mg^2}} \left\{ \sqrt{E - mgz} - \sqrt{E - mgz_0} \right\} \\
\Longleftrightarrow \quad \sqrt{E - mgz} &= \sqrt{\frac{m}{2}} g t + \sqrt{E - mgz_0} \\
E - mgz &= \left(\sqrt{E - mgz_0} + \sqrt{\frac{m}{2}} g t \right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\Longleftrightarrow \quad \boxed{z(t) = \frac{E}{mg} - \frac{1}{mg} \left(\sqrt{E - mgz_0} + \sqrt{\frac{m}{2}} g t \right)^2}
$$

$$
\text{ABs}: \quad z(0) = z_0; \; v_z(0) = 0; \quad \longrightarrow \quad E = T + U = T(0) + U(0) = mgz
$$

$$
\longrightarrow \quad \boxed{z(t) = z_0 - \frac{1}{2} g t^2}
$$

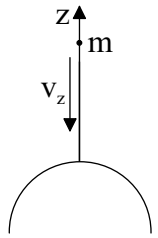
3.1.2 Reibung ($\dot{E} \neq 0$)

Phänomenologische Ansätze für Bewegung in einem Medium

(i) Stokes'sche (viskose) Reibung $\mathbf{F}_S = -\beta \mathbf{v}$, $(\beta > 0)$
$\longrightarrow$ gültig für 'kleine' $\mathbf{v}$

(ii) Newton'sche Reibung $\mathbf{F}_N = -\gamma v \mathbf{v}$, $(\gamma > 0)$, $(v = |\mathbf{v}| > 0)$
$\longrightarrow$ gültig für 'größere' $\mathbf{v}$ (aber kleiner als Schallgeschwindigkeit)

a) Freier Fall mit Stokes'scher Reibung:



$$\text{BWGl.}: \quad \ddot{z} = -g - bv_z \ , \qquad (b = \frac{\beta}{m})$$
$$= -g - b\dot{z}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{dz}{dt} = v_z \\ \dot{v}_z = \frac{dv_z}{dt} = -g - bv_z \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{Variablentrennung}} \quad \int \frac{dv_z}{g + bv_z} = -\int dt = -t + konst.$$
$$ln(g + bv_z) = -bt + konst.$$
$$g + bv_z = C_1 e^{-bt}$$
$$\hookrightarrow \quad v_z(t) = \frac{C_1}{\beta} m e^{-\frac{\beta t}{m}} - \frac{mg}{\beta}$$

$$\text{AB}: \qquad v_z(0) = v_0 = \frac{C_1}{\beta} m - \frac{mg}{\beta} \quad \Longleftrightarrow \quad C_1 = \frac{v_0 \beta}{m} + g$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{v_z(t) = \Big(v_0 + \frac{mg}{\beta}\Big) e^{-\frac{\beta t}{m}} - \frac{mg}{\beta}}$$

$$\xrightarrow{\text{2.Integration}} \quad z(t) = -\frac{m}{\beta}\Big(v_0 + \frac{mg}{\beta}\Big) e^{-\frac{\beta t}{m}} - \frac{mgt}{\beta} + C_2$$
$$\text{AB}: \quad z(0) = z_0 = -\frac{m}{\beta}\Big(v_0 + \frac{mg}{\beta}\Big) + C_2$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{z(t) = z_0 - \frac{mg}{\beta} t + \frac{m}{\beta}\Big(v_0 + \frac{mg}{\beta}\Big)\Big(1 - e^{-\frac{\beta t}{m}}\Big)}$$

<u>Diskussion:</u>

(i) Beschleunigung $a_z(t) = \dot{v}_z = -\frac{\beta}{m}\left(v_0 + \frac{mg}{\beta}\right)e^{-\frac{\beta t}{m}}$

(ii) Langzeitverhalten:

$$\left.\begin{array}{l} a_z(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\[2ex] v_z(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{mg}{\beta} \equiv -v_\infty = konst. \\[2ex] z(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} z_0 + \frac{v_0+v_\infty}{b} - v_\infty t \end{array}\right\} \text{geradlinig} - \text{gleichförmige Bewegung}$$

(iii) Kurzzeitverhalten: $(t \to 0)$

$$\begin{array}{lrcl} \text{benutze} & e^{-bt} & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{b^n}{n!}t^n = 1 - bt + \frac{1}{2}b^2t^2 \pm ... \\ & z(t) & = & z_0 - v_\infty t + \dfrac{v_0+v_\infty}{b}(1 - 1 + bt - \dfrac{1}{2}b^2t^2 \pm ...) \\ & & \approx & z_0 + v_0 t - \dfrac{b}{2}(v_0+v_\infty)t^2 \\ \text{für } v_0 = 0 & z(t) & = & z_0 - \dfrac{g}{2}t^2 \end{array}$$

$\longrightarrow$ ungebremster freier Fall für $t \to 0$

(iv) Reibungsfreier Grenzfall $(\beta \to 0)$
$\overset{\text{s.(iii)}}{\longrightarrow} \quad z(t) = z_0 - \frac{g}{2}t^2$

(v) Starke Reibung $(\beta \to \infty)$
$z(t) = z_0$ (keine Bewegung im ∞-zähen Medium)

Illustrationen: In den folgenden Diagrammen ist für einige typische Parameter der Zeitverlauf der eindimensionalen Bewegung mit Stokes'scher Reibung dargestellt. Die roten Kurven geben jeweils den tatsächlichen Bewegungsablauf wieder. Die blauen Kurven stellen das unter ii) diskutierte Langzeitverhalten, die roten Kurven das unter iii) besprochene Kurzzeitverhalten dar.

$v_0 = 0$, $\beta = 1$: In Abb. 3.7-3.9 sieht man, wie die Bewegung wie beim freien Fall ohne Reibung beginnt und für große Zeiten in eine geradlinig-gleichförmige Bewegung mit konstanter Grenzgeschwindigkeit übergeht. Insbesondere nimmt der Betrag der Beschleunigung (Abb. 3.9) exponentiell von der mittleren Erdbeschleunigung (g=10) bis zum Wert 0 ab.

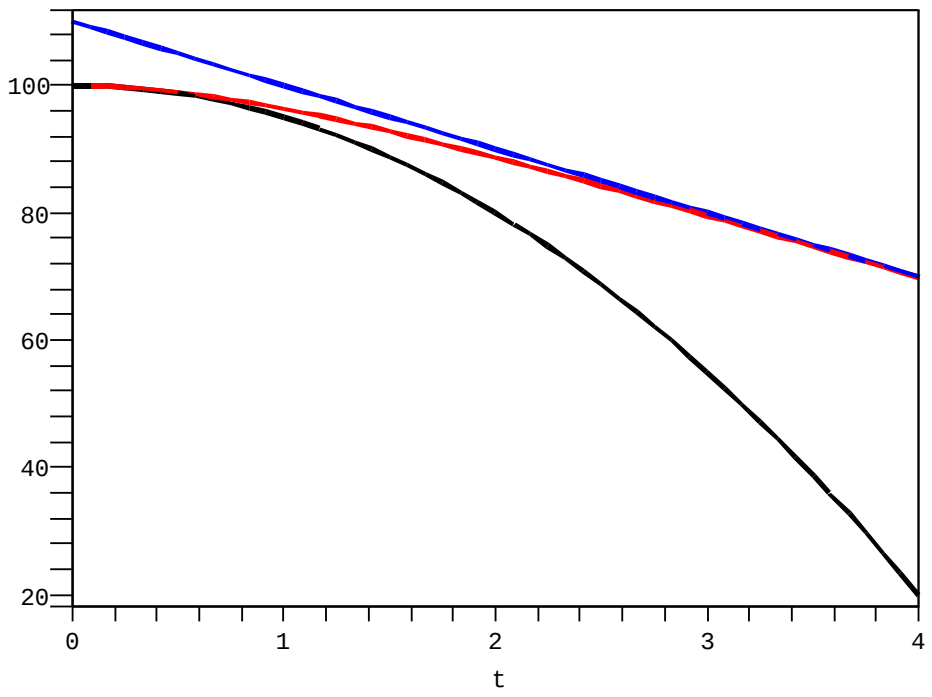


Abbildung 3.7: Weg-Zeit-Diagramm

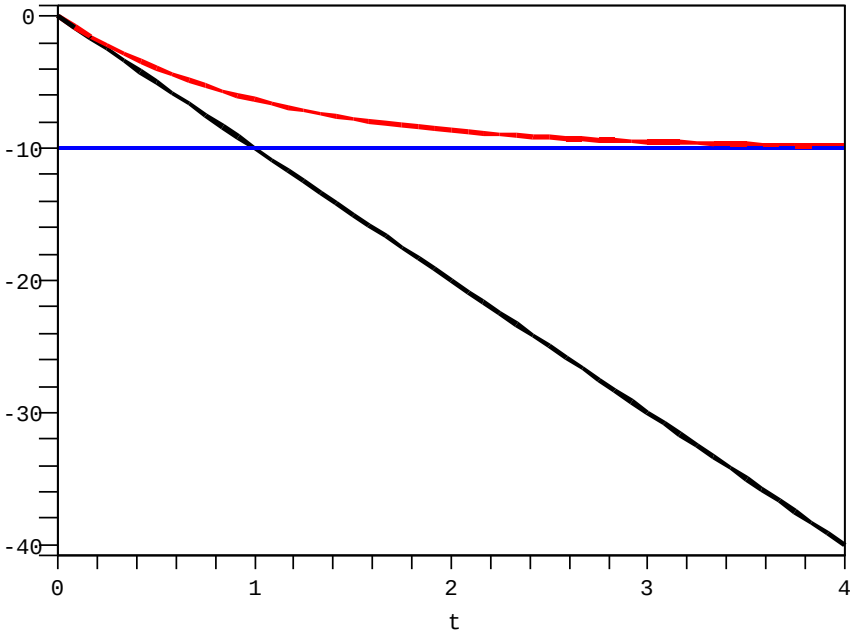


Abbildung 3.8: Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm

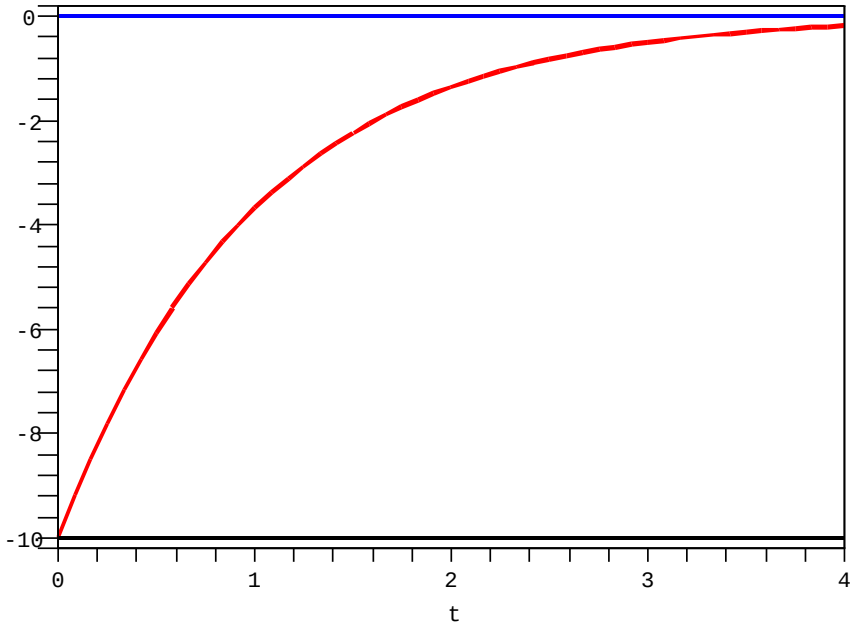


Abbildung 3.9: Beschleunigungs-Zeit-Diagramm

$v_0 = +20$, $\beta = 1$: Die Abbildungen 3.10-3.12 illustrieren den Bewegungsablauf für den senkrechten Wurf nach oben. Im Gegensatz zum reibungsfreien Fall ist das Weg-Zeit-Diagramm 3.10 nicht symmetrisch. Da die Reibung stets der Geschwindigkeit entgegen wirkt, ist schon die Aufwärtsbewegung gedämpft. Die maximale Höhe ist dementsprechend geringer und wird früher erreicht als ohne Reibung. Die Geschwindigkeit nimmt exponentiell vom vorgegebenen Startwert ab und geht für große Zeiten wieder in eine konstante Grenzgeschwindigkeit über (Abb. 3.11). Der Betrag der Beschleunigung ist für t=0 (Abb. 3.12) viel größer als im reibungsfreien Fall, weil die Erdbeschleunigung und diejenige aufgrund der Reibung beide zum Erdmittelpunkt hin gerichtet sind, sich also betragsmäßig addieren. Für große Zeiten geht die Beschleunigung wiederum gegen Null.

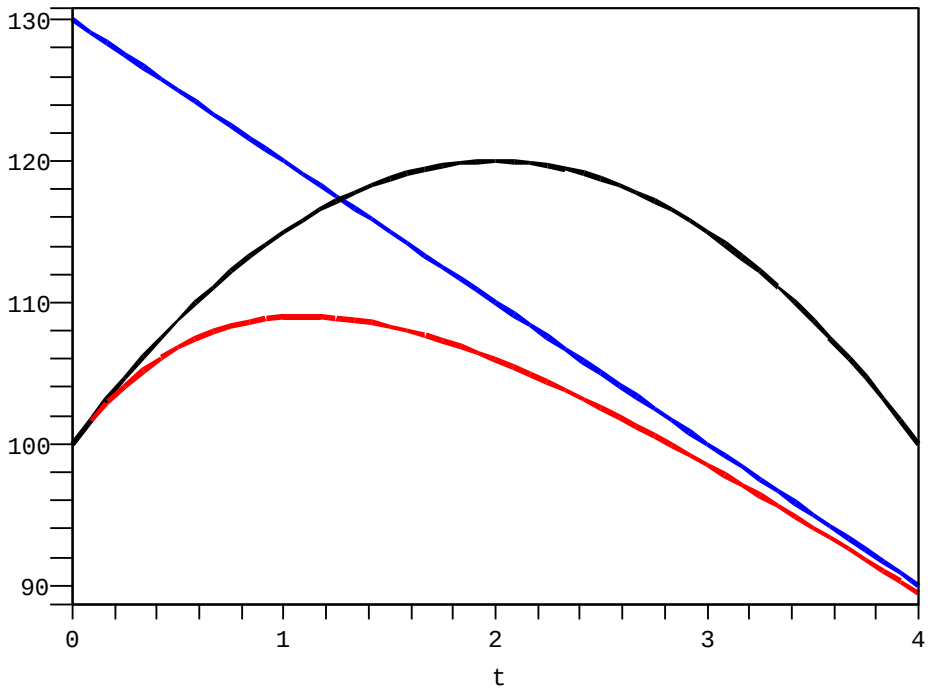


Abbildung 3.10: Weg-Zeit-Diagramm

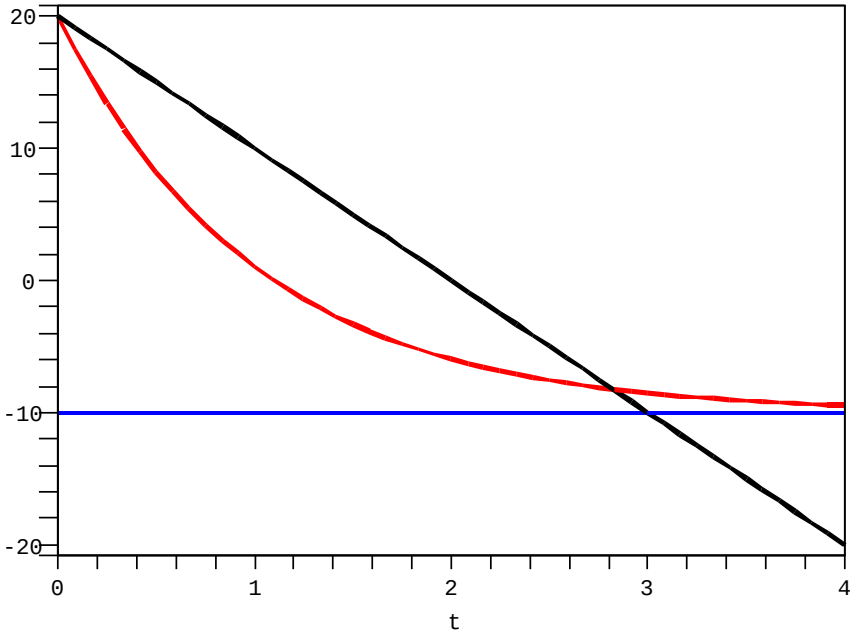


Abbildung 3.11: Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm

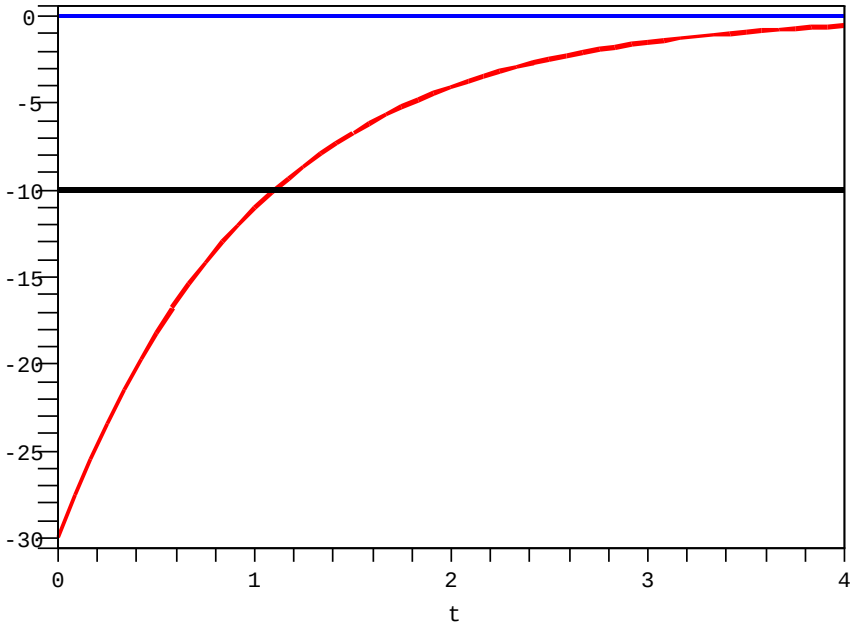


Abbildung 3.12: Beschleunigungs-Zeit-Diagramm

$v_0 = -20$, $\beta = 1$: Die Abbildungen 3.13-3.15 korrespondieren zum 'senkrechten Wurf nach unten'. Ohne Reibung hat das Weg-Zeit-Diagramm (Abb. 3.13) die Form einer schwach gekrümmten Parabel. Der Boden (z=0) wird früh erreicht. Mit Stokes'scher Reibung verläuft die Bewegung fast linear. Da Reibungskraft und Schwerefeld schon bei t=0 einander entgegen wirken und die Anfangsgeschwindigkeit betragsmäßig größer ist als die Grenzgeschwindigkeit, nimmt der Betrag der Geschwindigkeit monoton ab (Abb. 3.14). Der Massenpunkt fällt im Laufe der Zeit immer langsamer! Die Beschleunigung (Abb. 3.15) ist stets positiv und geht (natürlich) auch in diesem Fall für große Zeiten gegen Null.

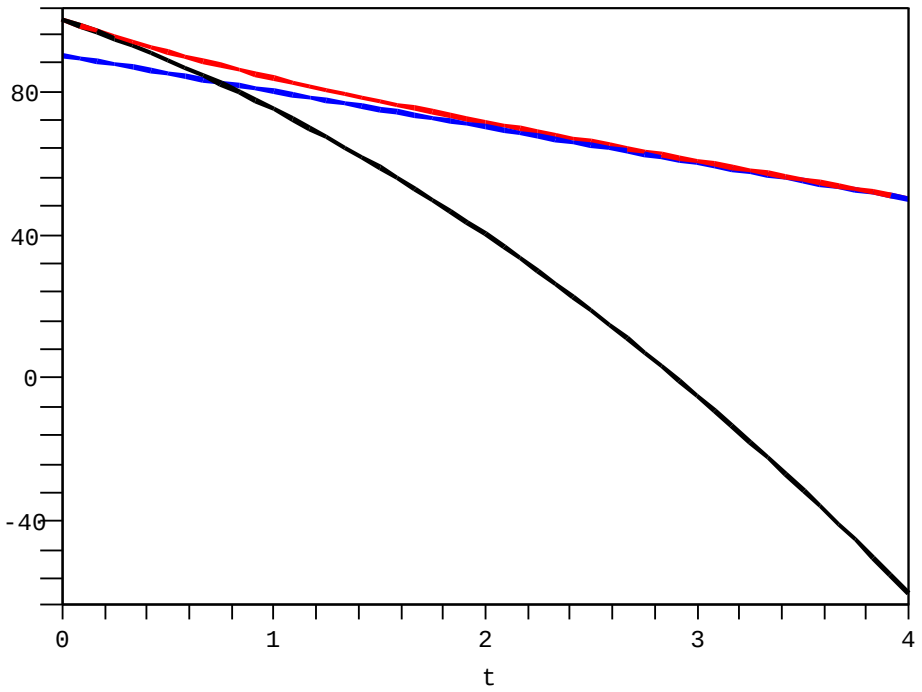


Abbildung 3.13: Weg-Zeit-Diagramm

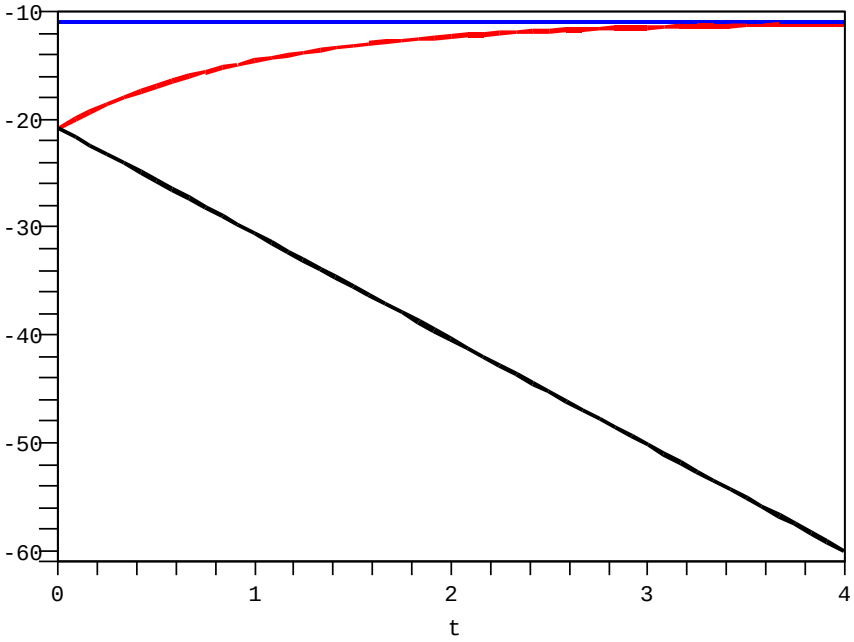


Abbildung 3.14: Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm

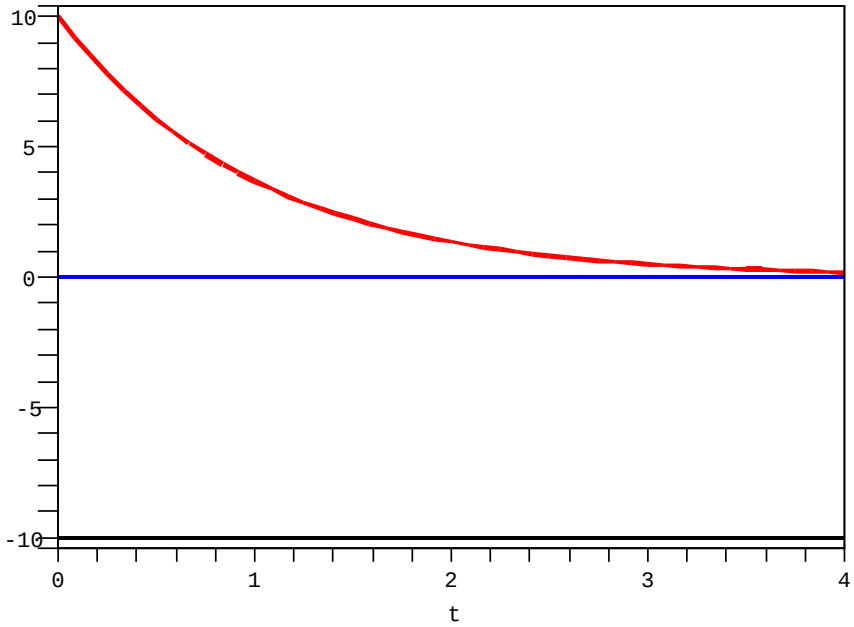


Abbildung 3.15: Beschleunigungs-Zeit-Diagramm

$v_0 = 0$, starke Reibung, $\beta = 10$: Schließlich wird der Fall starker Reibung betrachtet (Abb. 3.16-3.18). Der Reibungskoeffizient wurde so groß gewählt, dass fast gar nichts passiert: die (betragsmäßig kleine) Grenzgeschwindigkeit wird schnell erreicht (Abb. 3.16), die Bewegung verläuft de facto unbeschleunigt (Abb. 3.18). Der MP wird ein Vielfaches des in den Diagrammen dargestellten Zeitintervalls benötigen, um am Boden (z=0) anzukommen.

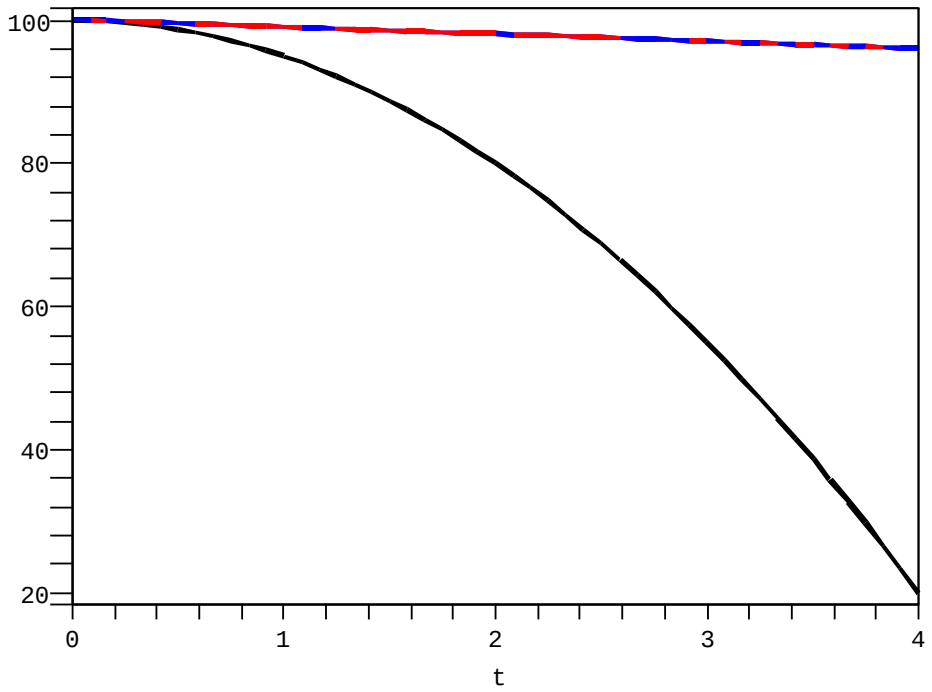


Abbildung 3.16: Weg-Zeit-Diagramm

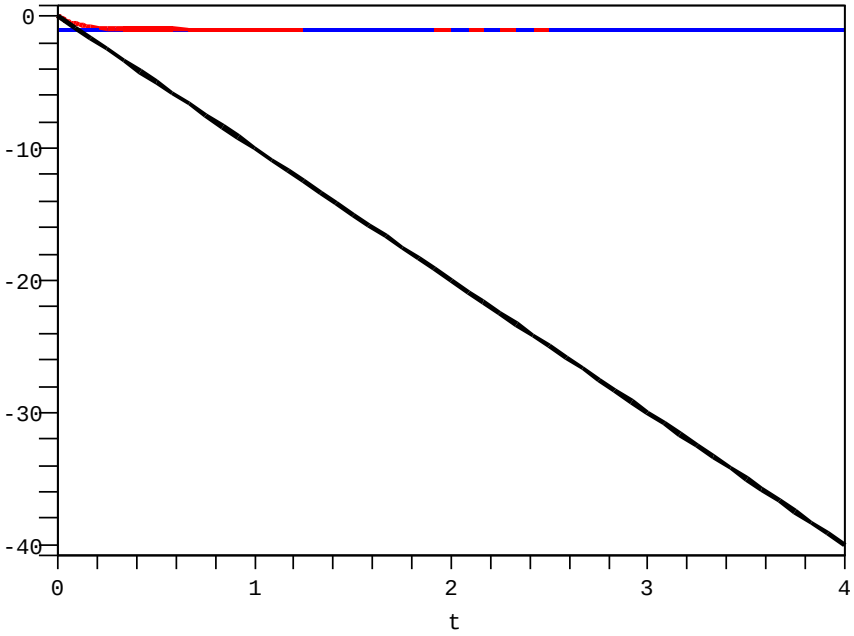


Abbildung 3.17: Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm

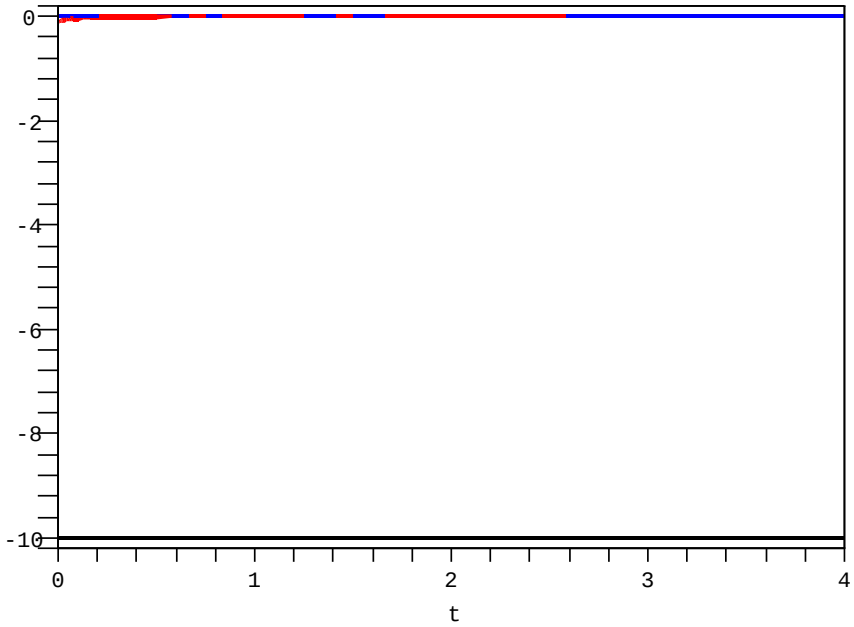
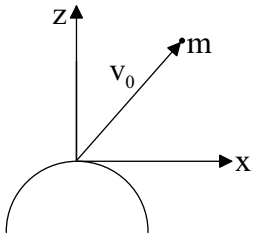


Abbildung 3.18: Beschleunigungs-Zeit-Diagramm

b) Schiefer Wurf mit Stokes'scher Reibung:



$$\underline{\text{BWGl :}} \quad m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\mathbf{e}_z - \beta\dot{\mathbf{r}}$$

$$\longrightarrow \quad \ddot{x} = -b\dot{x}\ , \qquad (b = \frac{\beta}{m})$$

$$\ddot{z} = -g - b\dot{z}\ , \qquad \text{(wie bei a))}$$

<u>x-Komponente:</u>

$$\dot{x} = v_x\ ; \quad \frac{dv_x}{dt} = -bv_x \quad \longrightarrow \quad \int \frac{dv_x}{v_x} = -b\int dt$$

$$\longrightarrow \quad v_x(t) = v_0^x e^{-bt}\ , \qquad (v_0^x = v_x(0))$$

$$\overset{v_x=\dot{x}}{\longrightarrow} \quad x(t) = x(0) + \frac{v_0^x}{b}(1 - e^{-bt})$$

<u>Diskussion:</u>

(i) $t \longrightarrow \infty$ $\quad x(t) \to x(0) + \frac{v_0^x}{b} = x_{max}$ Maximale Wurfweite $= \frac{v_0^x}{b}$

(ii) $t \longrightarrow 0$ $\quad x(t) \approx x(0) + v_0^x t \to$ geradlinig-gleichförmige Bewegung

(iii) $\beta \longrightarrow 0$ $\quad \longrightarrow$ siehe (ii)

(iv) $\beta \longrightarrow \infty$ $\quad x(t) \longrightarrow x(0)\ , \quad v_x(t) \longrightarrow 0$

(v) Raumkurve (Orbit):

$$x(t) = \underbrace{x_0}_{= x(0)} + \frac{v_0^x}{b}(1 - e^{-bt})$$

$$\Longleftrightarrow \quad e^{-bt} = 1 - \frac{b}{v_0^x}(x - x_0)$$

$$t = -\frac{1}{b}\ \ln\Big(1 - \frac{b}{v_0^x}(x - x_0)\Big)$$

$$\boxed{\overset{\text{einsetzen in } z(t)}{\longrightarrow} \quad z(x) = z_0 + \frac{v_\infty}{b} \cdot ln\Big(1 - \frac{b}{v_0^x}(x - x_0)\Big) + \frac{v_0^z + v_\infty}{v_0^x}(x - x_0)}$$

Abb. 3.19 zeigt einige Bahnkurven $z(x)$ für den schrägen Wurf mit dem optimalen Abwurfwinkel $\alpha = 45°$. Ohne Reibung (schwarze Kurve) ist die

Bahnkurve eine Parabel, mit größer werdendem Reibungskoeffizienten nehmen maximale Wurfhöhe und -weite ab.

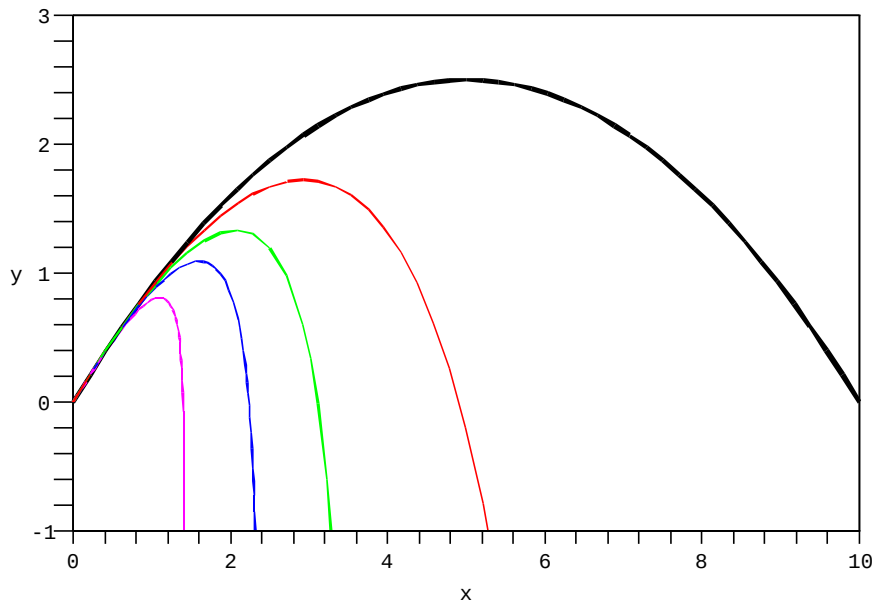


Abbildung 3.19: Bahnkurven für den schiefen Wurf mit Stokes'scher Reibung

c) Freier Fall mit Newton'scher Reibung:

$$\begin{aligned} \underline{\text{BWGl :}} \qquad m\ddot{\mathbf{r}} &= -mg\mathbf{e}_z - \gamma v\mathbf{v} \\ \dot{v}_z = \ddot{z} &= -g - c|v_z|v_z \qquad\qquad (c = \frac{\gamma}{m}) \\ \Longleftrightarrow \quad \int \frac{dv_z}{g + c|v_z|v_z} &= -\int dt = -t + konst. \end{aligned}$$

Auswertung erfordert Fallunterscheidung und die Integrale

$$\int \frac{dx}{a^2 + |x|x} = \frac{1}{a} \begin{cases} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) & 0 \leq x \\ \operatorname{artanh}\left(\frac{x}{a}\right) & -|a| < x < 0 \\ \operatorname{arcoth}\left(\frac{x}{a}\right) & x < -a \end{cases}$$

Näheres siehe Übung 3.3

d) <u>Abschließende Bemerkungen:</u>

(i) Reibungskräfte sind nicht konservativ, sondern dissipativ (rot $\mathbf{F}_R \neq 0$)

(ii) Allg. E-Satz: $\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}(T - U) = \mathbf{F}_R \cdot \mathbf{v} = -F_R v < 0$
$\longrightarrow$ mechanische Energie nimmt ab (Umwandlung in Wärme)

(iii) $A_R = -\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}_R(\mathbf{v}(t'), t')\mathbf{v}(t')\, dt'$ (wegabhängig)

(iv) Statt Potential kann man "Dissipationsfunktion" angeben (siehe Kap. 4.3.4)

3.2 Oszillatorprobleme I

3.2.1 Motive für das Studium des harmonischen Oszillators

(i) Beschreibt Bewegungen in der Umgebung eines stabilen Gleichgewichts

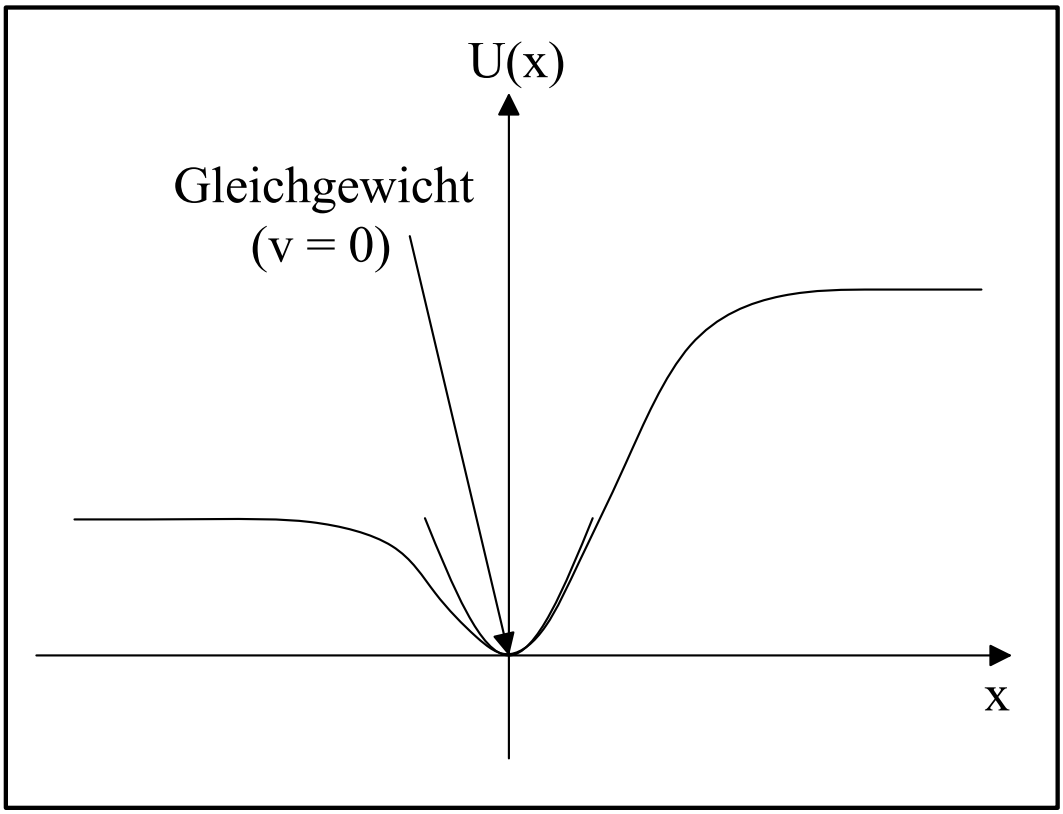


Abbildung 3.20: Parabel beschreibt Potentialmulde in der Umgebung des Minimums

Taylorentwicklung von $U(x)$ um $x = 0$:

$$\begin{aligned} U(x) &= \underbrace{U(0)}_{0} + \underbrace{\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0}}_{0} x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0} x^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{d^3U}{dx^3}\right|_{x=0} x^3 + ... \\ &= a_2x^2 + a_3x^3 + ... \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \qquad F(x) = -\frac{dU}{dx} = -2a_2x - 3a_3x^2 + ...$$

$\hookrightarrow$ 1. Näherung: $U(x) \propto x^2,\ F(x) \propto -x \ \longrightarrow$ Hooke'sches Gesetz

<u>Einige Realisierungen:</u>

$$\text{klassische Oszil.} \begin{cases} \text{Mechanik : Feder} - \text{ und Fadenpendel} \\ \\ \text{Elektrodynamik : Schwingkreis} \end{cases}$$

$$\text{QM Oszil.} \begin{cases} \text{Molekülphysik : 'Vibrationen' der Kerne gegeneinander} \\ \qquad\qquad\qquad \text{(z.B. 2} - \text{atomiges Molekül)} \\ \text{FK} - \text{Physik : Gitterschwingungen} \\ \\ \text{Kernphysik : Vibrationen deformierter Kerne} \end{cases}$$

(ii) Kann in KM und QM exakt gelöst werden (und ist Grundlage der sog. 'Feldquantisierung' in der 'höheren' Quantentheorie)

3.2.2 Der gedämpfte harmonische Oszillator (1-dim.)

$$\text{BWGl :} \qquad m\ddot{x} = \underbrace{-kx}_{\text{Hooke'sches Gesetz}\ \uparrow} + \underbrace{-\beta\dot{x}}_{\uparrow\ \text{Reibung nach Stokes}}$$

$$b = \frac{1}{2}\frac{\beta}{m}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(Eigenfrequenz)}$$

$$\hookrightarrow \qquad \boxed{\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

$\hookrightarrow$ homogene, lineare DGl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

<u>Lösungsansatz :</u>

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\lambda t} \\ \longrightarrow \quad (\lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} &= 0 \\ \text{'charakteristische Gleichung' :} \quad 0 &= \lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2 \\ \longrightarrow \quad \lambda_{1/2} &= -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2} \end{aligned}$$

Fallunterscheidung zur weiteren Auswertung:

<u>Fall 1: $\omega_0^2 > b^2$</u> Schwache Dämpfung/Schwingfall

$$\underline{\text{Def.:}} \qquad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} \quad \epsilon \ \mathbb{R} \ \rightarrow \ \lambda_{1/2} = -b \pm i\omega_1$$

<u>Allg. Lsg.:</u> $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ (Linearkombination von zwei linear unabhängigen Lösungen)

$$\hookrightarrow x(t) = e^{-bt} \cdot (C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t})$$

<u>Grenzfall b=0:</u> $\omega_1 = \omega_0$

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \\ &= C_1(\cos\omega_0 t + i\sin\omega_0 t) + C_2(\cos\omega_0 t - i\sin\omega_0 t) \\ &= (C_1 + C_2)\cos\omega_0 t + i(C_1 - C_2)\sin\omega_0 t \\ &= A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \\ &= D\sin(\omega_0 t + \delta) \end{aligned}$$

Zusammenhang der Konstanten:

$$\begin{aligned} A,\ B \ \epsilon \ \mathbb{R} \ &\Longleftrightarrow \ C_2 \ = \ C_1^* \\ A \ &= \ C_1 + C_2 \ = \ C_1 + C_1^* \ = \ 2\Re\, C_1 \\ B \ &= \ i(C_1 - C_2) \ = \ -2\Im\, C_1 \\ A \ &= \ D\sin\varphi\ , \quad B \ = \ D\cos\varphi \\ \Longleftrightarrow \quad D \ &= \ \sqrt{A^2 + B^2}\ , \quad \tan\varphi \ = \ \frac{A}{B} \end{aligned}$$

<u>$b \neq 0$:</u> reelle Form der allg. Lösung

$$x(t) = De^{-bt}\sin(\omega_1 t + \delta)$$

<u>ABs :</u>

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= v_0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad x(t) = \frac{v_0}{\omega_1} e^{-bt}\sin\omega_1 t \quad \xrightarrow{b\to 0} \quad \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} > \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0$: Gedämpfte Schwingung ist streng periodisch, wobei Periode größer ist als im ungedämpften Fall

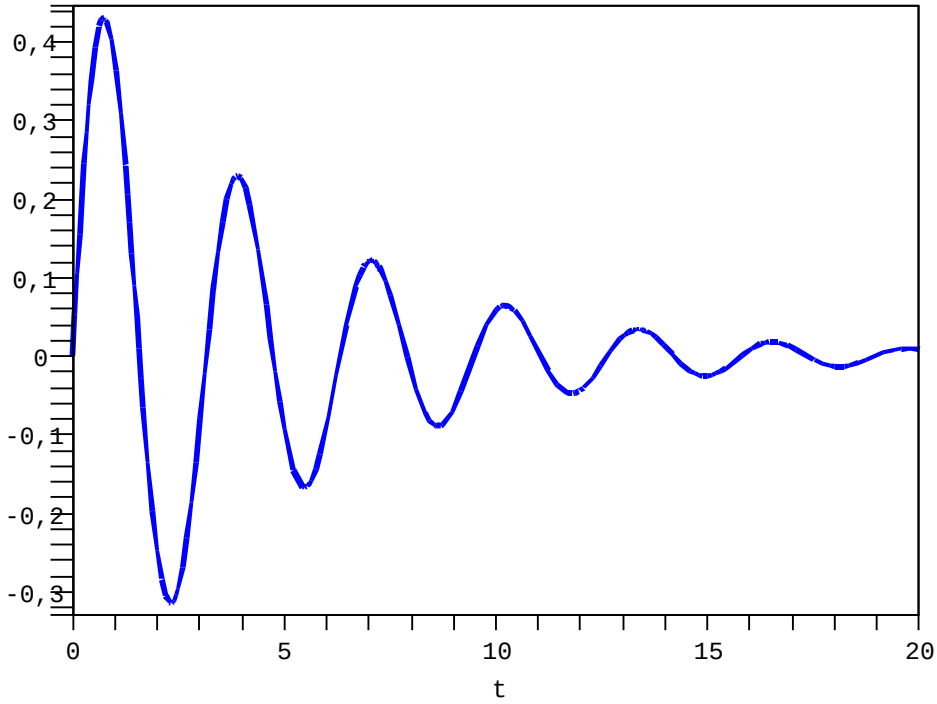


Abbildung 3.21: Gedämpfte Schwingung

<u>Fall 2: $\omega_0^2 < b^2$</u> Starke Dämpfung/Kriechfall

$$\mathbb{R} \ni \lambda_{1/2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2} < 0$$

Allg. (reelle) Lösung: $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_1 t}$

<u>ABs :</u>

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= v_0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{b^2 - \omega_0^2}} e^{-bt} \sinh\left(t\sqrt{b^2 - \omega_0^2}\right)$$

(wobei $\sinh y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$)

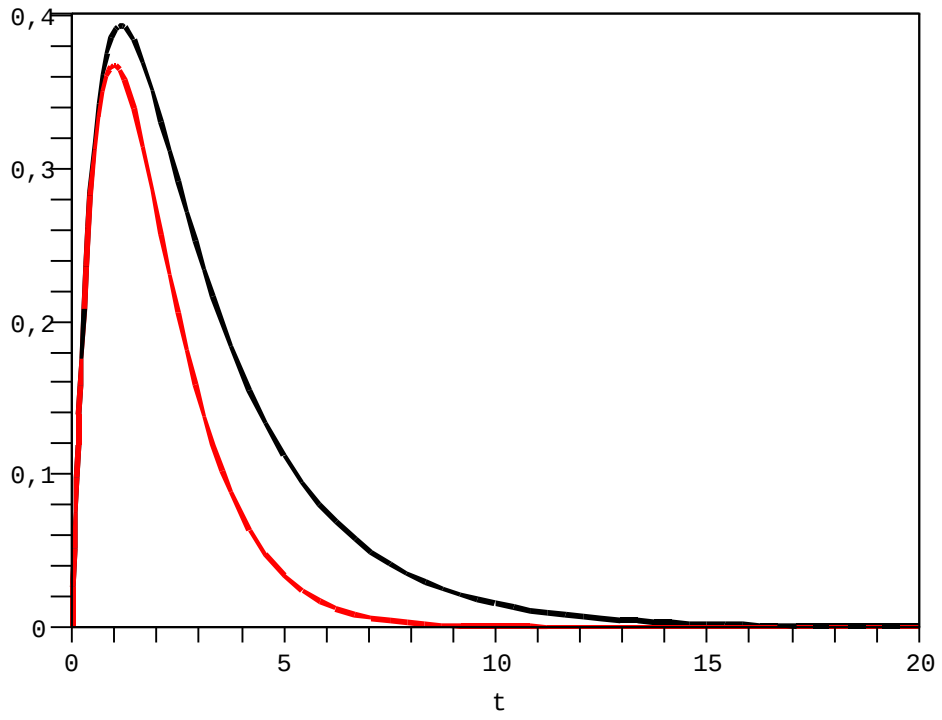


Abbildung 3.22: Starke Dämpfung (schwarze Linie) und aperiodischer Grenzfall (rote Kurve)

<u>Fall 3: $\omega_0^2 = b^2$</u> Aperiodischer Grenzfall

$$\lambda_{1/2} = -b \qquad \epsilon\ \mathbb{R}$$

Zum Auffinden einer 2. linear unabhängigen Lsg. betrachte DGl für $\omega^2 = b^2$:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + b^2 x = 0$$

<u>Ansatz :</u>

$$\begin{aligned} x(t) &= R(t)e^{-bt} \\ \dot{x} &= (\dot{R} - bR)e^{-bt} \\ \ddot{x} &= (\ddot{R} - 2b\dot{R} + b^2 R)e^{-bt} \\ \xrightarrow{\text{einsetzen}} \quad 0 &= (\ddot{R} - 2b\dot{R} + b^2 R + 2b\dot{R} - 2b^2 R + b^2 R)e^{-bt} \\ \Longleftrightarrow \quad \ddot{R} = 0 &\longrightarrow R(t) = C_1 + C_2 t \end{aligned}$$

allg. Lösung : $\quad x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-bt}$

<u>ABs :</u>

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= v_0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow x(t) = v_0 t e^{-bt}$$

Energie des gedämpften harmonischen Oszillators:

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(T+U) = \mathbf{F_R} \cdot \mathbf{v} = -F_R \cdot \dot{x} = -2mb\dot{x}^2 > 0}$$

$$\hookrightarrow \qquad E(t) = E(0) - 2mb \int_0^t \dot{x}^2 \, dt'$$

(Näheres siehe Übung 5.1)

3.2.3 Der getriebene harmonische Oszillator - erzwungene Schwingungen

$$\text{BWGl}: \qquad \ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

$\Longrightarrow$ inhomogene lineare DGl 2. Ordnung mit konstantem Koeffizienten

Allg. Lsg. der inhomogenen DGl = allg. Lsg. der homogenen DGl
+ eine spezielle Lsg. der inhomogenen DGl

$$x(0) = x_{hom}(C_1, C_2, t) + x_{part}(t)$$

a) Harmonische Anregung

$$\begin{array}{lrcl} & f(t) & = & f_0 e^{i\omega t}\,, \qquad (f_0 \in \mathbb{R}) \\ \text{Wenn} & z(t) & = & x(t) + iy(t) \\ \text{und} & \ddot{z} & + & 2b\dot{z} + \omega_0^2 z = f_0 e^{i\omega t} \\ \Longrightarrow & \ddot{x} & + & 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t) \end{array}$$

<u>Ansatz :</u> $\qquad z_{part}(t) = Ce^{i\omega t}$

$$\longrightarrow \qquad \Big[C(-\omega^2 + 2ib\omega + \omega_0^2) - f_0\Big] e^{i\omega t} = 0$$

$$\longrightarrow \qquad C = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega} \equiv f_0 \chi(\omega)$$

$\chi(\omega)$: "(dynamische) Suszeptibilität", beschreibt die Antwort des Systems auf die Störung

Umschreibung der Lösung:

$$\begin{array}{rrcl} & \chi(\omega) & = & |\chi(\omega)| e^{-i\phi} = A(\omega) e^{-i\phi} \\ \hookrightarrow & z_{part}(t) & = & A(\omega) e^{-i\phi} f_0 e^{i\omega t} = A(\omega) f_0 e^{i(\omega t - \phi)} \\ & x_{part}(t) & = & \Re\, z_{part}(t) \\ & & = & A(\omega) f_0 \cos(\omega t - \phi) \end{array}$$

<u>NR :</u>

$$\begin{aligned}
\chi &= \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+2ib\omega} = \frac{\omega_0^2-\omega^2-2ib\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2} \\
|\chi|^2 &= \frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2\right]^2} = \frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2} \\
\tan\phi &= \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = -\frac{Im\ \chi}{Re\ \chi} = \frac{2b\omega}{\omega_0^2-\omega^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\longrightarrow \quad A(\omega) &= \left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2\right]^{-\frac{1}{2}} \\
\tan\phi &= \frac{2b\omega}{\omega_0^2-\omega^2}
\end{aligned}$$

<u>Diskussion:</u>

(i) Endgültige Lösung $x(t) = x_{hom}(C_1, C_2, t) + x_{part}(t)$ (zu vorgegebenen ABs) i.a. kompliziert

(ii) $x(t) \overset{\text{große } t}{\longrightarrow} x_{part}(t)$ (falls b $\neq 0$) $\longrightarrow$ Oszillator folgt (nach einem ggf. komplizierten Einschwingvorgang) der harmonischen Anregung mit Phasenverschiebung ϕ

(iii) $b = 0$: ungedämpfter Oszillator

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \left[|\omega_0^2-\omega^2|\right]^{-1}, \quad \phi(\omega) = 0 \\
x(t) &= D\cos(\omega_0 t+\delta) + A(\omega) f_0 \cos\omega t \\
\underline{\text{ABs :}} \qquad x(0) &= \dot{x}(0) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad D = -A(\omega) f_0\ ; \quad \delta = 0 \\
\longrightarrow \qquad x(t) &= A(\omega) f_0(\cos\omega t - \cos\omega_0 t)
\end{aligned}$$

Spezialfall: $\omega_0 = \omega + \Delta\omega\ ; \quad 0 < \Delta\omega \ll \omega$

<u>Für $\Delta\omega t \ll 1$:</u>

$$\begin{aligned}
\cos\omega t - \cos\omega_0 t &= \cos\omega t - \cos(\omega+\Delta\omega)t \\
&= \cos\omega t - \cos\omega t\cos\Delta\omega t + \sin\omega t\sin\Delta\omega t \\
&\approx (\Delta\omega t)\sin\omega t
\end{aligned}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{(\omega+\Delta\omega)^2-\omega^2} = \frac{1}{2\omega\Delta\omega+\Delta\omega^2} \approx \frac{1}{2\omega\Delta\omega}$$

$\longrightarrow x(t) \overset{\Delta\omega t \ll 1}{\approx} \dfrac{f_0}{2\omega} t\sin\omega t$ Amplitude wächst linear an $\rightarrow$ Resonanz

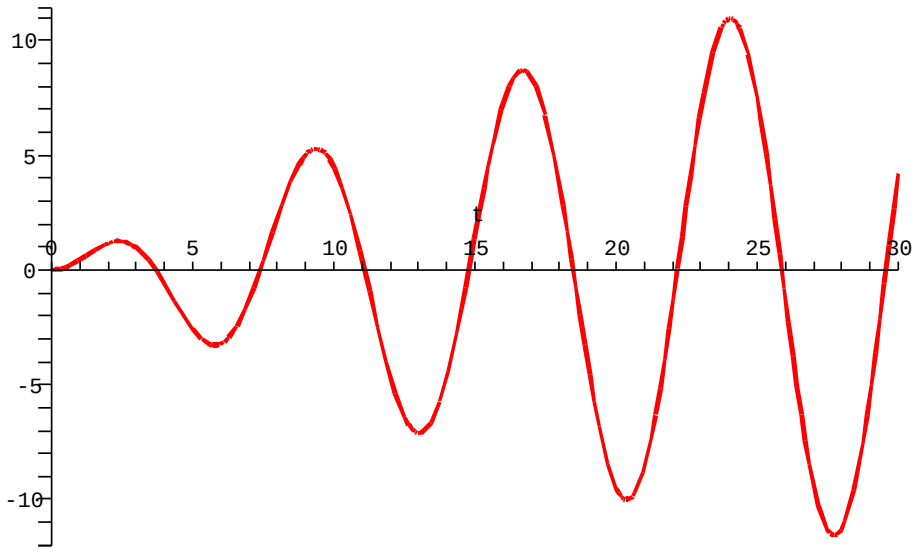


Abbildung 3.23: Erzwungene, ungedämpfte Schwingung $x(t)$ für kleine Zeiten

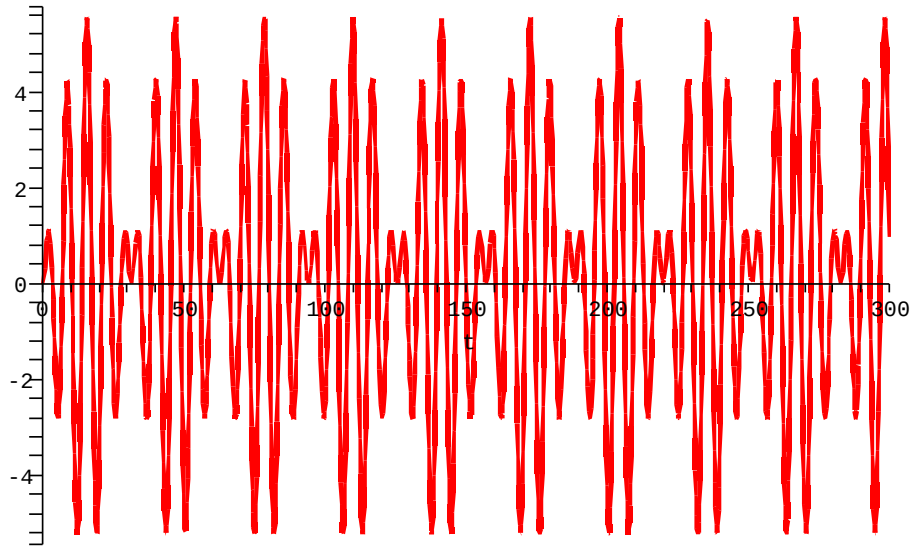


Abbildung 3.24: Erzwungene, ungedämpfte Schwingung $x(t)$ über längere Zeiten

Resonanzkatastrophe: $A(\omega) \stackrel{\Delta\omega\to 0}{\longrightarrow} 0$

(iv) Kurvendiskussion für $A(\omega)$ (für $b \neq 0$)

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}} \\ A(\omega=0) &= \frac{1}{\omega_0^2} \end{aligned}$$

$$A(\omega) \stackrel{\omega\gg\omega_0}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{(\omega^4+4b^2\omega^2}} \approx \frac{1}{\omega^2} \stackrel{\omega\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Extrema? $\quad \dfrac{dA}{d\omega} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \omega[\omega_0^2-\omega^2-2b^2] = 0$

$$\longrightarrow \quad (\omega_1 = 0)\ ; \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2-2b^2} \equiv \omega_R \quad \longrightarrow \quad \text{Maximum}$$

$$\longrightarrow \quad A(\omega_R) = \frac{1}{2b\sqrt{\omega_0^2-b^2}}$$

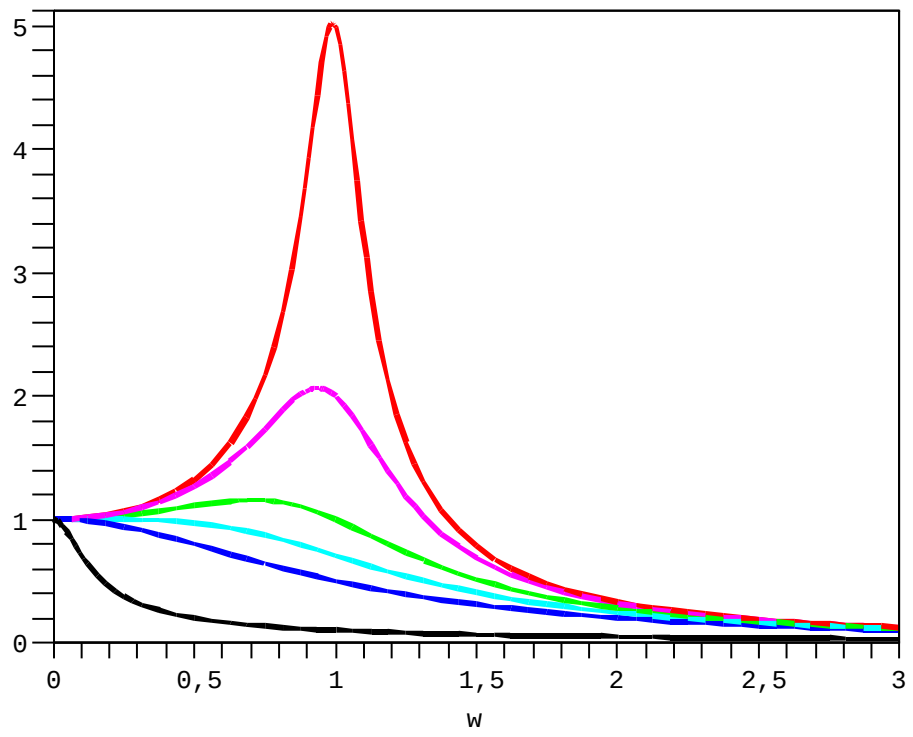


Abbildung 3.25: Amplitudenfunktion $A(\omega)$ für verschieden starke Dämpfungen

(v) Phasenfunktion $\phi(\omega)$

$$\left.\begin{aligned} &\phi(\omega) = \arctan\left(\tfrac{2b\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right) \\ &\phi(0) = 0 \\ &\phi(\omega=\omega_0) = \tfrac{\pi}{2} \\ &\phi(\omega) \xrightarrow{\omega\gg\omega_0} \pi \end{aligned}\right\} 0 \le \phi \le \pi$$

$\longrightarrow$ Oszillator läuft Anregung hinterher ($x_{part} \propto \cos(\omega t - \phi)$)

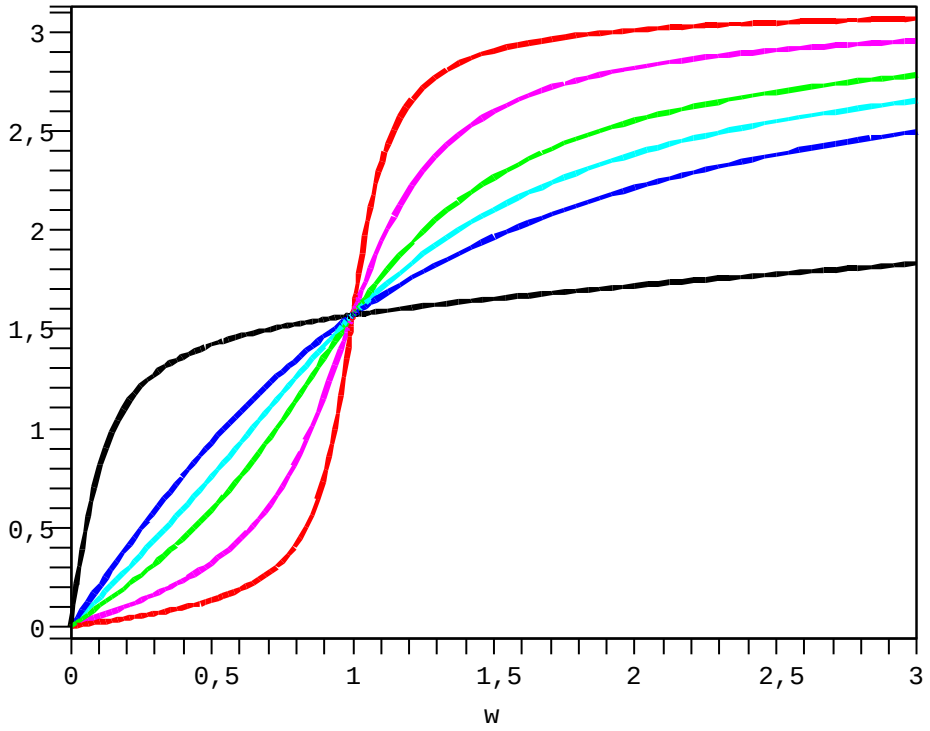


Abbildung 3.26: Phasenfunktion $\phi(\omega)$ für verschieden starke Dämpfungen

b) Allgemeine periodische Anregung ($F(t+T) = F(t)$)
Superpositionsprinzip: Seien $x_n(t)$ Partikulärlösungen der DGl

$$\ddot{x}_n + 2b\dot{x}_n + \omega_0^2 x_n = f_n(t) \qquad (n = 1, ..., N)$$

und

$$F(t) = \sum_{n=1}^{N} f_n(t) \quad \Longrightarrow \quad x(t) = \sum_{n=1}^{N} x_n(t)$$

löst die DGl $\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$

Insbesondere, falls:

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n=1}^{N} f_n(t) = \sum_{n=1}^{N} f_0^{(n)} \cos(\omega_n t) \\ \Longrightarrow \quad x_{part}(t) &= \sum_{n=1}^{N} A(\omega_n) f_0^{(n)} \cos(\omega_n t - \phi_n) \\ A(\omega_n) &= \left[(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4b^2\omega_n^2\right]^{-\frac{1}{2}} \\ \tan\varphi_n &= \frac{2b\omega_n}{\omega_0^2 - \omega_n^2} \end{aligned}$$

<u>Allgemeinere Aussage</u>: Eine "hinreichend-gutartige" periodische Funktion $F(t+T) = F(t)$ kann als <u>Fourier-Reihe</u> dargestellt werden:

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \\ \hookrightarrow \quad c_n &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} F(t) e^{-in\omega t}\, dt \end{aligned}$$

<u>Bemerkungen:</u>

(i) Was bedeutet unendliche Summe?

$$\text{Konvergenz}: \quad \sum_{n=-N}^{n=N} c_n e^{in\omega t} \quad \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} \quad F(t)$$

Welche Art von Konvergenz wird gefordert? $\longleftrightarrow$ Anforderungen an F(t)

Mögliche Konvergenzbegriffe:

a) Konvergenz im quadr. Mittel

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |f_n(t) - F(t)|^2\, dt \quad \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

ist gegeben, falls $F(t)$ (Riemann-) integrierbar ist.

b) Punktweise Konvergenz

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \epsilon > 0 \quad \exists\, N = N(t,\epsilon): \ |f_n(t) - F(t)| < \epsilon; \quad \forall\, n \geq N$$

c) Gleichmäßige Konvergenz

$\forall\, t \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ $\exists\, \underline{N = N(\epsilon)}$: $|f_n(t) - F(t)| < \epsilon$; $\forall\, n \geq N$

ist gegeben, falls $F(t)$ stückweise stetig differenzierbar

<u>Beachte:</u> aus c) folgt b) folgt a), aber Umkehrung gilt nicht!
$\Longrightarrow$ gleichmäßige Konvergenz ist am schärfsten

Den Fourier-Reihen ist die Konvergenz im quadr. Mittel aber i.a. besser angepasst. (siehe hierzu [For], Kap. 23)

(ii) Es existieren alternative Entwicklungen nach "vollständigen Funktionssystemen" $F(t) = \sum_n^\infty a_n g_n(t)$, wobei $\{g_n\}$

* Legendre-Polynome
* Bessel-Funktionen
* ...

$\longrightarrow$ spezielle Funktionen der (mathematischen) Physik

(iii) <u>Beispiel:</u> Zug von Rechteckpulsen

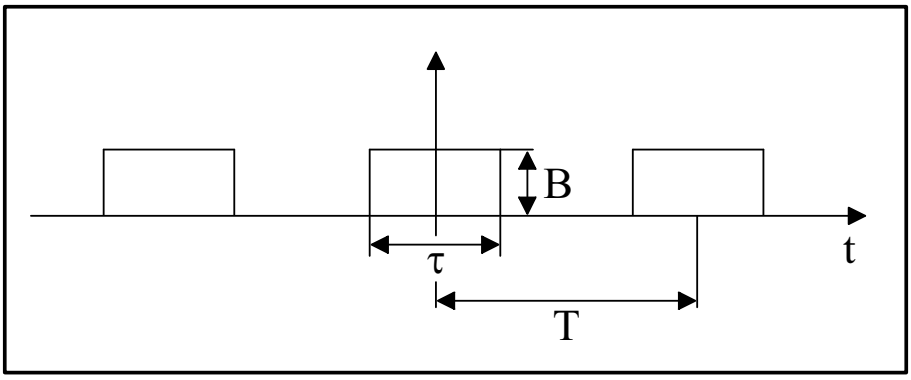


Abbildung 3.27: Zug von Rechteckpulsen

Fourier-Koeffizienten:

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T}\int_{\frac{-\tau}{2}}^{\frac{+\tau}{2}} F(t) e^{-in\omega t}\, dt \\
&= \frac{B}{T}\,\frac{i}{n\omega} e^{-in\omega t}\Big|_{\frac{-\tau}{2}}^{\frac{+\tau}{2}} \\
&= \frac{B}{n\pi}\frac{i}{2}\left(e^{-in\frac{\pi}{T}\tau} - e^{in\frac{\pi}{T}\tau}\right) \\
&= \frac{B}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \\
\text{beachte :} \qquad c_0 &= \frac{B\tau}{T}
\end{aligned}
$$

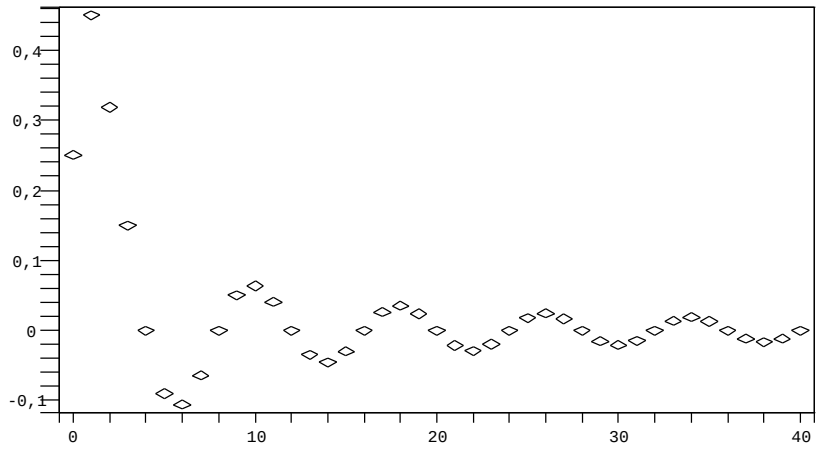


Abbildung 3.28: Fourierkoeffizienten c_n

$$\Longrightarrow \qquad F(t) = \frac{B}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi\tau}{T}}{n}e^{in\omega t}$$

$$= B\Big\{\frac{\tau}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)\cos(n\omega t)\Big\}$$

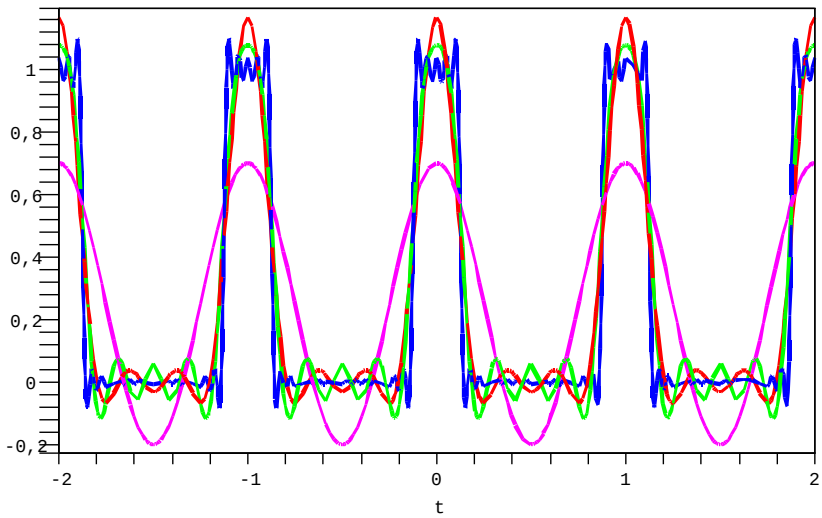


Abbildung 3.29: Partialsummen der Fourierreihe von $F(t)$ für $n_{max} = 1$ (magenta), 3 (rot), 5 (grün), 20 (blau)

$\longrightarrow$ reelle Lösung der Oszillatorgleichung für diese Anregung:

$$\boxed{\begin{aligned} x_{part}(t) &= \frac{B\tau}{T\omega_0^2} + B\sum_{n=1}^{\infty} A_n(\omega)\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)\cos(n\omega t - \varphi_n) \\ A_n &= \left[\left(\omega_0^2 - (n\omega)^2\right)^2 + 4b^2(n\omega)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \\ \tan\varphi &= \frac{2nb\omega}{\omega_0^2 - n^2\omega^2} \end{aligned}}$$

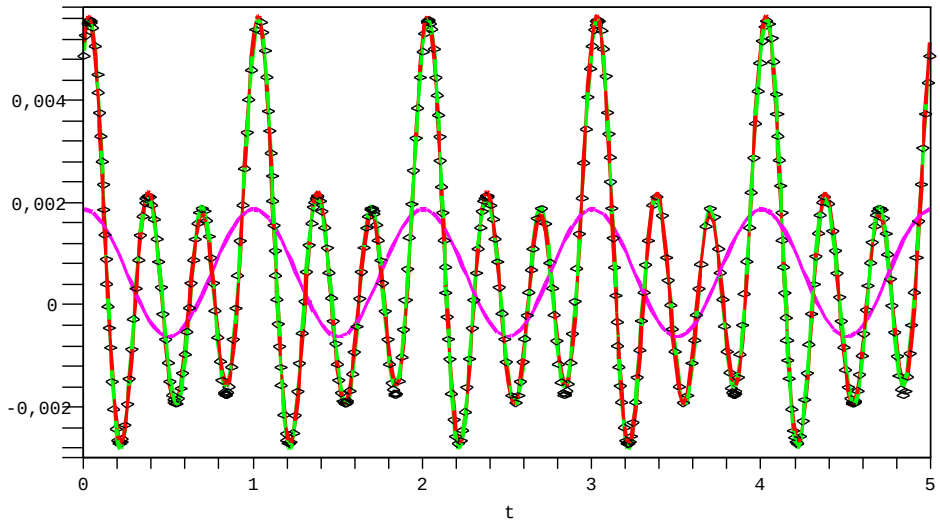


Abbildung 3.30: Partikulärlösungen $x_{part}(t)$ für $n_{max} = 1$ (magenta), 3 (rot), 5 (grün), 20 (blau)

c) Nicht-periodische Anregung: Fourier-Integrale

Heuristische Argumente zur Konstruktion des Fourier-Integrals:

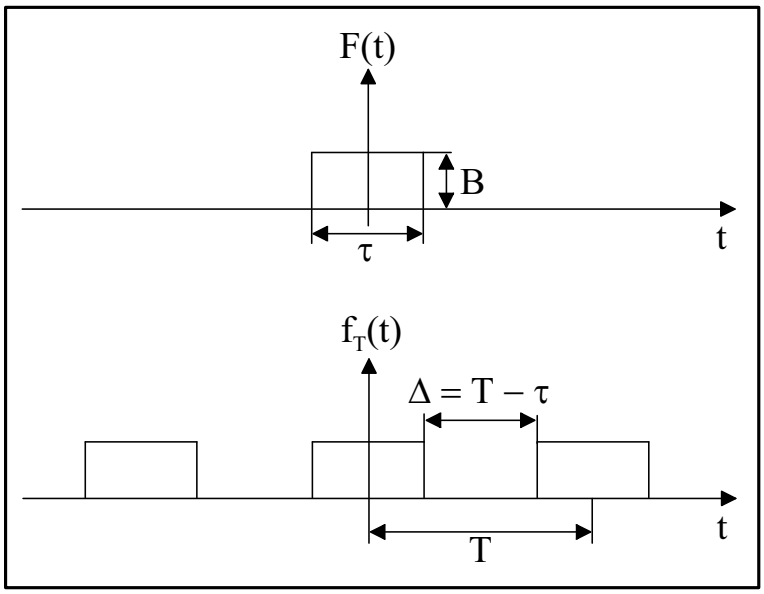


Abbildung 3.31: Einzelner Rechteckpuls und Zug von Rechteckpulsen

Der Rechteckpuls $F(t)$ geht aus dem Pulszug hervor, indem alle Pulse - bis auf den zentralen - ins Unendliche geschoben werden:

$$\Longrightarrow \qquad F(t) = \lim_{\Delta\to\infty} f_T(t) = \lim_{T\to\infty} f_T(t)\Big|_{\tau=konst.}$$

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \\ c_n &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-in\omega t} \end{aligned}$$

<u>Umschreibung:</u>

$$\begin{aligned} \omega_n &:= n\omega \\ \Delta\omega_n &:= \omega_n - \omega_{n-1} = \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Longleftrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\Delta\omega_n} \\ \tilde{c}_n &:= T c_n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\hookrightarrow \qquad f_T(t) &= \frac{1}{T}\sum_n \tilde{c}_n e^{i\omega_n t} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n e^{i\omega_n t}\Delta\omega_n \\
\xrightarrow{T\to\infty\ (\Delta\omega_n\to 0)} & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega \;=\; F(t) \\
\tilde{c}_n &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-i\omega_n t}\, dt \;\xrightarrow{T\to\infty}\; \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t}\, dt \;\equiv\; \tilde{F}(\omega)
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ **Fourier-Transformations-Paar** $F(t) \longleftrightarrow \tilde{F}(\omega)$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
F(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega \\
\tilde{F}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t}\, dt
\end{aligned}
}
$$

Hinreichende (Dirichlet) Bedingungen für die Existenz der Fourier-Transformation (FT) der Funktion $F(t)$

(i) $F(t)$ stückweise stetig und differenzierbar

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|\, dt < \infty$

<u>Bemerkungen:</u>

(i) Bedingungen sind nicht notwendig

(ii) Alternative Formulierung

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\tilde{F}}(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega \qquad \left(\tilde{\tilde{F}}(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{\sqrt{2\pi}}\right) \\
\tilde{\tilde{F}}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t}\, dt
\end{aligned}
$$

(iii) Erweiterung auf höhere Dimensionen

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \tilde{F}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{kr}}\, d^3k \\
\tilde{F}(\mathbf{k}) &= \int F(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{kr}}\, d^3r
\end{aligned}
$$

(iv) Einige Eigenschaften von FT-Paaren sind in Anhang A.2 zusammengestellt

Beispiele:

(i) Rechteckimpuls (siehe Abbildung 3.31)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|\, dt &= B \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} dt = B\tau \;<\; \infty \quad \text{(Dirichlet} - \text{Bedingung erfüllt)} \\
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t}\, dt = B \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i\omega t}\, dt \\
&= -\frac{B}{i\omega}\left(e^{-i\omega\frac{\tau}{2}} - e^{i\omega\frac{\tau}{2}}\right) \\
&= B\tau\left(\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}\right)
\end{aligned}$$

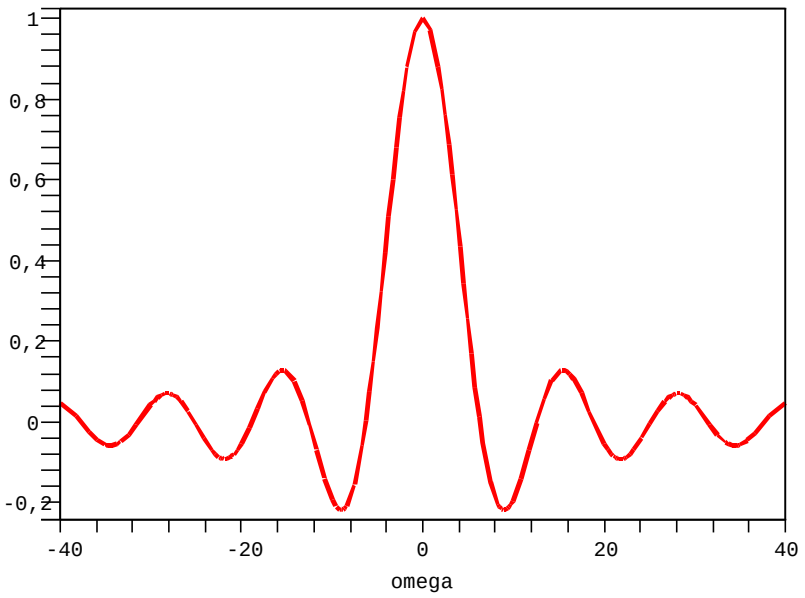


Abbildung 3.32: Frequenzspektrum $F(w)$ des Rechteckpulses

(ii) $F(t) = \delta(t)$ (zur δ-Funktion siehe Anhang A.1)

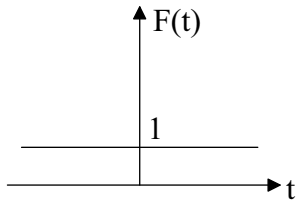
$$\begin{aligned}
\longrightarrow \qquad F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t}\, dt \\
&= e^{-i\omega 0} \;=\; 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{FT} - \text{Paar} \qquad \delta(t) \;\longleftrightarrow\; 1}$$

Umkehrung: Nützliche Integraldarstellung der δ-Funktion

$$\boxed{\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, dt}$$

(iii) $F(t) = 1$



$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|\, dt \longrightarrow \infty$$

Dirichlet-Bedingung verletzt, aber FT existiert:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\, dt \\ &\overset{x=-t}{=} -\int_{\infty}^{-\infty} e^{i\omega x}\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\, dx = 2\pi\delta(\omega) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{FT} - \text{Paar} \qquad 1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)}$$

(iv) $F(t) = e^{i\omega_0 t}$

$$\int_{-A}^{A} |F(t)|\, dt = \int_{-A}^{A} dt \overset{A\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Dirichlet-Bedingung verletzt, aber FT existiert:

$$\Longrightarrow \quad F(\omega) = \int e^{i(\omega_0-\omega)t}\, dt = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

(v) Beliebige periodische Funktion

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \\ \Longrightarrow \quad F(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(n\omega_0-\omega)t}\, dt \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned}$$

Anwendung auf komplexe Oszillatorgleichung:

$$\ddot{z} + 2b\dot{z} + \omega_0^2 z = F(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega$$

Ansatz:

$$z_{part}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega)\Big(\frac{d^2}{dt^2} + 2b\frac{d}{dt} + \omega_0^2\Big)e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad & \int_{-\infty}^{\infty}\Big[(-\omega^2 + 2ib\omega + \omega_0^2)Z(\omega) - F(\omega)\Big]e^{i\omega t}\, d\omega = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \Big[(-\omega^2 + 2ib\omega + \omega_0^2)Z(\omega) - F(\omega)\Big] = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & Z(\omega) = \frac{F(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega} = F(\omega)\chi(\omega)
\end{aligned}$$

(wobei $\chi(\omega)$ die in 3.2.3 eingeführte dynamische Suszeptibilität ist)

$$\boxed{z_{part}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega}e^{i\omega t}\, d\omega}$$

reelle Lösung (falls $F(\omega)\ \epsilon\ \mathbb{R}$) $\quad\Longrightarrow\quad x_{part}(t) = \Re\ z_{part}(t)$

Zusammenfassung (FT-Methode):

Rezept:

(i) Berechne zu geg. Inhomogenität $F(t)$ die Fourier-Trafo $F(\omega)$

(ii) Berechne $z_{part}(t)$ als Fourierintegral (inverse Fourier-Trafo zu $F(\omega)\chi(\omega)$)

Voraussetzungen der Methode:

(i) $F(t)$ ist als Fourierintegral darstellbar

(ii) Partikulärlösung bekannt für harmonische Anregung

(iii) Superpositionsprinzip (lineare DGl)

d) Allgemeine Anregung: Methode der Green'schen Funktionen
(Erarbeitet von Jan Metje)

Zur Diskussion steht:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$$

Aus der Vorlesung ist die partikuläre Lösung für eine harmonische Anregung bekannt. Betrachte jetzt beliebiges $F(t)$

Es gilt:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t')F(t')\ dt'$$

(Zur δ-Funktion siehe Anhang A.1)

$$\triangleleft \qquad \ddot{G}(t) + 2b\dot{G}(t) + \omega_0^2 G(t) = \frac{1}{m}\delta(t)$$

$G(t)$ ist definiert als eine Lösung dieser DGl. Das genauere Aussehen wird später untersucht.

<u>Ansatz :</u> $$x_{part}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')F(t')\ dt'$$

Zur Überprüfung betrachte Ableitungen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{part}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(t-t')F(t')\ dt' \\ \ddot{x}_{part}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{G}(t-t')F(t')\ dt' \end{aligned}$$

Einsetzen in DGl liefert:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{part} + 2b\dot{x}_{part} + \omega_0^2 x_{part} &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\ddot{G}(t-t') + 2b\dot{G}(t) + \omega_0^2 G(t)\Big)F(t')\ dt' \\ &= \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t')F(t')\ dt' \\ &= \frac{1}{m}F(t) \end{aligned}$$

Ansatz ist korrekt, da DGl erfüllt wird. Weiterhin gibt es zunächst keine Aussage über die Gestalt von G. Der Zusammenhang erlaubt partikuläre Lösung für beliebiges F bei Kenntnis von $G(t)$ = Green'sche Funktion.

Vgl. direkte Methode:
Für jedes $F(t)$ muss part. Lsg. $x_{part}(t)$ gesondert bestimmt werden

<u>Zur Gestalt von G:</u>

betrachte:	Einheitskraftstoß bei $t = 0$
Resultat:	$t < 0$ Oszillator in Ruhe
	$t = 0$ Kraftwirkung
	$t > 0$ harmonisch gedämpfter Oszillator

Alle anderen Fälle (z.B. Einheitsstoß am schwingenden Oszillator) sind durch Superposition zu erhalten

Was gilt demzufolge für $G(t)$?

$$t < 0 \qquad G(t) := G^-(t) \equiv 0 \ , \qquad \text{(keine Schwingung)}$$

$G(t)^-$ ist eine spezielle Lösung der DGl für $t < 0$

$$t > 0 \qquad G(t) := G^+(t)$$

Auch für diesen Zeitraum ist $G(t)$ Lösung der Oszillator-DGl. $G^+(t)$ ist aber nicht mehr unter allen speziellen Lösungen frei wählbar, da $G^+(t)$ die ABs erfüllen muss, die der Kraftstoß hervorgerufen hat.

Vgl. Kausalitätsprinzip: keine Wirkung früher als Ursache

Zur Gewinnung von G^+ betrachte Integration der DGl für $G(t)$ über $[-\tau, \tau]$ und Grenzwert für $\tau \to 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\tau\to 0}\Big\{\dot{G}(\tau) - \dot{G}(-\tau) + 2b\big(G(\tau) - G(-\tau)\big)\Big\} + \omega_0^2 \lim_{\tau\to 0}\int_{-\tau}^{\tau} G(t)\ dt &= \frac{1}{m} \\ \dot{G}^+(0) + 2bG^+(0) + \omega_0^2 \lim_{\tau\to 0}\int_{0}^{\tau} G^+(t)\ dt &= \frac{1}{m} \end{aligned}$$

$G(t)$ soll stetig sein (Teilchenbahnen sind immer stetig)

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad G^+(0) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \text{Integral verschwindet} \end{aligned}$$

Es bleibt:

$$\dot{G}^+(0) = \frac{1}{m}$$

Damit haben wir zwei ABs für homogene DGls erhalten.

Allgemeine Lsg.:

$$\Longrightarrow \ G(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} & t > 0 \end{cases}$$

Einsetzen der ABs:

$$\begin{aligned}
0 &= C_1 + C_2 \quad \Longrightarrow \quad -C_1 = C_2 \\
\frac{1}{m} &= C_1\lambda_1 \; + \; C_2\lambda_2 \\
&= C_1(\lambda_1 - \lambda_2) \\
\Longrightarrow \qquad & C_1 = \frac{1}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \; ; \quad C_2 = -\frac{1}{m(\lambda_1 - \lambda_2)}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \; G(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{1}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t} \right) & t \geq 0 \end{cases}$$

stetig in $t = 0$ und differenzierbar (Ableitung ist nicht stetig).

Bestimmung der partikulären Lösung $x_{part}(t)$

$$x_{part}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t - t')F(t') \; dt' = \int_{-\infty}^{t} G^+(t - t')F(t') \; dt'$$

Substitution $t'' = t - t'$

$$x_{part}(t) = \int_0^{\infty} G^+(t'')F(t - t'') \; dt''$$

<u>Anwendung für harmonisches $F(t)$:</u>

$$F(t) = f\cos(\omega t) = \frac{f}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

Einsetzen in $x_{part}(t)$ liefert:

$$\begin{aligned}
x_{part}(t) &= \frac{f}{2m(\lambda_1 - \lambda_2)} \int_0^{\infty} \left(e^{\lambda_1 t'} - e^{\lambda_2 t'} \right) \left(e^{i\omega(t-t')} - e^{-i\omega(t-t')} \right) \; dt' \\
&= \frac{f}{2m(\lambda_1 - \lambda_2)} \Bigg[e^{i\omega t} \int_0^{\infty} \left(e^{(\lambda_1 - i\omega)t'} - e^{(\lambda_2 - i\omega)t'} \right) \; dt' \\
&\quad + e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} e^{(\lambda_1 + i\omega)t'} - e^{(\lambda_2 + i\omega)t'} \; dt' \Bigg] \\
&= \frac{f}{2m(\lambda_1 - \lambda_2)} \Bigg[e^{i\omega t} \Bigg(\frac{1}{\lambda_1 - i\omega} \Big(\lim_{a \to \infty} e^{(\lambda_1 - i\omega)a} - 1 \Big) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda_2 - i\omega} \Big(\lim_{a \to \infty} e^{(\lambda_2 - i\omega)a} - 1 \Big) \Bigg) + \; e^{-i\omega t} \Bigg(\frac{1}{\lambda_1 + i\omega} \Big(\lim_{a \to \infty} e^{(\lambda_1 + i\omega)a} - 1 \Big) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda_2 + i\omega} \Big(\lim_{a \to \infty} e^{(\lambda_2 + i\omega)a} - 1 \Big) \Bigg) \Bigg]
\end{aligned}$$

da $\Re\,\lambda_1$ und $\Re\,\lambda_2$ negativ sind, existieren die Grenzwerte

$$\begin{aligned}
\hookrightarrow \quad x_{part}(t) &= \frac{f}{2m(\lambda_1-\lambda_2)}\left[e^{i\omega t}\Big(\frac{1}{\lambda_2-i\omega}-\frac{1}{\lambda_1-i\omega}\Big)+e^{-i\omega t}\Big(\frac{1}{\lambda_2+i\omega}-\frac{1}{\lambda_1+i\omega}\Big)\right]\\
&= \frac{f}{2m(\lambda_1-\lambda_2)}\left[e^{i\omega t}\frac{\lambda_1-\lambda_2}{(\lambda_2-i\omega)(\lambda_1-i\omega)}+e^{-i\omega t}\frac{\lambda_1-\lambda_2}{(\lambda_2+i\omega)(\lambda_1+i\omega)}\right]\\
&= \frac{f}{2m}\left[\frac{e^{i\omega t}}{\lambda_1\lambda_2-\omega^2-i\omega(\lambda_1+\lambda_2)}+\frac{e^{-i\omega t}}{\lambda_1\lambda_2-\omega^2+i\omega(\lambda_1+\lambda_2)}\right]
\end{aligned}$$

mit
$$\begin{aligned}
z_1 &:= \lambda_1\lambda_2-\omega^2-i\omega(\lambda_1+\lambda_2)\\
z_2 &:= \lambda_1\lambda_2-\omega^2+i\omega(\lambda_1+\lambda_2)
\end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \quad x_{part}(t)=\frac{f}{2m}\left[\frac{z_1^*e^{i\omega t}}{|z_1|^2}+\frac{z_2^*e^{-i\omega t}}{|z_2|^2}\right]$$

beachte :
$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= -b+\sqrt{b^2-\omega_0^2}\\ \lambda_2 &= -b-\sqrt{b^2-\omega_0^2}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \quad \begin{aligned}\lambda_1\lambda_2 &= \omega_0^2 && \in \mathbb{R}\\ \lambda_1+\lambda_2 &= -2b && \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad z_2=z_1^*=z\ , \quad |z_1|^2=|z_2|^2=|z|^2$$

$$\begin{aligned}
\hookrightarrow \quad x_{part}(t) &= \frac{f}{m|z|^2}\cdot\frac{1}{2}\Big(ze^{i\omega t}+z^*e^{-i\omega t}\Big)\\
&= \frac{f_0}{m|z|^2}\Big(\Re\ z\cos\omega t-\Im\ z\sin\omega t\Big)\\
&\equiv D\cos(\omega t-\varphi)
\end{aligned}$$

wobei
$$\begin{aligned}
D &= \frac{f}{m}\frac{1}{\sqrt{(\lambda_1\lambda_2-\omega^2)^2+(\omega\lambda_1+\omega\lambda_2)^2}}\\
&= \frac{f}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}}
\end{aligned}$$

$$\tan\varphi=-\frac{\omega(\lambda_1+\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2-\omega^2}=\frac{2b\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$\Longrightarrow$ Dasselbe Resultat wie bei der direkten Lösung in Kapitel 3.2.3 a)

Zusammenfassung:

Voraussetzungen der Methode:

(i) $F(t)$ ist als 'Faltungsintegral' darstellbar:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t')\delta(t-t')\ dt'$$

(ii) Partikulärlösung der DGl bekannt für δ-Anregung
(= Green'sche Fkt. $G(t)$)

(iii) $x_{part}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')F(t')\ dt'$

Rezept: (für beliebige lineare DGl)

(i) Bestimme $G(t)$ (siehe Voraussetzung (ii))

(ii) berechne $x_{part}(t)$ (gemäß (iii))

e) Kombination der Fourier- und Green's-Funktions-Methoden

$$\triangleleft \qquad \ddot{G} + 2b\dot{G} + \omega_0^2 G = \frac{1}{m}\delta(t)$$

$$\text{Fourier} - \text{Ansatz}: \qquad G(t) = \frac{1}{2\pi}\int G(\omega)e^{i\omega t}\ d\omega$$

$$\text{benutze} \qquad \delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\omega t}\ d\omega$$

$$\hookrightarrow \qquad \int \Big[G(\omega)\Big\{\frac{d^2}{dt^2} + 2b\frac{d}{dt} + \omega_0^2\Big\}e^{i\omega t} - \frac{1}{m}e^{i\omega t}\Big]d\omega = 0$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \int \Big[\Big(-\omega^2 + 2ib\omega + \omega_0^2\Big)G(\omega) - \frac{1}{m}\Big]e^{i\omega t}\ d\omega = 0$$

$$\boxed{\Longleftrightarrow \qquad mG(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega} \equiv \chi(\omega)}$$

FT der Green'schen Funktion $\hat{=}$ dyn. Suszeptibilität

Rezept:

(i) Berechne $G(t) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2+2ib\omega}\ d\omega$
(Mathematische Hilfsmittel: Residuensatz der Funktionentheorie)

(ii) $x_{part}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')F(t')\ dt'$ (wie zuvor)

Diese Technik ist verallgemeinerbar auf andere DGls und ist ein beliebtes Verfahren in der Elektrodynamik und Quantenmechanik.

Kapitel 4

Hamilton'sches Prinzip und Lagrange'sche Mechanik

Gründe für diese Formulierung der KM
Praxis: vorteilhaft für Bewegungsprobleme mit (geometrischen) Einschränkungen (Zwangsbedingungen)

Theorie: Einführung eines übergeordneten "Wirkungsprinzips"

4.1 Das Hamilton'sche Prinzip der stationären Wirkung (1823)

Die Bewegung eines (konservativen) mechanischen Systems von einer gegebenen Anfangs- zu einer gegebenen Endkonfiguration zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 verläuft so, dass das Integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U - V)\, dt$$

stationär ist ($\delta S = 0$).

Bemerkungen:

(i) $L = T - U - V$ "Lagrange Funktion" (Dimension einer Energie)

(ii) S: Wirkung (Energie $\times$ Zeit) (engl. 'action')

(iii) Stationarität der Wirkung ($\delta S = 0$) $\triangleq$ in 1. Näherung ändert sich der Wert von S nicht bei 'kleinen' Variationen der durchlaufenen Bahn
(Analogie: $f'(x_0) = 0 \triangleq$ in 1. Näherung ändert sich der Wert von $f(x)$ nicht in der Umgebung von x_0)

$\delta S = 0$ ist notwendige Bedingung für Extremum von S. I.d.R. folgt aus $\delta S = 0$ ein Minimum ("Prinzip der kleinsten Wirkung"), d.h. bzgl. der tatsächliche durchlaufenen Bahn ist S (i.d.R.) minimal

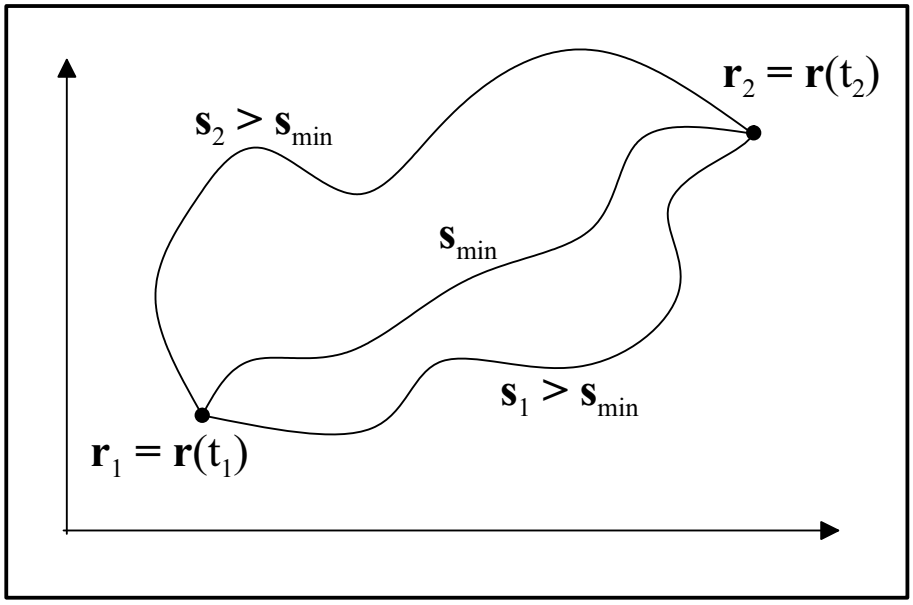


Abbildung 4.1: Illustration zum Hamilton'schen Prinzip

(iv) Hamilton-Prinzip (HP) ist ein "ökonomisches" Prinzip
Historische + philosophische Andeutungen: [Lin], [Som] § 33 + 37

(v) HP ist Integralprinzip

(vi) HP ist fundamentales Ordnungsprinzip der modernen Physik

(vii) Zu gegebener Lagrange-Funktion sowie Anfangs- und Endkonfiguration kann die tatsächliche Bewegung eines mechanischen Systems aus dem HP bestimmt werden

4.1.1 Grundzüge der Variationsrechnung

Gegeben: $f(x, \dot{x}, t)$ (2 mal stetig partiell differenzierbar)

Gesucht: 2 mal stetig differenzierbare Kurve $x(t)$ mit $x(t_1) = x_1$ und $x(t_2) = x_2$:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f(x, \dot{x}, t)\ dt \qquad \text{extremal}$$

$\hookrightarrow$ <u>Notwendige</u> Bedingung: "Euler-Lagrange"-Gleichung:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0}$$

<u>Beweis:</u> Sei $x(t)$ die gesuchte Kurve
Variationsansatz: $x_v(t) = x(t) + \varepsilon\varphi(t)$ mit $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$

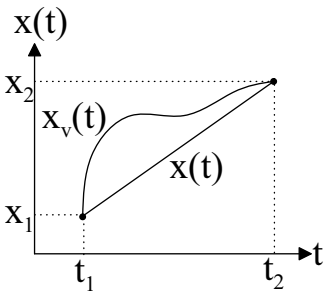
$$\hookrightarrow \qquad \dot{x}_v(t) = \dot{x}(t) + \varepsilon\dot{\varphi}(t)$$

$$\triangleleft \qquad I(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} f(x_v, \dot{x}_v, t)\ dt$$

$I(\varepsilon)$ sei extremal für $\varepsilon = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dI}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = 0$

$$\begin{aligned}
\hookrightarrow \qquad \frac{dI}{d\varepsilon} &= \frac{d}{d\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2} f(x_v, \dot{x}_v, t)\ dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial\varepsilon} f(x_v, \dot{x}_v, t)\ dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial f}{\partial x_v}\frac{\partial x_v}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_v}\frac{\partial \dot{x}_v}{\partial\varepsilon}\Big)\ dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial f}{\partial x_v}\ \varphi(t) + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_v}\ \dot{\varphi}(t)\Big)\ dt \\
\text{part. Integration :} \qquad &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial x_v}\ \varphi(t)\ dt + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_v}\ \varphi(t)\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_v}\Big)\varphi(t)\ dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial f}{\partial x_v} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_v}\Big)\ \varphi(t)\ dt \qquad (\text{da } \varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0) \\
\hookrightarrow \qquad \frac{dI}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} &= 0 = \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\Big)\ \varphi(t)\ dt \\
\Longrightarrow \qquad & \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0
\end{aligned}$$

<u>Elementares Beispiel:</u>



kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten

Bogenlänge $S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \dot{x}^2}\ dt$

$$\hookrightarrow \qquad f(x, \dot{x}, t) = \sqrt{1 + \dot{x}^2} = f(\dot{x})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \; ; \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} \quad \overset{\text{E-L-Gl.}}{\longrightarrow} \quad \frac{d}{dt}\Big(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\Big) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = konst. = C_1$$

$$\hookrightarrow \quad \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{C_1^2}{1-C_1^2}} = C_2 \quad \Longrightarrow \quad x(t) = C_2 t + C_3 \qquad \text{(Geradengleichung)}$$

Bemerkungen zur Variationsrechnung:

(i) $I = \int f(x.\dot{x}, t)\; dt = I[x]$ "Funktional" (Funktion $\mapsto$ Zahl)

(ii) Funktionalableitung $\frac{\delta I}{\delta x}$ definierbar

(iii) Man findet dann $\frac{\delta I}{\delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}$ für $I = \int f\; dt$
Definiere 'totale Variation' von I

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta \int f(x, \dot{x}, t) \\ \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\Big)\delta x\; dt \\ \hookrightarrow \quad \delta I &= 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{E} - \text{L} - \text{Gl.} \end{aligned}$$

(erklärt symbolische Notation des Hamilton'schen Prinzips $\delta S = 0$)

4.1.2 HP für den einfachsten Fall

$\lhd$ 1 MP in eindimensionaler Welt

$$L = T - U = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(x) = L(x, \dot{x}) \; ; \quad F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

$$\text{HP}: \qquad \delta \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x})\; dt = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0} \quad \text{Lagrange-Gl. 2. Art}$$

<u>Auswertung:</u>

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} \; ; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} \; ; \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{dU}{dx} = F(x) \end{aligned}$$

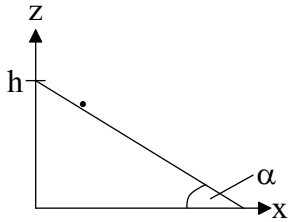
$$\hookrightarrow \quad m\ddot{x} = F(x) \quad \Longleftrightarrow \quad Lg\ II \quad \Longleftrightarrow \quad HP$$

4.2 Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten

4.2.1 Vorbereitungen für einen MP

a) Beispiele für Zwangsbedingungen (ZBs)

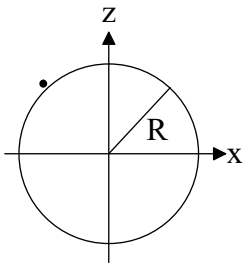
(i) (Reibungsfreie) Bewegung auf der schiefen Ebene



ZB: $z = (-\tan\alpha)x + h$
(y ist beliebig)

$\longrightarrow$ System hat zwei Freiheitsgrade (FGs)

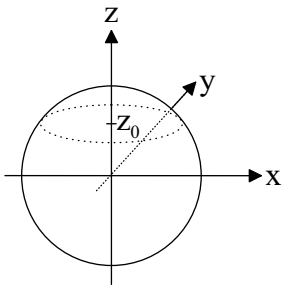
(ii) Bewegung auf Kugeloberfläche



ZB: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$\longrightarrow$ zwei FGs

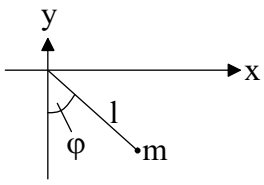
(iii) Bewegung auf Kreisrand mit Radius $r^2 = R^2 - z_0^2$



ZBs: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
$z = z_0 < R$

$\longrightarrow$ ein FG
Spezialfall: $z_0 = R$
<u>kein</u> FG (keine Bewegung)

(iv) Ebenes mathematisches Pendel



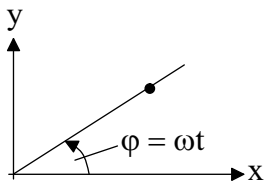
ZBs: $z = 0$
$l = \sqrt{x^2 + y^2} = konst.$

entspricht Beispiel (iii)

ZBs in Bsp. (i) - (iv) werden charakterisiert durch Gleichung der Form $f(x, y, z) = 0$

$$\longrightarrow \qquad \text{"holonom} - \text{skleronome" ZBs}$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$(\text{ganz}, \text{vollständig}) \; (\text{starr})$$

(v) Perle auf rotierendem Draht

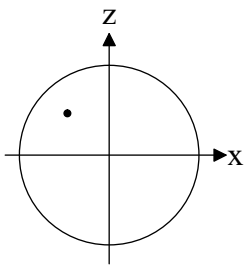


ZBs: $y = \tan(\omega t)x$
$z = 0$

$\longrightarrow$ 1 FG

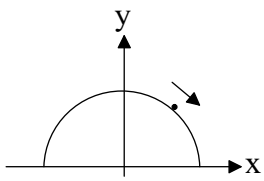
Variante: Perle auf Wippe
ZB charakterisiert durch Gleichung der Form $f(x, y, z, t) = 0$ (holonom - rheonom (=fließend))

(vi) In Kugel eingesperrter MP



ZB: $x^2 + y^2 + z^2 < R$

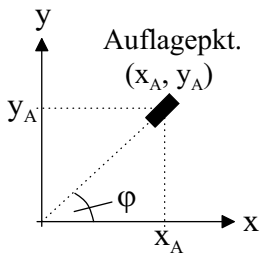
Variante:



$x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2$

$\longrightarrow$ nicht-holonome ZBs (charakterisiert durch Ungleichungen)
$\longrightarrow$ reduzieren Zahl der FGs nicht

(vii) In der Ebene rollendes Rad



$$\begin{aligned} \text{ZB}: \frac{dy}{dx} &= \tan\varphi(x_A, y_A) \\ \Longleftrightarrow\ dy &= \tan\varphi(x_A, y_A)\ dx \\ \Longleftrightarrow\ v_y &= \tan\varphi(x_A, y_A)\ v_x \end{aligned}$$

$\rightarrow$ differentielle ZB (nicht-holonom)
$\rightarrow$ Zahl der FGs wird <u>nicht</u> reduziert

b) Generalisierte Koordinaten und Lagrange-Gleichungen

– Einfachste Situation:
hol. ZB $f(x, y, z) = 0$ lasse sich auflösen in $z = g(x, y)$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \quad L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) &= L(x, y, g(x, y), \dot{x}, \dot{y}, \dot{g}(x, y), t) \\ &= L'(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) \end{aligned}$$

<u>Siehe Bsp. (i):</u> Schiefe Ebene im homogenen Schwerefeld
ZBs: $z = h - x\tan\alpha$, $\quad y = 0$ (ignorabel)

$$\begin{aligned} \text{Lagrange Fkt.}: \quad L = T - U &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz \\ \text{ZB einsetzen}: \quad &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}^2\tan^2\alpha) - mg(h - x\tan\alpha) \\ &= L(x, \dot{x}) \end{aligned}$$

$$\text{HP} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

<u>Auswertung:</u>

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}(1 + \tan^2\alpha), \ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m\ddot{x}}{cos^2\alpha}, \ \frac{\partial L}{\partial x} = mg\tan\alpha$$

$$\overset{\text{BWGl}}{\Longrightarrow} \quad m\ddot{x} - mg\tan\alpha\cos^2\alpha = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\ddot{x} = g\sin\alpha\cos\alpha}$$

<u>Lsg. :</u>

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{g}{2}(\sin\alpha\cos\alpha)t^2 + C_1 t + C_2 \\ z(t) &= h - \frac{g}{2}(\sin^2\alpha)t^2 - (C_1 t + C_2)\tan\alpha \quad \text{(bestimmt aus ZB)} \end{aligned}$$

(Äquivalenz zu Newton bleibt zu zeigen)

<u>Siehe Bsp. (iv):</u> Ebenes math. Pendel im homogenen Schwerefeld

$$\begin{aligned} \text{ZB}: \quad z &= 0 \qquad \text{(ignorabel)} \\ x &= \pm\sqrt{l^2 - y^2} \\ U &= mgy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L = T - U &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \\ &= \frac{m}{2}\Big(\frac{y^2\dot{y}^2 + \dot{y}^2(l^2 - y^2)}{l^2 - y^2}\Big) - mgy \\ &= \frac{m}{2}\Big(\frac{\dot{y}^2 l^2}{l^2 - y^2}\Big) - mgy \\ \longrightarrow \quad & \text{komplizierte Lagrange} - \text{Gleichung} \end{aligned}$$

<u>Wie geht es leichter?</u> $\longrightarrow$ in Polarkoordinaten!

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = l = konst. \quad \text{(ignorabel)} \\ \tan\varphi &= -\frac{x}{y} \\ \Longleftrightarrow \quad x &= r\sin\varphi \qquad\qquad y = -r\cos\varphi \\ &= l\sin\varphi \qquad\qquad\quad = -l\cos\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= mgy = -mgl\cos\varphi \\ \dot{x} &= l\dot{\varphi}\cos\varphi\,, \qquad \dot{y} = l\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \hookrightarrow \quad L &= \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi = L(\varphi) \end{aligned}$$

<u>Auswertung:</u>

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}\,, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\ddot{\varphi}\,, \quad \frac{\partial L}{\partial\varphi} = -mgl\sin\varphi$$

$$\overset{\text{Lg. Gl.}}{\Longrightarrow} \quad ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega^2\sin\varphi = 0\,, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

– kleine Auslenkungen: $\sin\varphi \approx \varphi$

$$\Longrightarrow \quad \ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi(t) = a\sin(\omega t - \beta)$$

– größere Auslenkungen:
Näherungsverfahren: siehe [Kuy], Kap. 2.4.3; (für $\sin\varphi \approx \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3$)
Vollständige Diskussion (mittels ellipt. Integrale) siehe [Gre] I, Kap. 24; [DL], Kap. 4.2.1

Bemerkungen:

– Es existiert kein universelles Rezept für das Auffinden geeigneter (generalisierter) Koordinaten
– 'Natürliche' Methode (falls möglich): Transformation auf (krummlinige) Koordinaten, die der Geometrie des Systems (der ZBs) besonders gut angepasst sind
– Gegebenenfalls führt das auf eine BWGl bzgl. nicht-inertialer Bezugssysteme

4.2.2 N-Teilchen Systeme

Zweckmäßige Nomenklatur:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{r}_1 & & \mathbf{r}_2 & \ldots & \mathbf{r}_N \\
x_1\ y_1\ z_1 & & x_2\ y_2\ z_2 & & x_N\ y_N\ z_N \\
\downarrow\ \downarrow\ \downarrow & & \downarrow\ \downarrow\ \downarrow & & \swarrow\ \downarrow\ \searrow \\
x_1\ x_2\ x_3 & & x_4\ x_5\ x_6 & & x_{3N-2}\ x_{3N-1}\ x_{3N} \\
m_1 & & m_2 & & m_N \\
\swarrow\ \downarrow\ \searrow & & \swarrow\ \downarrow\ \searrow & & \swarrow\ \downarrow\ \searrow \\
m_1 = m_2 = m_3 & & m_4 = m_5 = m_6 & & m_{3N-2} = m_{3N-1} = m_{3N}
\end{array}$$

$$\text{liefert z.B.:} \qquad \left(T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 \right)$$

k unabhängige holonome ZBs reduzieren die Zahl der FGs von $3N$ auf $3N - k$

a) Klassifikation von Zwangsbedingungen

(i) k holonom-skleronome ZBs

$$f_i(x_1, ..., , x_{3N}) = 0 \ ; \quad i = 1, ..., k$$

(ii) l holonom-rheonome ZBs

$$f_j(x_1, ..., , x_{3N}, t) = 0 \ ; \quad j = 1, ..., l$$

(iii) m differentielle ZBs

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dx_j + a_{it} \ dt = 0 \ ; \quad i = 1, ..., m$$

(Bsp.: rollendes Rad: $\tan\varphi(x_A, y_A) \ dx - dy = 0$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \quad a_{11} &= \tan\varphi(x_0, y_0) \\ a_{12} &= -1 \\ a_{1t} &= 0 \quad) \end{aligned}$$

$$\text{Unterscheide :} \qquad a_{it} \begin{cases} = 0 & \text{nicht holonom} - \text{skleronom} \\ \neq 0 & \text{nicht holonom} - \text{rheonom} \end{cases}$$

$\lhd$ totales Differential der holonom-skleronomen ZB $f(x_1, ..., x_{3N}) = 0$

$$\begin{aligned} df(x_1, ..., x_{3N}) &= \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f}{\partial x_j} \ dx_j \\ &= \nabla f \cdot d\mathbf{r} \qquad (\text{wobei } \nabla = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_{3N}})) \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ gewinne f durch (Kurven-) Integration

$$f(x_1, ..., x_{3N}) = \int df = \int \nabla f \cdot d\mathbf{r} \qquad (\text{wegunabhängig})$$

$\Longleftrightarrow$ "Integrabilitätsbedingungen" $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_j}$

(sind erfüllt, falls f 2 mal stetig diff.bar (Satz von Schwarz))

$\hookrightarrow$ k differentielle ZBs $\displaystyle\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} \ dx_j + a_{it} \ dt$ sind holonom

$$\text{falls} \qquad \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l} = \frac{\partial a_{il}}{\partial x_j} \; ; \quad \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_t} = \frac{\partial a_{it}}{\partial x_j}$$

<u>Beweis:</u> für hol. ZB $f_i(x_1, ..., x_{3N}, t) = 0$ gilt

$$\begin{aligned} df_i &= \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\, dx_j + \frac{\partial f_i}{\partial t}\, dt = 0 \\ &= \sum_{j=1}^{3N} a_{ij}\, dx_j + a_{it}\, dt \quad \text{mit} \quad a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j},\; a_{it} = \frac{\partial f_i}{\partial t} \end{aligned}$$

f erfüllt Integrabilitätsbedingungen:

$$\begin{array}{ccccccc} \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_l} & = & \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_l \partial x_j}\,, & & \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial t} & = & \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial x_j} \\ \| & & \| & & \| & & \| \\ \dfrac{\partial a_{il}}{\partial x_j} & = & \dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_l}\,, & & \dfrac{\partial a_{it}}{\partial x_j} & = & \dfrac{\partial a_{ij}}{\partial t} \end{array} \qquad \text{q.e.d.}$$

b) Generalisierte Koordinaten und der Konfigurationsraum

Ziel: Beschreibung des Teilchensystems mittels geeigneter Koordinaten

Punkt-Transformation $(x_1, ..., x_{3N}) \longleftrightarrow (q_1, ..., q_{3N})$

kartesische Koordinaten $x_i = x_i(q_1, ..., q_{3N}, t) \quad i = 1, ..., 3N$
generalisierte Koordinaten $q_\mu = q_\mu(x_1, ..., x_{3N}, t) \quad \mu = 1, ..., 3N$

<u>Annahme:</u> existieren k unabhängige, holonome ZBs
$f_j(x_1, ..., x_{3N}, t) = 0$ (bzw. $f_j(q_1, ..., q_{3N}, t) = 0$), $j = 1, ..., k$

<u>Wähle:</u>

$$\left.\begin{array}{l} q_{3N-k+1} = f_1(x_1, ..., x_{3N}, t) = 0 \\ q_{3N-k+2} = f_2(x_1, ..., x_{3N}, t) = 0 \\ \quad \vdots \\ q_{3N} = f_k(x_1, ..., x_{3N}, t) = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(ignorable Koordinaten)}$$

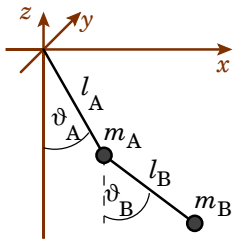
$\Longrightarrow$ es bleiben $3N - k$ unabhängige, generalisierte Koordinaten, die das System vollständig beschreiben

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q} &= (q_1, ..., q_{3N-k}): \quad \text{"Konfiguration(−svektor)"} \\ &= \text{Punkt im } (3N-k)\text{−dim. Konfigurationsraum} \\ \hookrightarrow \quad x_i &= x_i(q_1, ..., q_{3N-k}, t) \\ \hookrightarrow \quad \dot{x}_i &= \frac{d}{dt} x_i(q_1, ..., q_{3N-k}, t) \\ &= \sum_{\mu=1}^{3N-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu}\, \dot{q}_\mu + \frac{\partial x_i}{\partial t} \\ &= \dot{x}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \qquad i = 1, ..., 3N \end{aligned}$$

"$\dot{q}_\mu$: generalisierte Geschwindigkeit"

$$\hookrightarrow \quad L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

<u>Beispiel:</u> ebenes Doppelpendel ($N = 2$)



kartesische Koordinaten $(x_1, ..., x_6)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{ZB}: x_3 = x_6 = 0 \\ l_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ l_2 = \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (x_5 - x_2)^2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{4ZBs}$$

$\Longrightarrow$ 2 FGs

Generalisierte Koordinaten:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = \varphi_1 \\ q_2 = \varphi_2 \end{array}\right\} \text{charakterisieren Bewegung im } 2-\text{dim. Konfigurationsraum}$$

$$\left.\begin{array}{l} q_3 = x_3 = 0 \ , \ q_6 = x_6 = 0 \\ q_4 = l_1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0 \\ q_5 = l_2 - \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (x_5 - x_2)^2} = 0 \end{array}\right\} \text{ignorabel}$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{6} m_i \dot{x}_i^2 - g(m_2 x_2 + m_5 x_5)$$

<u>Kotrafos:</u>

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & l_1 \sin\varphi_1 = l_1 \sin q_1 \\ x_2 & = & -l_1 \cos\varphi_1 = -l_1 \cos q_1 \\ x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & l_1 \sin q_1 + l_2 \sin q_2 \\ x_5 & = & -l_1 \cos q_1 - l_2 \cos q_2 \\ x_6 & = & 0 \\ \text{allg. Form}: \quad x_i & = & x_i(q_1, q_2) \ , \quad i = 1, ..., 6 \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= l_1\dot{q}_1 \cos q_1 \\
\dot{x}_2 &= l_1\dot{q}_1 \sin q_1 \\
\dot{x}_3 &= 0 \\
\dot{x}_4 &= l_1\dot{q}_1 \cos q_1 + l_2\dot{q}_2 \cos q_2 \\
\dot{x}_5 &= l_1\dot{q}_1 \sin q_1 + l_2\dot{q}_2 \sin q_2 \\
\dot{x}_6 &= 0 \\
\text{allg. Form :} \quad \dot{x}_i &= \dot{x}_i(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \ , \quad i = 1, ..., 6
\end{aligned}
$$

Mit der konventionellen Nomenklatur für die Massen:

$$
(m_1, m_2, m_3) \longrightarrow m_1 \quad (m_4, m_5, m_6) \longrightarrow m_2
$$

$$
\begin{aligned}
\hookrightarrow \quad L &= \frac{m_1}{2}\, l_1^2\dot{q}_1^2\Big(\cos^2 q_1 + \sin^2 q_1\Big) + \frac{m_2}{2}\Big[\big(l_1\dot{q}_1 \cos q_1 + l_2\dot{q}_2 \cos q_2\big)^2 \\
&\quad + \big(l_1\dot{q}_1 \sin q_1 + l_2\dot{q}_2 \sin q_2\big)^2\Big] + m_1 g l_1 \cos q_1 + m_2 g\big(l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2\big) \\
&= \frac{m_1}{2}\, l_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2}\, l_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2}\, l_2^2\dot{q}_2^2 + m_2 l_2 l_1 \dot{q}_1\dot{q}_2\big(\cos q_1 \cos q_2 + \sin q_1 \sin q_2\big) \\
&\quad + (m_1 + m_2) g l_1 \cos q_1 + m_2 g l_2 \cos q_2 \\
&= \frac{m_1 + m_2}{2}\, l_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2}\, l_2^2\dot{q}_2^2 + m_2 l_2 l_1 \dot{q}_1\dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2) \\
&\quad + (m_1 + m_2) g l_1 \cos q_1 + m_2 g l_2 \cos q_2 \\
&= L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)
\end{aligned}
$$

4.3 Die Lagrange-Gleichungen 2. Art

Betrachte nun den allgemeineren Fall von N Massenpunkten und k holonomen Zwangsbedingungen

<u>Wiederholung:</u> Hamilton'sches Prinzip

Die Bewegung eines (konservativen) mechanischen Systems (mit $3N$-k FGs) von einer gegebenen Anfangskonfiguration $\mathbf{q}(t_1)$ zu einer Endkonfiguration $\mathbf{q}(t_2)$ zwischen t_1 und t_2 verläuft derart, dass

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\ dt = 0 \\
\text{wobei} \quad L &= T - U - V
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U + V = W(x_1, ..., x_{3N}) \quad &\xrightarrow{x_i = x_i(\mathbf{q}, t)} \quad W(\mathbf{q}, t) \\
T = T(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_{3N}) \quad &\xrightarrow{\dot{x}_i = \dot{x}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)} \quad T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)
\end{aligned}
$$

"Bewegung": ist die Zeitentwicklung des Systems auf einer "Kurve"

$$\mathbf{q}(t) = \{q_1(t), ..., q_{3N-k}(t),\ t_1 \leq t \leq t_2\}$$

im ($3N$-k)-dimensionalen Konfigurationsraum.

4.3.1 Herleitung der Lagrange-Gleichungen aus dem Hamilton-Prinzip

vgl. Kapitel 4.1.1

- HP: $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\ dt = 0$
- Sei $\mathbf{q}(t)$ die Kurve, bzgl. derer $\delta S = 0$
- Variationsansatz:

$$\begin{array}{rrcll} & q_{\mu,v}(t) & = & q_\mu(t) + \varepsilon\varphi_\mu(t) & \qquad (\mu = 1, ..., 3N-k) \\ \text{mit} & \varphi_\mu(t_1) & = & \varphi_\mu(t_2) = 0 & \\ & \dot{q}_{\mu,v}(t) & = & \dot{q}_\mu(t) + \varepsilon\dot{\varphi}_\mu(t) & \end{array}$$

- $\lhd \qquad \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q_v}, \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{v}, t)\ dt = S(\epsilon)$
- Notwendige Bedingung für Minimum bei $\varepsilon = 0$: $\left.\frac{dS}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$
- $$\begin{aligned} \frac{dS}{d\varepsilon} &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial\varepsilon} L(\mathbf{q}_v, \dot{\mathbf{q}}_v, t)\ dt \\ &= \sum_{\mu=1}^{3N-k} \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial L}{\partial q_{\mu,v}} \frac{\partial q_{\mu,v}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu,v}} \frac{\partial \dot{q}_{\mu,v}}{\partial\varepsilon}\Big)\ dt \\ &= \sum_{\mu=1}^{3N-k} \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial L}{\partial q_{\mu,v}}\ \varphi_\mu(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu,v}}\ \dot{\varphi}_\mu(t)\Big)\ dt \\ &= \underbrace{\sum_{\mu=1}^{3N-k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu,v}}\ \varphi_\mu(t)\Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} + \sum_{\mu=1}^{3N-k} \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial L}{\partial q_{\mu,v}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu,v}}\Big)\varphi_\mu(t)\ dt \end{aligned}$$
- $$\left.\frac{dS}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \sum_{\mu=1}^{3N-k} \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial L}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\Big)\varphi_\mu(t)\ dt$$
- $$\text{HP} \iff \left.\frac{dS}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = 0 \ , \quad \mu = 1, ..., 3N - k}$$

Lagrange – Gleichungen 2. Art

4.3.2 Äquivalenz der Lagrange-Gleichungen zu den Newton'schen Bewegungsgleichungen

a) System ohne ZBs in kartesischen Koordinaten
<u>zu zeigen:</u>

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \ , \quad i = 1, ..., 3N$$

$$\Longleftrightarrow \quad \dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{F}_k + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{f}_{jk} \ , \quad k = 1, ..., N$$

<u>Beweis:</u>

$$\begin{aligned} L \ = \ T - U - V \ &= \ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j^2 - U(x_1, ..., x_{3N}) - V(x_1, ..., x_{3N}) \\ \hookrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \ &= \ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \ = \ m_i \ddot{x}_i \ = \ \dot{p}_i, \quad (i = 1, ..., 3N) \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} \ &= \ -\frac{\partial}{\partial x_i}(U + V) \ = \ F_i + \sum_{j=1}^{3N} f_{ji} \end{aligned}$$

<u>Erläuterung zur letzten Gleichung:</u>

(i) Äußere Kräfte:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N) \ &= \ \sum_{k=1}^{N} U_k(\mathbf{r}_k) \ = \ U_1(x_1 x_2 x_3) + U_2(x_4 x_5 x_6) \\ &\qquad + \ ... \ + U_N(x_{3N-2} x_{3N-1} x_{3N}) \\ &= \ U(x_1, ..., x_{3N}) \end{aligned}$$

$\rightarrow$ äußere Kraft auf k-ten MP: $\mathbf{F}_k = -\nabla_k U_k \ \hookrightarrow$ m-te Komponente der Kraft auf k-ten MP:

$$F_k^m = -\frac{\partial}{\partial x_k^m} U_k = -\frac{\partial U}{\partial x_k^m} \ , \quad (k = 1, ..., N; \ m = 1, 2, 3)$$

explizit:

$$\begin{pmatrix} F_k^1 \equiv F_k^x = -\frac{\partial}{\partial x_k} U \\ F_k^2 \equiv F_k^y = -\frac{\partial}{\partial y_k} U \\ F_k^3 \equiv F_k^z = -\frac{\partial}{\partial z_k} U \end{pmatrix} \Longleftrightarrow F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \ , \quad i = 1, ..., 3N$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} F_1^x & F_1^y & F_1^z & & F_2^x & F_2^y & F_2^z & ... & F_N^x & F_N^y & F_N^z \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ F_1 & F_2 & F_3 & & F_4 & F_5 & F_6 & & F_{3N-2} & F_{3N-1} & F_{3N} \end{array}$$

(ii) Innere Kräfte:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{ji} &= \nabla_i V_{ji} = -\nabla_i V_{ij} \\ V(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N) &= \sum_{j<i}^{N} V_{ji}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = V_{12}(x_1 x_2 x_3, x_4 x_5 x_6) \\ &\quad + V_{13}(x_1 x_2 x_3, x_7 x_8 x_9) + ... + V_{23}(x_4 x_5 x_6, x_7 x_8 x_9) + ... \\ &\quad + ... + V_{N-1,N}(x_{3N-5} x_{3N-4} x_{3N-3}, x_{3N-2} x_{3N-1} x_{3N}) \end{aligned}$$

Betrachte einige Beispiele:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x_1} &= -\frac{\partial}{\partial x_1}(V_{12} + V_{13} + ... + V_{1N}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_1}(V_{21} + V_{31} + ... + V_{N1}) = f_1^x = \sum_{j=1}^{N} f_{j1}^x \\ &= \sum_{j=1}^{3N} f_{j1} \\ -\frac{\partial V}{\partial x_5} &= -\frac{\partial}{\partial x_5}(V_{12} + V_{32} + V_{42} + ... + V_{N2}) \\ &= f_2^y = \sum_{j=1}^{N} f_{j2}^y = \sum_{j=1}^{3N} f_{j5} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial V}{\partial x_{3N}} &= -\frac{\partial}{\partial x_{3N}}(V_{N1}+V_{N2}+...+V_{N,N-1}) \\
&= f_N^z = \sum_{j=1}^{N} f_{jN}^z = \sum_{j=1}^{3N} f_{j3N}
\end{aligned}
$$

$$
\hookrightarrow \quad \underline{\text{allg.}:} \quad -\frac{\partial V}{\partial x_i} = ... = \sum_{j=1}^{3N} f_{ji}
$$

wobei Matrix $f_{ij}(3N \times 3N)$ die folgende Struktur hat:

$j \setminus i$	1	2	3	4	5	6	7	..	..	3N-2	3N-1	3N
1	0	0	0	x	0	0	x	..	..	x	0	0
2	0	0	0	0	x	0	0	..	..	0	x	0
3	0	0	0	0	0	x	0	..	..	0	0	x
4	x	0	0	0	0	0	x	..	..	x	0	0
5	0	x	0	0	0	0	0	..	..	0	x	0
6	0	0	x	0	0	0	0	..	..	0	0	x
7	x	0	0	x	0	0	0	0	0	.		
⋮	⋮			⋮			0	..	..	⋮		
3N												

Zusammenfassung: $f_{ji} \neq 0$ falls $1 \leq j = i \pm 3n \leq 3N$; $(n = 1, ..., N-1)$

$$
\begin{aligned}
\text{es ist also}: \quad & -\frac{\partial V}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{3N} f_{ji} \ , \qquad i = 1, ..., 3N \\
\Longleftrightarrow \quad & -\nabla_i V_{ij} = \mathbf{f}_{ji} \ , \qquad i, j = 1, ..., N \\
\Longrightarrow \quad & \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \dot{p}_i - F_i - \sum_{j=1}^{3N} f_{ji} = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{F}_k + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{f}_{jk} \ , \qquad k = 1, ..., N \qquad \text{(q.e.d.)}
\end{aligned}
$$

b) Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen unter Punkttransformation

bisher: Lagrange II = Newton II in kart. Koordinaten

<u>Zeige:</u>

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = 0
$$

Wobei: $x_i = x_i(q_1, ..., q_{3N}, t)$, $i = 1, ..., 3N$

$\Longrightarrow$ Lagrange-Gleichungen in 3N general. Koordinaten $\Longleftrightarrow$ Newton II in kart. Koordinaten

Allgemeiner: Zeige Forminvarianz von Lagrange II bzgl.
Punkttransformation: $q_\mu \to Q_\alpha = Q_\alpha(\mathbf{q}, t)$, $\alpha = 1, ..., n$
Umkehrung: $q_\mu = q_\mu(\mathbf{Q}, t)$, $\mu = 1, ..., n$

Zutaten :
$$\begin{aligned} \dot{q}_\mu &= \frac{d}{dt}\, q_\mu(Q_1, ..., Q_n, t) = \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\beta}\, \dot{Q}_\beta + \frac{\partial q_\mu}{\partial t} \\ &= \dot{q}_\mu(Q_1 ... Q_n, \dot{Q}_1 ... \dot{Q}_n, t) \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial \dot{Q}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_\alpha}\Big(\sum_\beta \frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\beta}\dot{Q}_\beta + \frac{\partial q_\mu}{\partial t}\Big) = \frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\alpha}}$$

<u>Annahme :</u> $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = 0$, $\mu = 1, ..., n$

$$\begin{aligned} L(q_1 ... q_n, \dot{q}_1 ... \dot{q}_n, t) &= L\Big(q_1(Q_1 ... Q_n, t), q_2(Q_1 ... Q_n, t), ..., \dot{q}_1(Q_1 ... Q_n, \dot{Q}_1 ... \dot{Q}_n, t), ..., t\Big) \\ &= \tilde{L}(Q_1 ... Q_n, \dot{Q}_1 ... \dot{Q}_n, t) \end{aligned}$$

<u>zu zeigen :</u> $\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_\alpha} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_\alpha} = 0$, $\alpha = 1, ..., n$

- $$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_\alpha} = \sum_\mu \Big(\frac{\partial L}{\partial q_\mu}\frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial Q_\alpha}\Big)$$
- $$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_\alpha} = \sum_\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial \dot{Q}_\alpha} = \sum_\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\alpha}$$
- $$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_\alpha} = \frac{d}{dt}\Big(\sum_\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\alpha}\Big) = \sum_\mu \Bigg[\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\Big)\frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\alpha}}_{= \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial Q_\alpha}}\Bigg]$$

$$\longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_\alpha} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_\alpha} = \sum_\mu \Bigg[\underbrace{\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_\mu}}_{=0}\Bigg]\frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\alpha} = 0 \qquad \text{(q.e.d.)}$$

<u>Bemerkungen:</u>

(i) Forminvarianz gilt insbesondere für $n = 3N$ und $Q_\alpha \equiv x_i$
$\hookrightarrow$ Lagrange-Gleichungen in $3N$ generalisierten Koordinaten $\Longleftrightarrow$ Newton's BWGl in kartesischen Koordinaten

(ii) Newton's BWGl <u>nicht</u> forminvariant unter allg. Punkttransformation:

$$\text{aus}: \quad m_i \ddot{x}_i = F_i \qquad \text{folgt } \underline{\text{nicht}} \qquad m_\mu \ddot{q}_\mu = \tilde{F}_\mu \quad \text{(siehe Kap. V)}$$

(iii) Einbau holonomer ZBs

$$\text{Annahme}: \quad \mathbf{q} = \{q_1 ... q_{3N-k}, \underbrace{q_{3N-k-1} ... q_{3N}}_{\text{ignorabel}}\}$$

$$\text{HP}: \quad \delta S = 0 \quad \text{für} \quad L = L(q_1 ... q_{3N}, \dot{q}_1 ... \dot{q}_{3N}, t)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 = \frac{dS}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \sum_{\mu=1}^{3N} \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial L}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\Big) \varphi_\mu(t)\, dt$$

$$= \sum_{\mu=1}^{3N-k} \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial L}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\Big) \varphi_\mu(t)\, dt$$

$$+ \sum_{\mu=3N-k+1}^{3N} \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial L}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\Big) \underbrace{\varphi_\mu(t)}_{= 0 \text{ für } \mu = 3N-k+1, ..., 3N} dt$$

(da die ignorablen Koordinaten nicht variiert werden)

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial L}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu = 1, ..., 3N-k}$$

$\longrightarrow$ HP $\Longleftrightarrow$ Lagrange II für $3N-k$ gen. Koordinaten $\longleftrightarrow$ Newton II für $3N$ kart. Koordinaten + Zwangskräfte aufgrund holonomer ZBs

(iv) Diskussion des Doppelpendels (siehe S. 80ff)

$$\hookrightarrow \quad L(\underset{q_1}{\varphi_1}, \underset{q_2}{\varphi_2}, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) \implies \text{Lg} - \text{Gl. für} \quad q_1 = \varphi_1,\ q_2 = \varphi_2 \quad \text{aufstellen} + \text{lösen}$$

(siehe Übungsaufgabe 8.3)

(v) Gebrauchsanweisung für Lagrange II

- Formuliere k (holonome) ZBs
- Wähle $3N$ generalisierte Koordinaten, wobei k Stück mit ZBs identifiziert werden und ignorabel sind
- Stelle $T - U - V$ in $3N$ kartesischen oder geeigneten, krummlinigen Koordinaten auf
- Finde Kotrafo zwischen diesen und den $(3N - k)$ unabhängigen generalisierten Koordinaten
- Bestimme $L = T - U - V$ als $L(q_1 ... q_{3N-k}, \dot{q}_1 ... \dot{q}_{3N-k}, t)$
- Bilde $3N - k$ Lagrange-Gleichungen durch Auswertung von

$$\frac{\partial L}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = 0 \qquad (\mu = 1, ..., 3N - k)$$

- Löse BWGl'en und analysiere Lösung

(vi) $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \tilde{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t)$, d.h. die Lagrangefunktion selbst ist nicht forminvariant unter Punkttransformationen. In praxi nimmt man darauf in der Notation meistens keine Rücksicht und schreibt $L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t)$ statt $\tilde{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t)$

4.3.3 Lagrange II und Erhaltungssätze

a) Generalisierte (kanonische) Impulse + zyklische Koordinaten

<u>Definition:</u> generalisierter Impulse $p_\mu := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}$

<u>Beispiel 1:</u> kartesische Koordinaten

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_j m_j \cdot \dot{x}_j^2\Big) = m_i \dot{x}_i$$

$\longrightarrow$ der übliche mechanische (oder kinetische) Impuls

<u>Beispiel 2:</u> Ebenes Pendel (xy-Ebene)

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} l^2 \dot{q}^2 + mgl \cos q \ , \quad (q = \varphi) \\ \hookrightarrow \quad p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = ml^2 \dot{q} = ml^2 \dot{\varphi} = l_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ z-Komponente des Drehimpulses

Wann gilt $\dot{p}_\mu = 0$?

$$\hookrightarrow \quad \text{Lg II}: \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = \dot{p}_\mu = \frac{\partial L}{\partial q_\mu}$$

$$\hookrightarrow \quad \boxed{\text{falls} \quad \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = 0 \quad \text{folgt} \quad \begin{cases} \dot{p}_\mu = 0 \\ p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = \text{konst.} \end{cases}}$$

<u>Definition:</u> "zyklische Koordinaten" $q_\mu :\Longleftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = 0$
$\longrightarrow$ Der zur generalisierten Koordinate q_μ zugehörige Impuls p_μ ist Erhaltungsgröße, falls q_μ zyklisch ist

Triviales Beispiel: freies Teilchen

$$\begin{aligned} L &= T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{x}_i^2 \\ &\hookrightarrow \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p_i = m_i \dot{x}_i = \text{konst.} \end{aligned}$$

b) Energie und Hamiltonfunktion

Zur Vorbereitung:

- <u>Definition:</u> $f(x_1 ... x_m)$ ist homogene Funktion n-ten Grades $:\Longleftrightarrow$

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_m) = \lambda^n f(x_1 ... x_m)$$

- Satz von Euler: Sei f homogen vom Grad n

$$\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f(x_1, ..., x_m)$$

<u>Beweis:</u> $y_i = \lambda x_i$

$$\begin{aligned} \triangleleft \qquad \frac{\partial f}{\partial \lambda}(y_1, ..., y_m) &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial \lambda} \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} x_i \\ &= n\lambda^{n-1} f(x_1, ..., x_m) \end{aligned}$$

für $\lambda = 1 :$ $(y_i = x_i)$

$$\hookrightarrow \quad \sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f(x_1, ..., x_m) \ .$$

<u>Behauptung:</u> Für nicht explizit zeitabhängige Transformationen $x_i \longleftrightarrow q_\mu$ $(x_i = x_i(\mathbf{q}))$ ist die kinetische Energie einer homogenen Funktion 2. Grades in den generalisierten Geschwindigkeiten

<u>Beweis :</u>

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{x}_i^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_i m_i \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu}\frac{\partial x_i}{\partial q_\nu}\ \dot{q}_\mu\ \dot{q}_\nu \quad . \end{aligned}$$

$$\overset{\text{Euler}}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\sum_\mu \dot{q}_\mu \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} = 2T}$$

$$\begin{aligned} \lhd \qquad \frac{d}{dt}\ L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) &= \sum_\mu \Big(\frac{\partial L}{\partial q_\mu}\ \dot{q}_\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\ \ddot{q}_\mu\Big) + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &\overset{\text{LG II}}{=} \sum_\mu \Big[\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\Big)\ \dot{q}_\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\frac{d}{dt}\ \dot{q}_\mu\Big] + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt}\Big(\sum_\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\ \dot{q}_\mu\Big) + \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\ \Big\{\sum_\mu p_\mu \dot{q}_\mu - L\Big\} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

<u>Definition:</u> Hamiltonfunktion

$$\boxed{H = \sum_\mu p_\mu \dot{q}_\mu - L}$$

$$\hookrightarrow \quad \boxed{\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\text{falls} \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \text{folgt} \quad \begin{cases} \dot{H} = 0 \\ H = \text{konst.} \end{cases}}$$

Bemerkungen:

(i) $\big[H\big] = J = Nm$ (Dimension einer Energie)

(ii) $H \equiv E = T + U + V$, falls

- konservatives System mit allenfalls holonomem ZBs
- zeitunabhängige Transformation $x_i \;\rightarrow\; q_\mu$ (üblicherweise realisiert durch skleronome ZBs und ruhende Bezugssysteme)
  Beweis:

$$
\begin{aligned}
& p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \overset{\text{(konservativ)}}{=} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} \quad \left(\text{da } \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\mu}(U+V) = 0\right) \\
\hookrightarrow \quad & H = \sum_\mu p_\mu \dot{q}_\mu - L = \sum_\mu \dot{q}_\mu \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} - L = 2T - T + U + V \\
& = T + U + V
\end{aligned}
$$

(iii) Genannte Voraussetzungen für $H = E = T + U + V$ sind hinreichend, aber nicht notwendig

(iv) $H = E$ und $\dot{H} = 0$ sind unabhängige Aussagen
$\hookrightarrow \quad \dot{H} = 0$ und $H \neq E$ ist möglich
$\hookrightarrow \quad \dot{H} \neq 0$ und $H = E$ ebenfalls

(iv) Falls Bedingungen in Bemerkung (ii) erfüllt und falls $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

$$
\Longrightarrow \quad \boxed{H = E = T + U + V = \text{konst.}}
$$

Beispiele:

(i) Eindimensionaler harmonischer Oszillator

$$
\begin{aligned}
& T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \;, \quad U = \frac{m}{2}\omega^2 x^2 \;, \quad L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) \\
\hookrightarrow \quad & H = p\dot{x} - L = m\dot{x}^2 - \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = E = \text{konst.}
\end{aligned}
$$

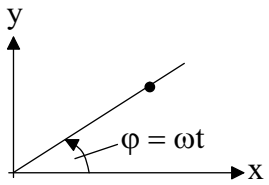
(ii) Ebenes Pendel

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi \\
\text{mit} \quad p_\varphi &= ml^2\dot{\varphi} \\
H &= p_\varphi \dot{\varphi} - L = ml^2\dot{\varphi}^2 - \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi \\
&= \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi = T + U = E = \text{konst.}
\end{aligned}
$$

(iii) Ebenes Doppelpendel

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{m_1+m_2}{2}\, l_1^2\dot\varphi_1^2 + \frac{m_2}{2}\, l_2^2\dot\varphi_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1\dot\varphi_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) \\
U &= -(m_1+m_2) g l_1 \cos\varphi_1 - m_2 g l_2 \cos\varphi_2 \\
p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_1} = (m_1+m_2) l_1^2 \dot\varphi_1 + m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) \\
p_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_2} = m_2 l_2^2 \dot\varphi_2 + m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1 \cos(\varphi_1-\varphi_2) \\
H &= p_1\dot\varphi_1 + p_2\dot\varphi_2 - T + U \\
&= (m_1+m_2) l_1^2\dot\varphi_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1\dot\varphi_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) \\
&\quad + m_2 l_2^2 \dot\varphi_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1\dot\varphi_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) \\
&\quad - T + U \;=\; T + U \;=\; E = \text{ konst.}
\end{aligned}
$$

(iv) Perle auf rotierendem Draht ($U = 0$)



rheonome ZB : $y = x \tan\omega t \iff \varphi - \omega t = 0$

gen. Koordinaten $\begin{cases} q_1 = r \\ q_2 = \varphi - \omega t = 0 \quad \text{(ignorabel)} \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
L \;=\; T \;=\; \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) \;&=\; \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\omega^2) = E \\
H \;=\; p\dot r - L = \frac{\partial L}{\partial \dot r}\,\dot r - L \;&=\; m\dot r^2 - \frac{m}{2}\dot r^2 - \frac{m}{2} r^2\omega^2 \\
&=\; \frac{m}{2}(\dot r^2 - r^2\omega^2) \neq E
\end{aligned}
$$

$$
-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dH}{dt} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad H = \text{konst.}
$$

Lagrange-Gleichung:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} - \frac{\partial L}{\partial r} \;&=\; 0 \\
\| \qquad \| \\
m\ddot r - m\omega^2 r \;&=\; 0 \quad \iff \quad \ddot r - \omega^2 r = 0
\end{aligned}
$$

$\lhd$ Allgemeine Lösung zur Verdeutlichung:

$$\begin{aligned}
r(t) &= C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} \\
\dot{r}(t) &= C_1 \omega e^{\omega t} - C_2 \omega e^{-\omega t} \\
\hookrightarrow \quad H &= \frac{m}{2}\Big\{\Big(C_1\omega e^{\omega t} - C_2\omega e^{-\omega t}\Big)^2 - \omega^2\Big(C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}\Big)^2\Big\} \\
&= \frac{m}{2}\left\{C_1^2\omega^2 e^{2\omega t} + C_2^2\omega^2 e^{-2\omega t} - 2C_1C_2\omega^2 - C_1^2\omega^2 e^{2\omega t}\right. \\
&\quad \left. - C_2^2\omega^2 e^{-2\omega t} - 2\omega^2 C_1 C_2\right\} \\
&= -2m\omega^2 C_1 C_2 = \text{konst.}
\end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \quad L = m\omega^2\Big(C_1^2 e^{2\omega t} + C_2^2 e^{-2\omega t}\Big) = E(t)$$

(v) Teilchen im zeitlich veränderlichen homogenen Kraftfeld (1-dim. Welt)

$$\begin{aligned}
F(t) &= F_0 t \\
\hookrightarrow \quad U(x) &= -F_0 x t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L &= T - U = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + F_0 x t \\
H &= p\dot{x} - L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - F_0 x t = T + U = E = E(t)
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial t} = F_0 x = -\dot{H}\right)$$

Allgemeinere Diskussion von Erhaltungssätzen durch Betrachtung von Symmetrien $\longrightarrow$ Noether-Theorem, siehe hierzu [Kuy], Kap. 7 (insb. 7.3) und [Fli], Kap 11 + 15

4.3.4 Erweiterungen

a) Verallgemeinerte (generalisierte) Potentiale

bisher : $\quad -\dfrac{\partial}{\partial x_i}W = -\dfrac{\partial}{\partial x_i}(U+V) = F_i + \displaystyle\sum_{j=1}^{3N} f_{ji} \equiv K_i\,, \qquad i = 1, ..., 3N$

$$\lhd \qquad -\frac{\partial W}{\partial q_\mu} = -\sum_i \frac{\partial W}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_\mu} = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu}$$

$$\equiv Q_\mu \qquad \text{"generalisierte Kraftkomponenten"}$$

$$\Big(= Q_\mu(q_1 ... q_{3N-k}, t)\Big)$$

Sei $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - W(\mathbf{q}, t)$

Lg − Gl′en : $\qquad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} = \dfrac{\partial L}{\partial q_\mu} = \dfrac{\partial T}{\partial q_\mu} - \dfrac{\partial W}{\partial q_\mu}$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial T}{\partial q_\mu} = Q_\mu \ , \quad \mu = 1, ..., 3N-k}$$

$\longrightarrow$ Alternative Form der Lagrange-Gleichungen

Erweiterung: betrachte 'verallgemeinerte' Potentialfunktion $W^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$

$$Q_\mu = -\left(\frac{\partial W^*}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W^*}{\partial \dot{q}_\mu}\right)$$

$$\longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial T}{\partial q_\mu} = \frac{d}{dt}\frac{\partial W^*}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial W^*}{\partial q_\mu}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial L}{\partial q_\mu} & = & 0 \\ \text{für} \quad L & = & T - W^* \end{array}}$$

<u>Beispiel:</u> für $W^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$: Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

$$\begin{array}{rrcll} \text{Lorentzkraft :} & \mathbf{F} & = & q\big(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\big) & \\ \hookrightarrow & F_i & = & -\Big(\frac{\partial W^*}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W^*}{\partial \dot{x}_i}\Big) & \text{mit} \\ & W^* & = & q\big(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\big) & \text{und} \\ & \mathbf{B} & = & \nabla \times \mathbf{A} & \\ & \mathbf{E} & = & -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} & \end{array}$$

siehe [Nol] II, Kap. 1.2.3 und [Gol], Kap. 1.5, (7.3)

$$\text{gen. Impulse :} \quad p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = \underbrace{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}}_{\text{"mechanischer (kinetischer) Impuls"}} + \frac{\partial W^*}{\partial \dot{q}_\mu}$$

<u>Bemerkung:</u> Man findet für dieses Beispiel

$$H = \frac{m}{2}\mathbf{v^2} + q\phi = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi = E$$

aber bei zeitabhängigen Feldern $\dot{E} \neq 0$.

b) Reibung (einfache Diskussion)

$$F_i = F_i^{kon} + F_i^{diss} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + F_i^{diss} \quad \text{(siehe Kap. 2.2.3)}$$

$\triangleleft$ Ansatz : $F_i^{diss} = -\beta_i \dot{x}_i$ (Stokes′sche Reibung)

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \quad Q_\mu^{diss} &= \sum_i F_i^{diss} \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu} = -\sum_i \beta_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu} \\ &= -\sum_i \beta_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_\mu} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\mu}\Big(\sum_i \frac{\beta_i}{2}\dot{x}_i^2\Big) \end{aligned}$$

<u>Definition:</u> Rayleigh'sche Dissipationsfunktion

$$R := \sum_i \frac{\beta_i}{2}\dot{x}_i^2 = R(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

$$\begin{aligned} \text{Lg} - \text{Gl.} : \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial T}{\partial q_\mu} = Q_\mu &= -\frac{\partial W}{\partial q_\mu} + Q_\mu^{diss} \\ &= -\frac{\partial W}{\partial q_\mu} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\mu} \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial L}{\partial q_\mu} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\mu} = 0}$$

$$(L = T - W = T - U - V)$$

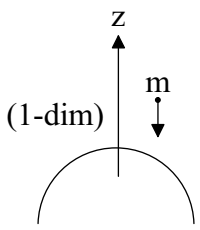
Energiesituation (siehe Kap. 3.1.2)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E &= \frac{d}{dt}(T + U + V) = \mathbf{F}^{diss} \cdot \mathbf{v} && \text{(1 MP)} \\ \text{bzw :} \quad \frac{d}{dt}(T + U + V) &= \sum_{i=1}^{3N} F_i^{diss} \dot{x}_i && \text{(N MPs)} \end{aligned}$$

$$\text{für :} \quad F_i^{diss} = -\beta_i x_i$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\frac{dE}{dt} = -\sum_i \beta_i \cdot x_i^2 = -2R}$$

Beispiel: freier Fall mit Stokes'scher Reibung



$$R = \frac{\beta}{2}\dot{z}^2$$

$$L = \frac{m}{2}\dot{z}^2 - mgz$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\ddot{z} \ , \quad \frac{\partial L}{\partial z} = -mg \ , \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{z}} = \beta\dot{z}$$

$$\overset{\text{Lg-Gl.}}{\Longrightarrow} \quad m\ddot{z} + mg + \beta\dot{z} = 0 \qquad \text{(wie zuvor)}$$

Bemerkungen:

(i) Anspruchsvollere Beispiele (+ Aufgaben): siehe [Kuy], Kap. 6

(ii) (Etwas) allgemeinerer Reibungsansatz: siehe [Nol] II, Kap. 1.2.4 und [Gre] II, Kap. 17

(iii) Hamiltonprinzip für nichtkonservative Systeme: siehe [Gol], Kap. 2.4

4.4 Zusammenfassung der Lagrange-Mechanik

- Ziel: Beschreibung klassischer Bewegungsprobleme für N Massenpunkte mit
  - (konservativen) äußeren + inneren Kräften
  - ggf. (holonomen) Zwangsbedingungen
- Axiom: Hamiltonsches Prinzip

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\ dt = 0$$

$$\text{Lagrange} - \text{Funktion} \quad L = T - U - V$$

- BWGl'en: HP $\Longleftrightarrow$ Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = 0 \ , \quad \mu = 1, ..., 3N - k$$

$$\Longleftrightarrow \text{Newtonsche BWGl} \quad \dot{p}_i = F_i + \sum_{j=1}^{3N} f_{ji} \quad (+ \text{ ggf. Zwangskräfte})$$

- Erhaltungsaussagen

- zyklische Koordinaten + generalisierte Impulse

$$\text{falls} \qquad \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = \text{konst.}$$

- Energie + Hamiltonfunktion

$$H = \sum_\mu p_\mu \dot{q}_\mu - L$$

$\hookrightarrow$ falls $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad H = \text{konst.}$ (Hamiltonfunktion ist Erhaltungsgröße)
$\hookrightarrow$ falls System konservativ, ZBs holonom, ruhende KOS:
$H = E = T + U + V$

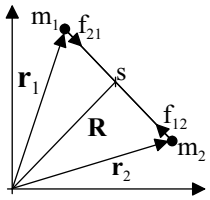
- Erweiterungen
  - Verallgemeinerte Potentiale
  - Reibung, Dissipationsfunktion
- Varianten (die nicht behandelt werden)
  - Lagrange-Gleichungen 1. Art
    $\longrightarrow$ Berechnung von Zwangskräften ("Methode der Lagrange-Multiplikatoren")
    Literatur: [DL], Kap. 5.1 und [Kuy], Kap. 9
  - d'Alembert'sches Prinzip
    $\longrightarrow$ eigenständiges Axiom über "virtuelle Verschiebungen" und "virtuelle Arbeit"
    d'Alembert + Newton $\Longrightarrow$ Lagrange I + II
    Literatur: [DL], Kap. 5.2, [Kuy], Kap. 4 und [Nol] II, Kap. 1.2

Kapitel 5

Anwendungen II

5.1 Das Zweikörper-Zentralkraftproblem

Betrachte die folgende Situation:



1. Abgeschlossenes System ($\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 = 0$)
2. $\mathbf{f}_{21} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) f_{21} = -\mathbf{f}_{12}$
   $= -\nabla_1 V_{12}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \nabla_2 V_{12}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$
3. keine Zwangsbedingungen

Gravitation :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{21} &= -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ V_{12} &= V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \quad \text{Lagrange} - \text{Funktion}: \quad L = T - V = \frac{m_1}{2}\mathbf{v}_1^2 + \frac{m_2}{2}\mathbf{v}_2^2 - V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$$

(analoge Form für andere Wechselwirkungen)

<u>Planetenbewegungen:</u>

Sonnenmasse	$M_\odot$	=	$330.000 m_E$
Merkur (leichtester)	M_{Me}	=	$\frac{1}{20} m_E$
Jupiter (schwerste)	M_{Ju}	=	$320 m_E$

$$\frac{\text{Kraft von Sonne auf Erde}}{\text{Kraft von X auf Erde}} = \frac{F_{\odot E}}{F_{XE}} = \frac{M_\odot}{M_X} \frac{R_{XE}^2}{R_{\odot E}^2}$$

	Venus	Mars	Jupiter	Mond	[Einheiten] (aus [DL])
m_x	0,81	0,11	320	0,012	m_E
R_{XE}^{min}	0,27	0,52	42	0,0026	$R_{\odot E}$
$F_{\odot E}/F_{XE}$	30.000	81.000	18.300	180	

$\Longrightarrow$ Betrachtung des (abgeschlossenen) Zweikörper-Erde-Sonne-Systems ist in 1. Näherung ausreichend (6 FGs)

5.1.1 Reduktion auf ein Einkörperproblem

$$\begin{aligned}
\text{Impulssatz}: \quad \dot{\mathbf{P}} &= \mathbf{F}_{ext} = 0 \qquad \text{(siehe Kap. 2.2)} \\
\text{mit} \quad \mathbf{P} &= M\mathbf{V} = (m_1+m_2)\dot{\mathbf{R}} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 \\
\mathbf{R} &= \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r_2}}{m_1+m_2}
\end{aligned}$$

Positionen bzgl. SP: $\mathbf{r}'_k = \mathbf{r}_k - \mathbf{R} \quad (k = 1, 2)$

$$\begin{aligned}
\hookrightarrow \quad T &= \frac{1}{2}\sum_k m_k \mathbf{v}_k^2 = \frac{1}{2}\sum_k (\mathbf{v}'_k + \mathbf{V})^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_k m_k \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}\sum_k m_k \mathbf{v}'^2_k + \underbrace{\sum_k m_k \mathbf{v}'_k \cdot \mathbf{V}}_{=0}
\end{aligned}$$

$$T = T_{SP} + T' \ ; \quad T_{SP} = \frac{1}{2}M\mathbf{V}^2 \ ; \quad T' = \frac{1}{2}\sum_k m_k \mathbf{v}'^2_k \quad \text{(gilt für } N \geq 2)$$

Für $N = 2$ ist weitere Umschreibung sinnvoll:

$$\begin{aligned}
\triangleleft \quad \mathbf{r}'_1 &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{(m_1+m_2)\mathbf{r}_1 - m_1\mathbf{r}_1 - m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} \\
&= \frac{m_2}{m_1+m_2}\,(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\mathbf{r} \\
\mathbf{r}'_2 &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{(m_1+m_2)\mathbf{r}_2 - m_1\mathbf{r}_1 - m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} \\
&= -\frac{m_1}{m_1+m_2}\,\mathbf{r}
\end{aligned}$$

wobei $\quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2 \qquad$ "Relativvektor"

$$\hookrightarrow \quad \mathbf{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{v} \ ; \quad \mathbf{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{v}$$

$$\begin{aligned}
T' &= \frac{m_1}{2}\mathbf{v}'^2_1 + \frac{m_2}{2}\mathbf{v}'^2_2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}\mu\mathbf{v}^2 \\
&\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \qquad \text{"reduzierte Masse"} \\
\rightarrow \quad T &= \frac{1}{2}M\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}\mu\mathbf{v}^2 \ ; \quad V = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\longrightarrow \quad L &= \frac{M}{2}\Big(\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2\Big)+\frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{r}}^2+\gamma\frac{\mu M}{r} \\
&= L\Big(\dot{\mathbf{R}},\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}\Big) \\
&= L_{SP}(\dot{\mathbf{R}})+L_{rel}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})
\end{aligned}$$

(SP- und Relativkoordinaten sind die geeigneten generalisierten Koordinaten)

$$\begin{array}{ll}
\frac{\partial L}{\partial X}=\frac{\partial L}{\partial Y}=\frac{\partial L}{\partial Z}=0 & \Longrightarrow \quad P_X=\frac{\partial L}{\partial \dot{X}}=M\dot{X}=\text{konst.} \\
(X,Y,Z \quad \text{zyklisch}) & \qquad\quad P_Y=\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}}=M\dot{Y}=\text{konst.} \\
 & \qquad\quad P_Z=\frac{\partial L}{\partial \dot{Z}}=M\dot{Z}=\text{konst.}
\end{array}
\left.\right\} \begin{array}{l}\text{Schwer}- \\ \text{punkt}- \\ \text{satz}\end{array}$$

5.1.2 Relativbewegung

a) Lagrange-Funktion und Lagrange-Gleichung

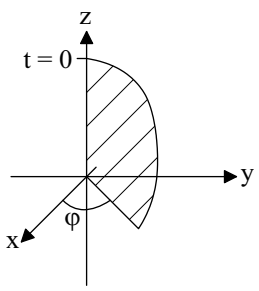
Wähle Kugelkoordinaten:

$$L_{rel}(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta},\dot{\varphi})=\frac{\mu}{2}\Big[\dot{r}^2+(r\dot{\varphi}\sin\theta)^2+(r\dot{\theta})^2\Big]+\gamma\frac{\mu M}{r}$$

Generalisierte Impulse:

$$\begin{aligned}
p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=\mu\dot{r} \\
p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=\mu r^2\dot{\theta} \\
p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=\mu r^2(\sin^2\theta)\dot{\varphi}=\text{konst.} \qquad (\text{da } \varphi \text{ zyklisch})
\end{aligned}$$

Wähle Koordinatensystem, so dass $x(0)=y(0)=0 \quad (\rightarrow \theta(0)=0)$



$$p_\varphi(0)=0=p_\varphi(t) \quad \Longrightarrow \quad \dot{\varphi}=0$$

$\Longrightarrow$ Bewegung in Ebene $\varphi=\text{konst.}$

$$\hookrightarrow \quad \boxed{L_{rel}=\frac{\mu}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\gamma\frac{\mu M}{r}}$$

Nun ist auch θ zyklisch und

$$p_\theta=\mu r^2\dot{\theta} \;=\text{konst.} \quad \hat{=} \quad \text{Flächensatz } \dot{A}=\frac{1}{2}|\mathbf{r}\times\mathbf{v}|=\frac{p_\theta}{2\mu}=\text{konst.}$$

$$\frac{\partial L_{rel}}{\partial \dot{r}} = \mu \dot{r} \ , \quad \frac{\partial L_{rel}}{\partial r} = \mu r \dot{\theta}^2 - \gamma \frac{\mu M}{r}$$

$$\begin{aligned} \overset{\text{Lg-Gl.}}{\Longrightarrow} \quad \mu \ddot{r} &= \mu r \dot{\theta}^2 - \gamma \frac{\mu M}{r^2} \\ \Longleftrightarrow \quad \mu \ddot{r} &= \frac{p_\theta^2}{\mu r^3} - \gamma \frac{\mu M}{r^2} = \frac{p_\theta^2}{\mu r^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \end{aligned}$$

Hamiltonfunktion
$$\begin{aligned} H_{rel} &= p_{rel} \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} - L_{rel} \\ &= .... = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + \dot{r}^2 \dot{\theta}^2) + V(r) \\ &= T' + V = E_{rel} = \text{konst.} \end{aligned}$$
(Energieerhaltung der Relativbewegung)

$$\left(\text{denn } -\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{t}} = \dot{\mathrm{H}} = 0\right)$$

$$\begin{aligned} H &= H_{SP} + H_{rel} \\ &= \frac{M}{2}\Big(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} - \gamma \frac{\mu M}{r} \\ &= E = \text{konst.} \end{aligned}$$

(Gesamtenergie des 2-Körper-Systems ist ebenfalls erhalten)

b) Qualitative Diskussion der Bahntypen

$$\begin{aligned} E_{rel} &\equiv E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} - \gamma \frac{\mu M}{r} \\ &= T_{rad} + U_{zent} + U_{grav} \\ &= \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + U_{eff}(r) = \text{konst.} \end{aligned}$$

$$T_{rad} = E - U_{eff}(r) \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{E \geq U_{eff}(r)}$$

Für das Erde-Sonne-System gilt:

$$\mu = \frac{M_\odot m_E}{M_\odot + m_E} \approx m_E \ ; \quad \mathbf{r} \approx \mathbf{r}_E \ ; \quad M \approx M_\odot \ ; \quad \mathbf{R} \approx \mathbf{r}_\odot$$

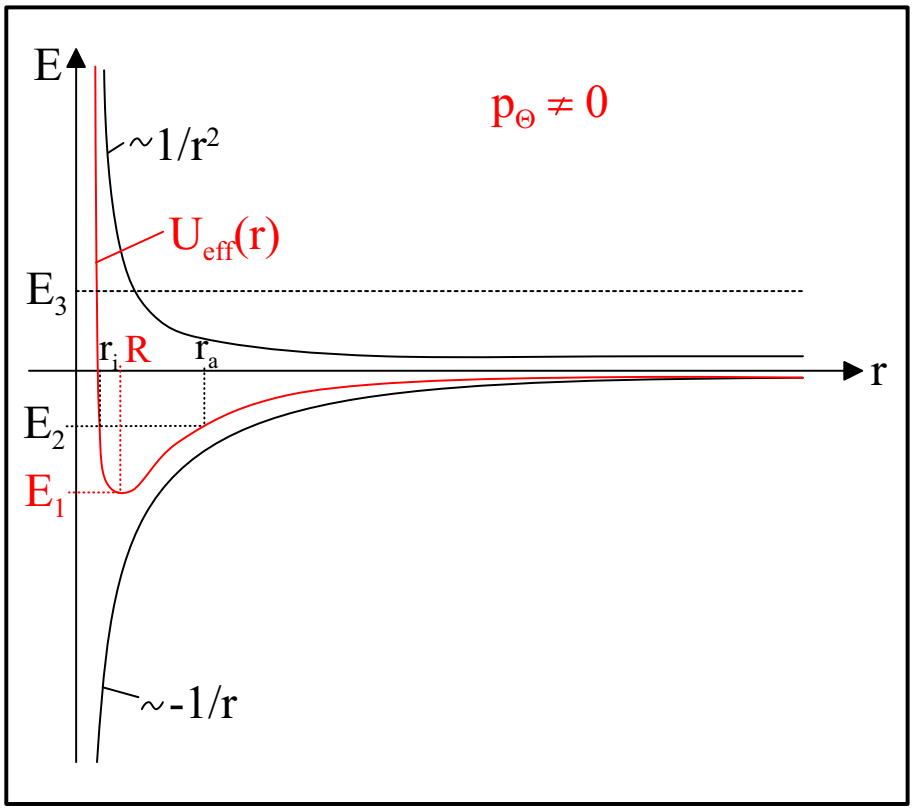


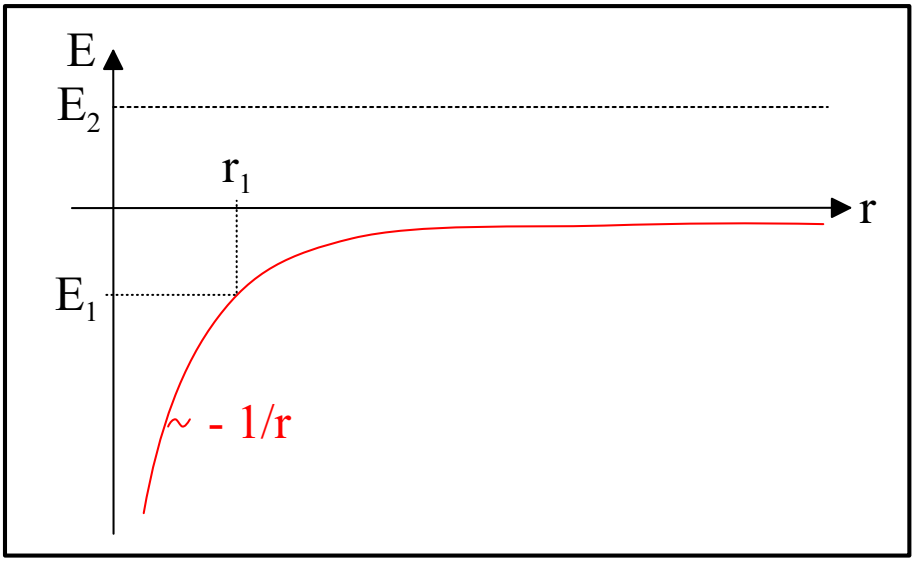
Abbildung 5.1: Das effektive Potential des Kepler-Problems

(i) $E = E_1 = U_{eff}(R) \quad \longrightarrow \quad T_{rad} = 0$
$\longrightarrow$ Kreisbewegung mit Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{\mu R^2} = \text{konst.}$

(ii) $E_1 < E = E_2 < 0$
$\longrightarrow$ finite (gebundene) Bewegung in $[r_i, r_a]$
(r_i, r_a : Umkehrpunkte der Radialbewegung, $T_{rad}(r_i) = T_{rad}(r_a) = 0$)
mit variabler Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{\mu r^2}$

(iii) $E = E_3 \geq 0$
infinite (ungebundene) Bewegung in $[r_3, \infty)$, i.a. ($r \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty$)

$\triangleleft \qquad p_\theta = 0:$



(i) $E = E_1 < 0$ finite Bewegung in $[0, r_1]$ (vgl. freier Fall)

(ii) $E = E_2 > 0$ infinite Bewegung i.a. $r \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

Grob-Klassifikation (nicht als Definition der Himmelskörper zu verstehen):

- Planeten $E < 0\,, \quad p_\theta > 0$
- Kometen $E > 0\,, \quad p_\theta > 0$ oder $E < 0\,, \quad p_\theta > 0$
- Meteoriten (u.a.) $E > 0\,, \quad p_\theta = 0$

Genaueres zu den Himmelskörpern: [Gre] I, Kap. 28

c) Zur Lösung der BWGl.

$$\text{Ausgangspunkt}: \qquad E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\Big(E - V(r) - \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2}\Big)}$$

$$\longrightarrow \quad t - t_0 = \int_{t_0}^{t} dt' = \pm\int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\Big(E - V(r') - \frac{p_\theta^2}{2\mu r'^2}\Big)}}$$

$\longrightarrow$ Umkehrung liefert $r(t)$

$$\text{bestimme } \theta(t) \text{ aus } \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{\mu r^2} \quad \longrightarrow \quad \theta(t) - \theta_0 = \frac{p_\theta}{\mu}\int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{r^2(t')}$$

Bemerkung: direkte Integration nicht ohne weiteres durchführbar, einige Details: [DL], Kap. 4.1.2.6

Alternative Betrachtung: Bahnkurve $r(\theta)$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{p_\theta}{\mu r^2}\,\frac{dr}{d\theta} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\Big(E - V(r) - \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2}\Big)}$$

$$\hookrightarrow \quad \theta(r) - \theta_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' = \pm\frac{p_\theta}{\mu}\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\Big(E - V(r') - \frac{p_\theta^2}{2\mu r'^2}\Big)}}$$

(Umkehrung $\longrightarrow$ $r(\theta)$)

Zur Lösung des Integrals für $V(r) = \alpha r^{n+1}$: [Gol], Kap. 3.5

Für $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, $(\alpha = \gamma\mu M)$ lautet die Lösung:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{k}\Big(1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_0)\Big) \\ k &= \frac{p_\theta^2}{\mu\alpha} \quad (> 0) \\ \varepsilon &= \sqrt{1 + \frac{2Ep_\theta^2}{\mu\alpha^2}} \qquad \text{"numerische Exzentrizität"} \end{aligned}}$$

$\longrightarrow$ brennpunktbezogene Darstellung von Kegelschnitten in Polarkoordinaten (siehe Anhang A.3).

Zusammenfassung der Bahnformen:

$\varepsilon = 0$	$E = -\frac{\mu\alpha^2}{2p_\theta^2} \equiv E_k$ $r = k = \frac{p_\theta^2}{\mu\alpha^2} = \text{konst.}$	Kreis	Planeten (+ Kometen)
$0 < \varepsilon < 1$	$E_k < E < 0$ $r_{max} = \frac{k}{1-\varepsilon}$, $r_{min} = \frac{k}{1+\varepsilon}$ "Aphel" "Perihel"	Ellipse	

$\varepsilon = 1$	$E = 0$	Parabel	Kometen
$\varepsilon > 1$	$E > 0$	Hyperbel	

Literatur: [Gol], Kap. 3.6, [DL], Kap. 4.1.2 und [Lüc], Kap. 3

d) Die Kepler'schen Gesetze (1609, 1619)

I. "Die Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht"

II. "Der Fahrstrahl der Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen" (Flächensatz)

III. "Das Quadrat der Periode ist der dritten Potenz der großen Halbachse proportional" (siehe Übung 10.3)

5.1.3 Zusatzbemerkungen

a) Runge-Lenz-Vektor

$$\mathbf{\Lambda} := \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{l}}{\mu\alpha} - \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Zeige $\quad \frac{d}{dt}\mathbf{\Lambda} = 0 \quad$ für $\quad V(r) = -\frac{\alpha}{r}\,, \quad$ (d.h. für $\quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\alpha}{r^3}\mathbf{r}$)

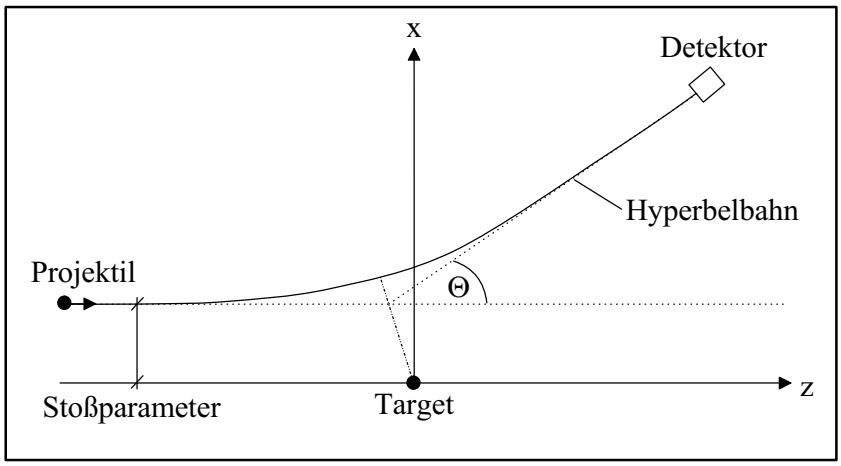
$\longrightarrow$ $\mathbf{\Lambda}$ ist weitere Erhaltungsgröße

<u>Eigenschaften:</u> $\mathbf{\Lambda}$ zeigt zum Perihel; $|\Lambda| = \varepsilon$; (siehe [Lüc], Kap. 3.5.3)

b) Hyperbellösung ($E > 0$) $\longrightarrow$ das klassische Streuproblem

betrachte z.B. aneinander streuende (Coulombwechselwirkende) Ladungen

typisches Streuexperiment:



Observable: differentieller Wirkungsquerschnitt = Maß für die nach θ gestreuten Teilchen

$\longrightarrow$ Ergebnis für Coulombwechselwirkung: "Rutherford-Formel"

Literatur: [Gol], Kap. 3.7 (3.8), [Kuy], Kap. 11.6 (11.7), [Fli], Kap. 18 und [Jel] II, Kap. 13

(Rutherford 1911 $\rightarrow$ Beschuss einer Goldfolie mit α-Teilchen; Rutherford-Formel gilt bemerkenswerterweise in KM und QM)

c) Mitbewegung der Sonne

im SP-System gilt:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{r}_E = \frac{M_\odot}{M_\odot + m_E}\,\mathbf{r} \approx \mathbf{r} & \text{(Erde)} \\ \mathbf{r}_\odot = -\frac{m_E}{M_\odot + m_E}\,\mathbf{r} \approx 0 & \text{(Sonne)} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Ähnliche Ellipsen um} \\ \text{den SP als gemeinsamen} \\ \text{Brennpunkt}\end{array}$$

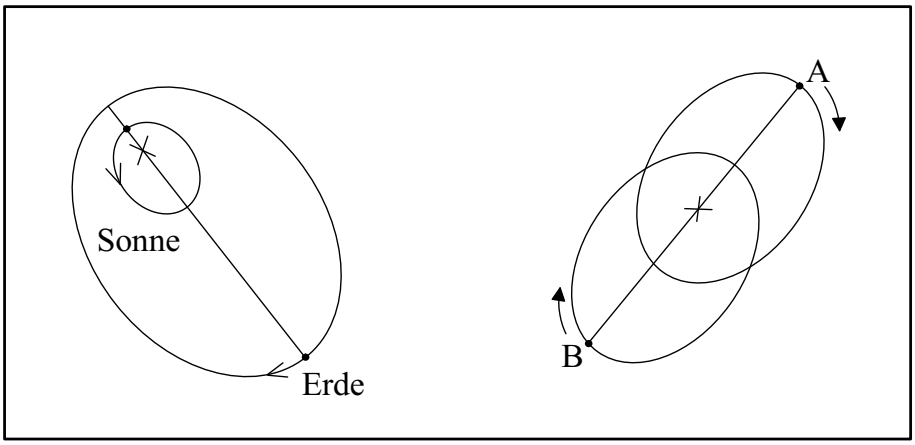


Abbildung 5.2: Asymmetrisches Erde-Sonne- und symmetrisches Doppelsternsystem

d) Reale Planetenbahnen

Abweichung von Ellipsenbahnen wegen

(i) Gravitationskräften der Planeten untereinander

(ii) Relativistische Effekte

(iii) Abplattung + Eigenrotation ($\rightarrow$ "Quadrupolmoment") der Sonne

$\rightarrow$ kleine Störungen (näherungsweise Berechnung mittels "Störungstheorie")

Beispiel: Periheldrehung von Merkur $\approx$ 1 Bogensekunde/Umlauf

$$\text{Effekt (iii)} \ll \text{Effekt (ii)} \approx \tfrac{1}{10}\,\text{Effekt (i)}$$

e) Das deterministische Vielkörperproblem

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\mathbf{v}^2 + \gamma \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \qquad (3N \text{ FGs})$$

$\longrightarrow$ geradlinig gleichförmige Bewegung des SPs:

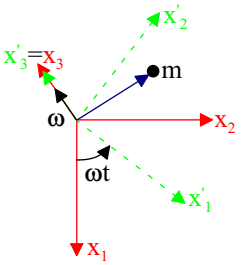
$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \qquad (3 \text{ FGs})$$

1. Schon für $N = 3$ ist das "Relativproblem" (6 FGs) i.a. nicht mehr analytisch lösbar
2. Bereiche chaotisch-deterministischer Bewegung im Sonnensystem existieren

Literatur: [Sch], Kap. 6.6

5.2 Beschleunigte Bezugssysteme

5.2.1 Uniform rotierendes KOS



S : Inertialsystem

S': rotierendes KOS (nicht inertial)

Beispiel (i): Ruhender MP in S $\xrightarrow{\text{1. Axiom}}$ kräftefrei

MP aus Sicht von S': Kreisbahn um x_3-Achse $\xrightarrow{\text{1. Axiom}}$ nicht kräftefrei $\rightarrow$ Scheinkraft

Beispiel (ii): MP im Potential U (keine ZBs)

$$S: \quad L = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i^2 - U(x_1 x_2 x_3)$$

$$\Longrightarrow \quad \text{Lg} - \text{Gl}'\text{en} \equiv \text{Newton II}: \quad m\ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}\ , \quad i = 1,2,3$$

Für die Diskussion des Bewegungsproblems aus Sicht von S' betrachte folgende Kotrafo (passive Drehung):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x}_1' \cos\omega t - \dot{x}_2' \sin\omega t - x_1'\omega \sin\omega t - x_2'\omega \cos\omega t \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_1' \sin\omega t + \dot{x}_2' \cos\omega t + x_1'\omega \cos\omega t - x_2'\omega \sin\omega t \\ \dot{x}_3 &= \dot{x}_3' \end{aligned}$$

$$S': \quad L = \frac{m}{2}\Big\{\dot{x}_1'^2 + \dot{x}_2'^2 + x_3'^2 + 2\omega(x_1'\dot{x}_2' - x_2'\dot{x}_1') + \omega^2(x_1'^2 + x_2'^2)\Big\} - U(x_1'x_2'x_3')$$

$$\text{Lagrange} - \text{Gleichungen}: \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i'} - \frac{\partial L}{\partial x_i'} = 0 \qquad\qquad \text{(forminvariant)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1'} = m\dot{x}_1' - m\omega x_2'\ , \qquad \frac{\partial L}{\partial x_1'} = m\omega\dot{x}_2' + m\omega^2 x_1' - \frac{\partial U}{\partial x_1'}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2'} = m\dot{x}_2' + m\omega x_1' \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2'} = -m\omega\dot{x}_1' + m\omega^2 x_1' - \frac{\partial U}{\partial x_2'}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3'} = m\dot{x}_3' \qquad \frac{\partial L}{\partial x_3'} = -\frac{\partial U}{\partial x_3'}$$

$$\overset{\text{BWGl}}{\hookrightarrow} \quad \boxed{\begin{aligned} m\ddot{x}_1' &= \underbrace{2m\omega\dot{x}_2' + m\omega^2 x_1'}_{\text{Scheinkräfte}} - \frac{\partial U}{\partial x_1'} &&= Q_1 \\ m\ddot{x}_2' &= \underbrace{-2m\omega\dot{x}_1' + m\omega^2 x_2'}_{\text{Scheinkräfte}} - \frac{\partial U}{\partial x_2'} &&= Q_2 \\ m\ddot{x}_3' &= -\frac{\partial U}{\partial x_3'} &&= Q_3 \end{aligned}}$$

$$\text{zeige}: \quad Q_i = \Big(\frac{\partial U^*}{\partial x_i'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial U^*}{\partial \dot{x}_i'}\Big)$$

$$\text{wobei}: \quad U^*(x_1'x_2'x_3') = U(x_1'x_2'x_3') - m\omega(x_1'\dot{x}_2' - x_2'\dot{x}_1') - \frac{m}{2}\omega^2(x_1'^2 + x_2'^2)$$

$$\longrightarrow \quad L = T' - U^*$$

$$T' = \frac{m}{2}(\dot{x}_1'^2 + \dot{x}_2'^2 + \dot{x}_3'^2)$$

5.2.2 Allgemeine Rotation

S : Inertialsystem (Ursprung 0)

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{e}_i$$

S': rotierendes Inertialsystem (Ursprung 0' = 0)

$$\mathbf{r}' = \sum_{i=1}^{3} x_i' \mathbf{e}_i' = \mathbf{r}$$

Transformation der Geschwindigkeiten:

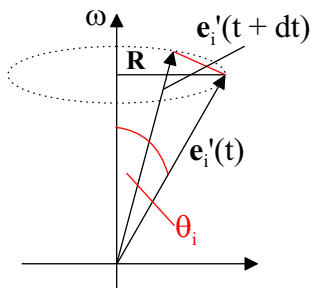
$$\text{Behauptung}: \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}' + (\boldsymbol{\omega}^{(')} \times \mathbf{r}^{(')}) \ , \quad (\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}' \ , \ \mathbf{r} = \mathbf{r}')$$

<u>Beweis:</u>

$$(i) \qquad \dot{\mathbf{e}}_i' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i'$$

$$\text{denn}: \quad |\dot{\mathbf{e}}_i'(t)| = R\omega = \sin\theta_i \omega = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i'|$$

Überprüfe Richtung mit 'Drei-Finger-Regel'



$$\begin{aligned}
(ii) \quad \mathbf{v} &= \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \frac{d}{dt}\sum_i x_i \mathbf{e}_i = \sum_i \dot{x}_i \mathbf{e}_i \\
&= \frac{d}{dt}\mathbf{r}' = \frac{d}{dt}\sum_i x_i' \mathbf{e}_i' = \sum_i \dot{x}_i' \mathbf{e}_i' + \sum_i x_i' \dot{\mathbf{e}}_i' \\
&= \sum_i \dot{x}_i' \mathbf{e}_i' + \omega \times \sum_i x_i' \mathbf{e}_i' = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'
\end{aligned}$$

Bemerkung: Relation gilt für beliebigen Vektor $\mathbf{A}$:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}\Big|_S = \frac{d}{dt}\mathbf{A}\Big|_{S'} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A}$$

$$\rightarrow \text{ symbol. Notation } \quad \frac{d}{dt}\Big|_S = \frac{d}{dt}\Big|_{S'} + \boldsymbol{\omega}\times$$

Umschreibung der Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}\,\mathbf{v}^2 - U(\mathbf{r}) = \frac{m}{2}\Big[\mathbf{v}' + (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')\Big]^2 - U(\mathbf{r}') \\ &= \frac{m}{2}\Big\{\mathbf{v}'^2 + 2\mathbf{v}'(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}') + (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')^2\Big\} - U(\mathbf{r}') \end{aligned}$$

Zutaten für die Auswertung:

- $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_i = \sum_{jk}\varepsilon_{ijk}a_jb_k$

$$\text{mit} \quad \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (ijk) = (123) \quad \text{oder zyklische Permutation} \\ -1 & (ijk) = \text{antizyklische Permutation} \\ 0 & \text{mind. zwei gleich Indizes} \end{cases}$$

"Levi-Civita-Symbol"
(vollständiger, antisymmetrischer Tensor)

- $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$
- $\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a} - \mathbf{a}^2\mathbf{b}$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \quad L &= \frac{m}{2}\left\{\sum_i \dot{x}_i'^2 + 2\sum_i \dot{x}_i'\Big(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'\Big)_i + \sum_i\omega_i^2\sum_j x_j'^2 - \Big(\sum_i\omega_i x_i'\Big)^2\right\} \\ &\quad - U(x_1'x_2'x_3') \\ &= \frac{m}{2}\left\{\sum_i \dot{x}_i'^2 + 2\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}\dot{x}_i'\omega_j x_k' + \sum_i\omega_i^2\sum_j x_j'^2 - \Big(\sum_j\omega_i x_i'\Big)^2\right\} \\ &\quad - U(x_1'x_2'x_3') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l'} &= m\dot{x}_l' + m\sum_{jk}\varepsilon_{ljk}\omega_j x_k' \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l'} &= m\ddot{x}_l' + m\sum_{jk}\varepsilon_{ljk}\dot{\omega}_j x_k' + m\sum_{jk}\varepsilon_{ljk}\omega_j\dot{x}_k' \\ -\frac{\partial L}{\partial x_l'} &= -m\sum_{ij}\varepsilon_{ijl}\dot{x}_i'\omega_j - m\sum_i\omega_i^2 x_l' + m\sum_i\omega_i x_i'\omega_l + \frac{\partial U}{\partial x_l'} \end{aligned}$$

<u>NR :</u>

$$-m\sum_{ij}\varepsilon_{ijl}\dot{x}'_i\omega_j \overset{\varepsilon_{ijl}=-\varepsilon_{lji}}{=} m\sum_{ij}\varepsilon_{lji}\omega_j\dot{x}'_i \overset{i\to k}{=} m\sum_{jk}\varepsilon_{ljk}\omega_j\dot{x}'_k$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Lg-Gl'en:}\quad m\ddot{x}'_l + m\sum_{jk}\varepsilon_{ljk}\dot{\omega}_j x'_k + 2m\sum_{jk}\varepsilon_{ljk}\omega_j\dot{x}'_k + m\sum_i x'_i\omega_i\omega_l \\ -m\sum_i\omega_i^2 x'_l + \frac{\partial U}{\partial x'_l} &= 0\\ \iff\quad m\ddot{x}'_l + m(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}')_l + 2m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}')_l + m(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}')\omega_l \\ -m\boldsymbol{\omega}^2 x'_l + \frac{\partial U}{\partial x'_l} &= 0\end{aligned}$$

$$\iff\quad m\mathbf{a}' = -m(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}') - 2m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}') + m\Big(\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{r}' - (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}')\boldsymbol{\omega}\Big) - \nabla' U$$

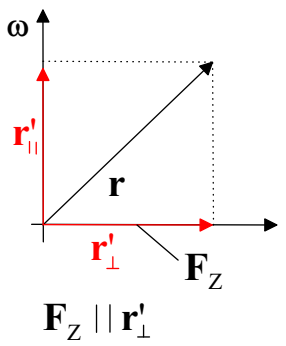
$$\boxed{m\mathbf{a}' = -m(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}') - 2m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}') - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}') - \nabla' U}$$

<u>Scheinkräfte:</u>

(i) $\mathbf{F}_{\dot{\omega}} = -m(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}')$ (nur für $\dot{\boldsymbol{\omega}}\neq 0$)

(ii) $\mathbf{F}_C = -2m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}')$ "Corioliskraft" (nur für $\mathbf{v}\neq 0$), $\mathbf{F}_c \perp \mathbf{v}'$
$\Longrightarrow$ $\mathbf{F}_c$ leistet keine Arbeit

(iii) $\mathbf{F}_Z = -m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')$ Zentrifugalkraft



$\lhd$ Zerlegung:

$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\perp}$

$\hookrightarrow \quad |\omega\times\mathbf{r}'| = \omega r'_{\perp}$

$\hookrightarrow \quad F_Z = m\omega^2 r'_{\perp}$

5.2.3 Allgemeine beschleunigte Bezugssysteme: Rotation und Translation

Transformation:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{R} + \mathbf{r}' \\ \Longleftrightarrow \quad \sum_i x_i(t)\mathbf{e}_i &= \mathbf{R}(t) + \sum_i x_i'(t)\mathbf{e}_i'(t) \end{aligned}$$

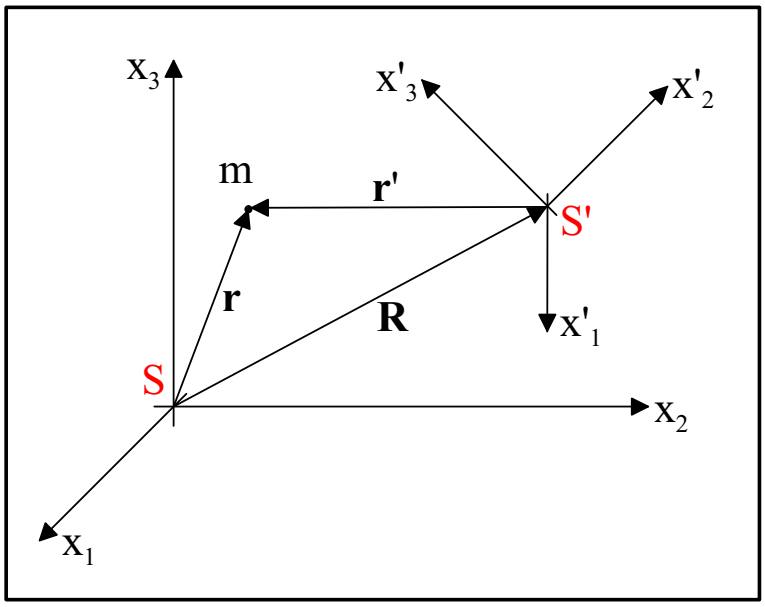


Abbildung 5.3: Rotation und Translation eines Koordinatensystems

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \quad \sum_i \dot{x}_i\mathbf{e}_i &= \dot{\mathbf{R}} + \sum_i \dot{x}_i'\mathbf{e}_i' + \sum_i x_i'\dot{\mathbf{e}}_i' \\ & \dot{\mathbf{R}} + \sum_i \dot{x}_i'\mathbf{e}_i' + \omega \times \sum_i x_i'\mathbf{e}_i' \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{v}' + \omega \times \mathbf{r}'}$$

Einsetzen in $L = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 - U$ führt nach längerer Rechnung auf die BWGl'en:

$$\boxed{\begin{aligned} m\mathbf{a}' &= -\nabla' U - m\ddot{\mathbf{R}}' - m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{R} + \mathbf{r}')) \\ &\quad - 2m\Big(\boldsymbol{\omega} \times (\dot{\mathbf{R}}' + \mathbf{v}')\Big) - m\boldsymbol{\omega} \times \Big(\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} + \mathbf{r}')\Big) \end{aligned}}$$

(wobei $\mathbf{R} = \mathbf{R}' \quad \longrightarrow \quad \dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$)

Kompaktere Form der BWGl:

$$\boxed{m\mathbf{a}' \;=\; -\nabla' U - m\ddot{\mathbf{R}} - m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}') - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')}$$

$$\left(\text{Begründung}: \quad \begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}} &= \frac{d}{dt}\Big|_S \dot{\mathbf{R}} = \frac{d}{dt}\Big|_S \left(\dot{\mathbf{R}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{S'} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\dot{\mathbf{R}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}\right) \\ &= \ddot{\mathbf{R}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \end{aligned} \right.$$

$$\left. \text{beachte} \qquad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\omega}}' \right)$$

Zusätzliche Scheinkraft $\mathbf{F}_T = -m\ddot{\mathbf{R}}$ 'Trägheitskraft'

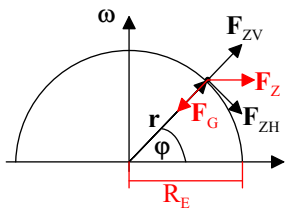
$$\left.\begin{aligned} &\text{Spezialfall}: \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0\,; \quad \ddot{\mathbf{R}} = 0 \implies m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} \\ &\longrightarrow \mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \dot{\mathbf{R}}t \qquad \text{Galilei} - \text{Trafo} \end{aligned}\right\} \implies \text{Forminvarianz von Newton II unter GT}$$

5.2.4 Anwendung: Scheinkräfte auf der rotierenden Erde

$$\text{Eigenrotation}: \qquad \omega = \frac{2\pi}{\text{Tag}} \approx 7,3 \cdot 10^{-5}\frac{1}{s} \quad (\dot{\omega} \approx 0)$$

a) Auf der Erdoberfläche ruhender MP

Kräfte auf MP:



- $\mathbf{F}_G = m\mathbf{g}$
- $\mathbf{F}_Z = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$

$$\begin{aligned} F_Z &= m\omega^2 r_\perp = m\omega^2 R_E \cos\varphi =: ma_Z \\ a_Z &= 0,034 \cos\varphi \frac{m}{s^2} \\ \hookrightarrow \quad \frac{a_Z}{g} &\leq 0,0034 \end{aligned}$$

Vertikalkomponente:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_{eff} &= \mathbf{g} + \mathbf{a}_{ZV} = -(g - \omega^2 R_e \cos^2\varphi)\mathbf{e}_r \\ &= -g_{eff}\mathbf{e}_r\end{aligned}$$

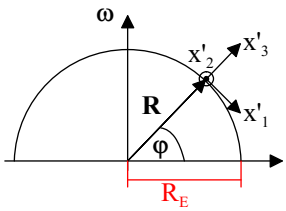
Horizontalkomponente:

$$\begin{aligned}a_{ZH} &= \omega^2 R_E \cos\varphi \sin\varphi \quad \text{wirkt in Richtung Äquator} \\ &\longrightarrow \text{wird aufgefangen von der Anpassung der Massen-} \\ &\quad\ \text{verteilung der Erde (Kugel} \longrightarrow \text{Ellipsoid)}\end{aligned}$$

In praxi:

$$\mathbf{F}_G + \mathbf{F}_Z \approx -mg_{eff}\mathbf{e}_r$$

b) Freier Fall auf rotierender Erde



x_1' : Nord $\longrightarrow$ Süd

x_2' : West $\longrightarrow$ Ost

x_3' : Vertikal nach oben

$$\begin{aligned}\text{BWGl. für} \quad \dot{\omega} &= 0\,, \quad \mathbf{R} = R_E\mathbf{e}_3' \quad \longrightarrow \quad \dot{\mathbf{R}}' = \ddot{\mathbf{R}}' = 0 \\ \hookrightarrow \quad m\mathbf{a}' &= -\nabla' U - 2m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}') - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{R}+\mathbf{r}')) \\ &\approx m\mathbf{g} - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}) - 2m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}') \\ &= m\mathbf{g}_{eff} - 2m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}')\,, \qquad (\text{für } x_3' \ll R_E)\end{aligned}$$

<u>Zur Auswertung:</u>

- $\omega = -\omega\cos\varphi\mathbf{e}_1' + \omega\sin\varphi\mathbf{e}_3'$
- $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}' = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1' & \mathbf{e}_2' & \mathbf{e}_3' \\ -\omega\cos\varphi & 0 & \omega\sin\varphi \\ \dot{x}_1' & \dot{x}_2' & \dot{x}_3' \end{vmatrix} = -\omega\dot{x}_2'\sin\varphi\mathbf{e}_1' - \omega\dot{x}_2'\cos\varphi\mathbf{e}_3' + (\omega\dot{x}_1'\sin\varphi + \omega\dot{x}_3'\cos\varphi)\mathbf{e}_2'$

(gekoppelte) BWGl'en:

$$\boxed{\begin{aligned}\ddot{x}_1' &= 2\omega\dot{x}_2'\sin\varphi \\ \ddot{x}_2' &= -2\omega\dot{x}_1'\sin\varphi - 2\omega\dot{x}_3'\cos\varphi \\ \ddot{x}_3' &= -g_{eff} + 2\omega\dot{x}_2'\cos\varphi\end{aligned}}$$

<u>Näherungslösung:</u> betrachte ABs

$$\begin{aligned} x_1'(0) &= \dot{x}_1'(0) = 0 \\ x_2'(0) &= \dot{x}_2'(0) = 0 \\ x_3'(0) &= h,\ \dot{x}_3'(0) = 0 \\ \longrightarrow & \quad \dot{x}_1',\ \dot{x}_2' \ll \dot{x}_3' \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{genäherte BWGl}} \quad \begin{aligned} \ddot{x}_1' &= 0 \\ \ddot{x}_2' &= -2\omega\dot{x}_3'\cos\varphi \\ \ddot{x}_3' &= -g_{eff} \end{aligned}$$

$$\xRightarrow{\text{Lsg.}} \quad \boxed{\begin{aligned} x_1' &= 0 \\ x_3' &= h - \frac{1}{2}g_{eff}t^2 \end{aligned}}$$

$$\hookrightarrow \quad \ddot{x}_2' = 2\omega g_{eff} t\cos\varphi$$

$$\hookrightarrow \quad \boxed{x_2' = \frac{1}{3}g_{eff}\omega t^3\cos\varphi}$$

<u>Diskussion:</u>

(i) $x_2'(t) \geq 0 \quad (-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}) \quad \hookrightarrow$ Ostabweichung

(ii) Zahlenbeispiel: $h = 100m \longrightarrow$ Fallzeit $T \approx 4,5s$
$\varphi = 45° \longrightarrow x_2'(T) \approx 1,6cm$

(iii) Exakte Lösung der DGls möglich: [Gre] II, Kap. 1 und 2, sowie [DL], Kap. 6.2.3.1

für Zahlenbeispiel (ii): Zusätzliche Südabweichung $2 \cdot 10^{-4}cm$

<u>Abschließende Bemerkungen:</u>

(i) Variante von b): freier Wurf auf rotierender Erde
(Details: [DL], Kap. 6.2.3.2)

(ii) Schein-(Coriolis-)Kräfte sind nur für 'großräumige' Bewegungsformen signifikant
(im Kleinen ist Erde $\approx$ IS)

(iii) Auswirkungen der Corioliskräfte auf das Wetter
([Kuy], Kap. 1.5)

(iv) weitere Anwendung: Foucault'sches Pendel ($\longrightarrow$ Übungsaufgabe 11.3)

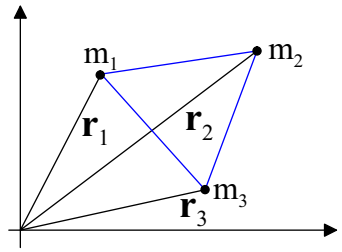
5.3 Bewegung starrer Körper

Ziel: Beschreibung ausgedehnter Objekte

<u>Definition:</u> "Starrer Körper" (SK)
Ein starrer Körper ist eine (kontinuierliche) Verteilung von MPs, deren Abstände untereinander sich nicht mit der Zeit ändern.

5.3.1 Vorbereitungen

$\lhd$ Starrer Körper aus N MPs $\quad (\mathbf{r}_1 ... \mathbf{r}_N)$



(Bsp. $N = 3$: SK wird zusammengehalten von 3 starren Stangen)

<u>Zwangsbedingungen:</u>

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = c_{ij} = \text{konst.} \quad \forall\, ij$$

$$\longrightarrow \quad \binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2} \quad \text{Bedingungen}$$

N	$\binom{N}{2}$	$3N - \binom{N}{2}$
2	1	5
3	3	6
4	6	6
5	10	5
6	15	3
7	21	0
8	28	-4

$\longrightarrow \quad \binom{N}{2}$ ZBs können nicht unabhängig voneinander sein!

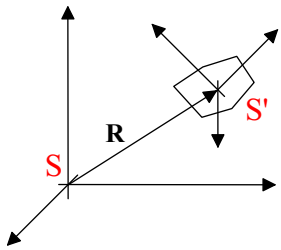
Genauere Überlegung zeigt $\longrightarrow$ für $N > 2$ gibt es

$$3N - 6 \text{ unabhängige ZBs} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{6 \quad \text{FGs}}$$

$$L \;=\; T - U \;=\; \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \mathbf{v}_i^2 - \sum_{i=1}^N U(\mathbf{r}_i)\ , \quad (V = \text{konst., da die inneren Kräfte von den ZBs aufgefangen werden})$$

<u>Theorem von Chasles:</u> Die allg. Bewegung eines starren Körpers setzt sich aus einer Translation und einer Rotation des Gesamtsystems zusammen.

Mögliche Wahl für 3 Koordinaten für die Translation: SP $\mathbf{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \mathbf{r}_i$
Zur Fassung der Rotation:



S : Raumfestes IS

S': Körperfestes (KF) System

(Ursprung in der Regel SP)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_i &= \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i \\
\mathbf{v}_i &= \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{v}'_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i && \text{(siehe Kap.5.2)} \\
&= \dot{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i && (\mathbf{v}'_i = 0 \text{ für } \underline{\text{starren}} \text{ Körper})
\end{aligned}
$$

5.3.2 Kinetische Energie und Trägheitstensor

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\sum_i m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i \Big(\dot{\mathbf{R}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)\Big)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_i m_i \Big\{\dot{\mathbf{R}}^2 + 2\dot{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)^2\Big\} \\
&= \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \dot{\mathbf{R}}\Big(\boldsymbol{\omega} \times \underbrace{\sum_i m_i \mathbf{r}'_i}_{=0 \text{ im SP-System}}\Big) + \frac{1}{2}\sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)^2 \\
&= \underset{\|}{T_{trans}} \qquad\qquad \underset{\|}{+\ T_{rot}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{rot} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \Big(\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}_i^{2'} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}')^2\Big) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \Big\{\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\omega}_j^{2'} \mathbf{r}_i^{2'} - \Big(\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\omega}'_j \mathbf{x}_i^{j'}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{3} \boldsymbol{\omega}'_k \mathbf{x}_i^{k'}\Big)^2\Big\}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \sum_{j,k=1}^{N} \left\{ \mathbf{r}_i^{2'}\delta_{jk} - \mathbf{x}_i^{j'}\mathbf{x}_i^{k'} \right\} \omega_j'\omega_k'$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \Theta_{jk}\omega_j'\omega_k'$$

mit $\quad \Theta_{jk} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left\{ \delta_{jk}\mathbf{r}_i'^2 - \mathbf{x}_i^{j'}\mathbf{x}_i^{k'} \right\}$ 'Trägheitstensor' (Trägheitsmatrix)

Über Tensoren: [Fli], Kap. 21 und [Lüc]

<u>Zusammenfassung:</u>

$$\boxed{T_{rot} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}^T \underline{\underline{\Theta}}\,\boldsymbol{\omega}}$$

5.3.3 Struktur und Eigenschaften des Trägheitstensors

a) Übergang zu kontinuierlicher Massenverteilung

(Vereinbarung: Die Striche an KF-Koordinaten werden ab jetzt weggelassen)

$$m_i = \Delta m_i = \rho(\mathbf{r}_i)\Delta V_i \quad \longrightarrow \quad \rho(\mathbf{r})\; d^3r = dm$$

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i \quad \longrightarrow \quad \int_V \rho(\mathbf{r})\; d^3r$$

$$\boxed{\Theta_{jk} = \int_V \rho(\mathbf{r})\left\{ \delta_{jk}\mathbf{r}^2 - x_j x_k \right\}\; d^3r}$$

Explizit :

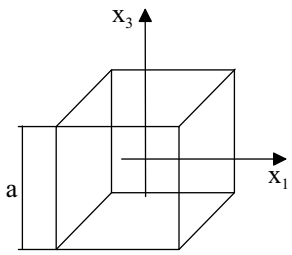
$$\left.\begin{aligned} \Theta_{11} &= \textstyle\int_V (x_2^2 + x_3^2)\rho(\mathbf{r})\; d^3r \\ \Theta_{22} &= \textstyle\int_V (x_1^2 + x_3^2)\rho(\mathbf{r})\; d^3r \\ \Theta_{33} &= \textstyle\int_V (x_1^2 + x_2^2)\rho(\mathbf{r})\; d^3r \end{aligned}\right\} \text{"Trägheitsmomente"}$$

$$\left.\begin{aligned} \Theta_{12} = \Theta_{21} &= -\textstyle\int_V x_1 x_2 \rho(\mathbf{r})\; d^3r \\ \Theta_{13} = \Theta_{31} &= -\textstyle\int_V x_1 x_3 \rho(\mathbf{r})\; d^3r \\ \Theta_{23} = \Theta_{32} &= -\textstyle\int_V x_2 x_3 \rho(\mathbf{r})\; d^3r \end{aligned}\right\} \text{"Deviationsmomente"}$$

<u>Bemerkung:</u> $\underline{\underline{\Theta}}$ ist symmetrisch ($\Theta_{jk} = \Theta_{kj}$)

b) Beispiele

(i) Homogener Würfel (I)

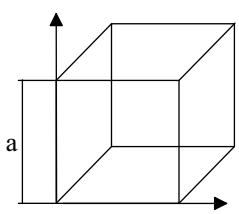


$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \rho_0 = \frac{M}{a^3} & \mathbf{r} \in W \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_{11} = \frac{M}{a^3}\int_W (x_2^2 + x_3^2)\ d^3r &= \frac{M}{a^3}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x_2^2 + x_3^2)\ dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= \frac{M}{a^2}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx_2 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx_3\ (x_2^2 + x_3^2) \\
&= \frac{M}{a^2}\Big(a\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x_2^2\ dx_2 + a\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x_3^2\ dx_3\Big) \\
&= \frac{M}{a}\Big(\frac{x_2^3}{3}\Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} + \frac{x_3^3}{2}\Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\Big) \\
&= \frac{1}{6}\ Ma^2 \ = \ \Theta_{22} \ = \ \Theta_{33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_{12} &= -\frac{M}{a^3}\int_W x_1 x_2\ dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= -\frac{M}{a^3}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x_1\ dx_1 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x_2\ dx_2 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx_3 \\
&= -\frac{M}{4a^2}\ x_1^2\Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x_2^2\Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \\
&= 0 \ = \ \Theta_{13} \ = \ \Theta_{23}
\end{aligned}$$

(ii) Homogener Würfel (II)



$$\begin{aligned}
\Theta_{11} &= \frac{M}{a^3}\int_0^a\int_0^a\int_0^a \left(x_2^2 + x_3^2\right)\ dx_1 dx_2 dx_2 \\
&= \frac{M}{a}\left(\frac{x_2^3}{3}\Big|_0^a + \frac{x_3^3}{2}\Big|_0^a\right) \\
&= \frac{2}{3}\ Ma^2 \ = \ \Theta_{22} \ = \ \Theta_{33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_{12} &= -\frac{M}{a^3}\int_0^a x_1 dx_1 \int_0^a x_2 dx_2 \int_0^a dx_3 \\
&= -\frac{M}{a^2}\left(\frac{1}{2}\, x_1^2\Big|_0^a\right)\left(\frac{1}{2}\, x_2^2\Big|_0^a\right) \\
&= -\frac{Ma^2}{4} \;=\; \Theta_{13} \;=\; \Theta_{23}
\end{aligned}$$

c) Hauptachsentheorem

$$\text{Falls} \quad \Theta_{jk} = \Theta_k \delta_{jk} \quad \longrightarrow \quad T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_k \Theta_k \omega_k^2$$

Existiert für jeden starren Körper und jeder Wahl des Koordinatenursprungs ein KF-System, sodass $\Theta_{jk} = \Theta_k \delta_{jk}$?

$\longrightarrow$ <u>Ja!</u> ($\underline{\underline{\Theta}}$ ist symmetrisch, also diagonalisierbar)

Diagonalisierbarkeit von $\underline{\underline{\Theta}} \Longleftrightarrow \exists$ orthogonale Transformationsmatrix

$$\underline{\underline{D}}^{-1} = \underline{\underline{D}}^T \quad \Longleftrightarrow \quad (\underline{\underline{D}}^{-1})_{kj} = D_{kj}^{-1} = D_{jk}\ ,$$

$$\text{so dass :} \quad \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{\Theta}}\, \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{jk} D_{nj}^T \Theta_{jk} D_{km} = \delta_{mn}\Theta_n$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{\Theta}}\, \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}} \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \sum_k \Theta_{jk} D_{km} \;=\; \sum_k D_{jk}\Theta_k \delta_{km}$$

$$= \; D_{jm}\Theta_m$$

$$= \; \sum_k \delta_{jk} D_{km} \Theta_m$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\sum_k \Big(\Theta_{jk} - \Theta_m \delta_{jk}\Big) D_{km} = 0}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \Theta_{11} - \Theta_m & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} - \Theta_m & \Theta_{22} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} - \Theta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{1m} \\ D_{2m} \\ D_{3m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2, 3$$

Praktisches Diagonalisierungsverfahren:

(i) Bedingung für nichttriviale Lösung des homogenen Gleichungssystems: $\det(\Theta_{jk} - \Theta_m \delta_{jk}) = 0$
$\rightarrow$ Lösung dieser (kubischen) "Säkulargleichung" liefert "Eigenwerte" $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$

(ii) Bestimme $\underline{\underline{D}}$ durch Einsetzen der Eigenwerte in das homogene Gleichungssystem

Bemerkungen:

(i) Θ_k : "Hauptträgheitsmomente", das entsprechende KF-System heißt "Hauptachsensystem" (HAS) ($\Theta_k = \int_V \rho(\mathbf{r})(\mathbf{r}^2 - x_k^2)\, d^3r$ bzgl. HAS)

(ii) Trafo-Matrizen $\underline{\underline{D}}$ charakterisieren Drehungen im $\mathbb{R}^3$

(iii) Hauptachsentheorem: Für jeden starren Körper gibt es (mindestens) einen Satz von Hauptachsen (für einen gegebenen Koordinatenursprung)

(iv) Eigenwerte einer symmetrischen Matrix sind reell

(v) $\underline{\underline{\Theta}}$ ist positiv definit (da $T_{rot} > 0$) $\Longleftrightarrow$ alle Eigenwerte sind positiv (was aufgrund der Formel für Θ_k evident ist)

(vi) Satz von Steiner ($\longrightarrow$ Übung 12.3)

5.3.4 Generalisierte Koordinaten für die Rotation: Euler-Winkel

Behauptung: Beliebige Drehung $\mathbf{r}_{RF} \xrightarrow{\underline{\underline{D}}} \mathbf{r}_{KF}$ ($0_{RF} = 0_{KF}$) kann durch drei aufeinanderfolgende Drehungen um die "Euler-Winkel" (α, β, γ) beschrieben werden:

$$\mathbf{r}_{KF} = \underline{\underline{D}}_\gamma \, \underline{\underline{D}}_\beta \, \underline{\underline{D}}_\alpha \, \mathbf{r}_{RF} = \underline{\underline{D}} \, \mathbf{r}_{RF}$$

Bemerkung: Drehmatrizen bilden nicht-abelsche kontinuierliche Gruppe

Festlegung der Euler-Winkel: (beachte: andere Konventionen sind ebenfalls gebräuchlich)

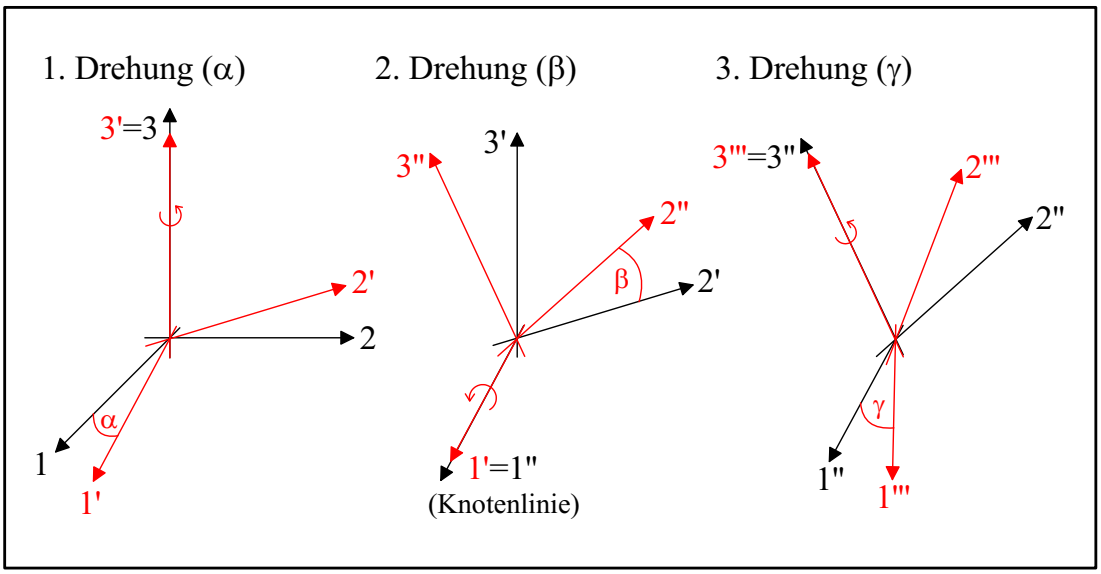


Abbildung 5.4: Zur Definition der Euler-Winkel

Detailrechnungen (siehe Anhang A.4) ergeben die körperfeste Komponentenzerlegung von $\boldsymbol{\omega}$

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \dot\alpha \sin\beta \sin\gamma + \dot\beta \cos\gamma \\
\omega_2 &= \dot\alpha \sin\beta \cos\gamma - \dot\beta \sin\gamma \\
\omega_3 &= \dot\alpha \cos\beta + \dot\gamma
\end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Lagrange-Funktion des starren Körpers:

$$\begin{aligned}
L &= T - U = T_{trans} + T_{rot} - U \\
&= \frac{M}{2}\left(\dot X^2 + \dot Y^2 + \dot Z^2\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_k \Theta_k \omega_k^2}_{\text{(im HAS)}} - U \\
&= \frac{M}{2}\left(\dot X^2 + \dot Y^2 + \dot Z^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big\{\Theta_1\big(\dot\alpha \sin\beta \sin\gamma + \beta \cos\gamma\big)^2 + \Theta_2\big(\dot\alpha \sin\beta \cos\gamma - \dot\beta \sin\gamma\big)^2 \\
&\quad + \Theta_3\big(\dot\alpha \cos\beta + \dot\gamma\big)^2\Big\} - U\big(X, Y, Z, \alpha\beta\gamma\big) \\
&= L\big(XYZ, \alpha\beta\gamma; \dot X \dot Y \dot Z, \dot\alpha\dot\beta\dot\gamma\big)
\end{aligned}$$

Beispiel zur potentiellen Energie: homogenes Schwerefeld

$$U = \sum_i m_i g z_i \Big|_{RF} = g \sum_i m_i z_i = MgZ = U(Z)$$

$$\text{offensichtlich}: \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{\partial U}{\partial \beta} = \frac{\partial U}{\partial \gamma} = 0$$

$\hookrightarrow$ die Rotationsbewegung wird nicht von U beeinflusst ($\rightarrow$ 'freier' Kreisel)

5.3.5 Die BWGl'en des starren Körpers

Translation :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = \frac{\partial L}{\partial X} \iff M\ddot{X} = -\frac{\partial U}{\partial X}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} = \frac{\partial L}{\partial Y} \iff M\ddot{Y} = -\frac{\partial U}{\partial Y}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Z}} = \frac{\partial L}{\partial Z} \iff M\ddot{Z} = -\frac{\partial U}{\partial Z} \qquad (= -Mg \text{ für obiges Bsp.})$$

Rotation:
- nichtlineare, gekoppelte DGl's 2. Ordnung für Euler-Winkel α, β, γ (siehe Anhang A.4)
- 'Kurzform':

$$\boxed{\begin{aligned} \Theta_1\dot{\omega}_1 - \big(\Theta_2 - \Theta_3\big)\omega_2\omega_3 &= M_1 \\ \Theta_2\dot{\omega}_2 - \big(\Theta_3 - \Theta_1\big)\omega_1\omega_3 &= M_2 \\ \Theta_3\dot{\omega}_3 - \big(\Theta_1 - \Theta_2\big)\omega_1\omega_2 &= M_3 \end{aligned}}$$

"Euler-Gleichungen", M_i: KF-Komponenten des Drehmoments

$\rightarrow$ nichtlineare, gekoppelte DGl's 1. Ordnung für die KF-Komponenten von $\boldsymbol{\omega}$

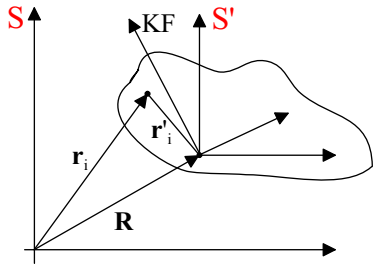
5.3.6 Drehimpuls und Drehimpulssatz

a) Drehimpuls des starren Körpers

Allgemein gilt (siehe Kapitel 2.2.2)

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{RF} &= \mathbf{L}_{SP} + \mathbf{L}' \\ &= M\big(\mathbf{R} \times \mathbf{V}\big) + \sum_i m_i \big(\mathbf{r}_i' \times \mathbf{v}_i'\big) \qquad \big(\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}\big) \end{aligned}$$

Betrachte 3 Koordinatensysteme: S (RF), S' (Ursprung im Schwerpunkt), KF



$$RF \xrightarrow{\text{Translation}} S' \xrightarrow{\text{Rotation}} KF$$

Es gilt für Geschwindigkeitsvektoren in S' die Standard-Trafo-Formel

$$\mathbf{v}_i'\Big|_{S'} = \mathbf{v}_i'\Big|_{KF} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i' \qquad \left(\text{da } \mathbf{v}_i'\Big|_{KF} = 0\right)$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \quad \mathbf{L}' &= \sum_i m_i\big(\mathbf{r}_i' \times \mathbf{v}_i'\big) = \sum_i m_i\big(\mathbf{r}_i' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i')\big) \\ &= \sum_i m_i\Big\{\mathbf{r}_i'^2\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i' \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}_i'\Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Komponentenweise}: \quad L_j' &= \sum_i m_i\Big\{\mathbf{r}'^2_i\omega_j' - \Big(\sum_{k=1}^{3} x'^k_i\omega_k'\Big)x'^j_i\Big\} \\ &= \sum_k \omega_k'\Big\{\sum_i m_i\big(\delta_{kj}\mathbf{r}'^2_i - x'^k_i x'^j_i\big)\Big\} \\ &= \sum_k \Theta_{jk}\omega_k' \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \quad \boxed{\mathbf{L} = \underline{\underline{\Theta}}\,\boldsymbol{\omega}} \qquad \text{Drehimpuls im KF-System}$$

(Vereinbarung: Striche werden ab jetzt wieder weggelassen)

<u>Bemerkungen:</u>

(i) Im HAS gilt: $L_j = \Theta_j\,\omega_j$

(ii) Im allg. $\mathbf{L} \nparallel \boldsymbol{\omega}$ ($\rightarrow$ Ursache der Kompliziertheit der Drehbewegung starrer Körper)

(iii) $T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{jk}\Theta_{jk}\,\omega_k\,\omega_j = \frac{1}{2}\sum_j L_j\,\omega_j = \frac{1}{2}\,\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\omega}$

im HAS gilt $\quad T_{rot} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_j L_j\,\omega_j = \dfrac{1}{2}\sum_j \dfrac{L_j^2}{\Theta_j}$

(iv) HAS:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\big(\Theta_1\omega_1^2 + \Theta_2\omega_2^2 + \Theta_3\omega_3^2\big)$$

$$''\text{Trägheitsellipsoid}'' \text{ mit Hauptachsen} \quad \sim \frac{1}{\sqrt{\Theta_i}}$$

$$\mathbf{L}^2 = \Theta_1^2\omega_1^2 + \Theta_2^2\omega_2^2 + \Theta_3^2\omega_3^2$$

$$''\text{Schwungellipsoid}'' \text{ mit Hauptachsen} \quad \sim \frac{1}{\Theta_i}$$

freier Kreisel: $T_{rot} = \text{konst.}$, $\mathbf{L^2} = \text{konst.}$
$\longrightarrow$ Betrachte Schnitte von Trägheits- und Schwungellipsoid im 'ω-Raum' zur (qualitativen) Diskussion der Bewegung

b) Drehimpulssatz

nach Kapitel 2.2.2 gilt Drehimpulssatz im SP-System S':

$$\dot{\mathbf{L}}\Big|_{S'} = \mathbf{M}\Big|_{S'}$$

Umschreibung der linken Seite ins KF-HAS:

$$\text{Standard} - \text{Trafo} \quad \dot{\mathbf{L}}\Big|_{S'} = \dot{\mathbf{L}}\Big|_{KF} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$$

$$\text{Komponentenweise} \quad \dot{L}_i = \Theta_i\dot{\omega}_i + \big(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}\big)_i = \Theta_i\dot{\omega}_i + \sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\omega_j\Theta_k\omega_k$$

explizit:

$$\begin{aligned}
\dot{L}_1\Big|_{S'} &= \Theta_1\dot{\omega}_1 - \big(\Theta_2 - \Theta_3\big)\omega_2\omega_3 = M_1 \\
\dot{L}_2\Big|_{S'} &= \Theta_2\dot{\omega}_2 - \big(\Theta_3 - \Theta_1\big)\omega_3\omega_1 = M_2 \\
\dot{L}_3\Big|_{S'} &= \Theta_3\dot{\omega}_3 - \big(\Theta_1 - \Theta_2\big)\omega_1\omega_2 = M_3
\end{aligned}$$

Euler-Gleichungen = Drehimpulssatz ausgedrückt durch KF Koordinatenzerlegungen

5.3.7 Drehbewegung starrer Körper: Kreiseltheorie

a) Kräftefreier symmetrischer Kreisel

"Kreisel": In einem Punkt unterstützter (aufgehängter) starrer Körper
Falls Unterstützung im SP $\Longrightarrow$ Kreisel ist frei

$$M_i = \sum_i \big(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i\big) = \sum_i m_i \mathbf{r_i} \times \mathbf{g} = 0$$

$\uparrow$ (homogenes Schwerefeld)

Beispiele:

(i) Kugelkreisel: $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = \Theta$ (z.B. Im SP gelagerter homogener Würfel)

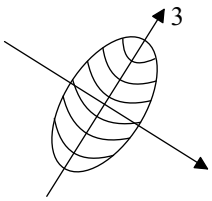
$$\overset{\text{Euler-Gl.}}{\hookrightarrow} \quad \dot{\omega}_i = 0 \quad \longrightarrow \quad \omega_i(t) = \omega_i(0) = \text{konst.}$$

(Drehvektor im KF und im RF System konstant)

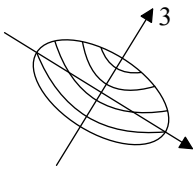
$\longrightarrow$ Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um feste Achse

(ii) Symmetrischer Kreisel: $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta,\ \Theta_3 \neq \Theta \longrightarrow$ 3-Achse: "Figurenachse"

Unterscheide zwei Fälle:



'prolater' Kreisel: $\Theta > \Theta_3$



'oblater' Kreisel: $\Theta < \Theta_3$

$$\text{BWGl'en}: \quad \begin{aligned} \Theta\dot{\omega}_1 + \big(\Theta - \Theta_3\big)\omega_2\omega_3 &= 0 \\ \Theta\dot{\omega}_2 - \big(\Theta_3 - \Theta\big)\omega_3\omega_1 &= 0 \\ \Theta_3\dot{\omega}_3 &= 0 \quad \Longrightarrow \ \omega_3(t) = \omega_3 = \text{konst.} \end{aligned}$$

<u>Definition:</u> $\Omega := \frac{\Theta_3 - \Theta}{\Theta}\,\omega_3 \quad (= \text{konst.})$

$$\hookrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \dot\omega_1 + \Omega\omega_2 = 0 \\ \\ \dot\omega_2 - \Omega\omega_1 = 0 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} (1) \\ \\ (2) \end{array}$$

Entkopplung:

$$(1'): \qquad \ddot\omega_1 + \Omega\dot\omega_2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \dot\omega_2 = -\frac{1}{\Omega}\,\ddot\omega_1$$

$$(2'): \qquad -\frac{1}{\Omega}\,\ddot\omega_1 - \Omega\dot\omega_1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot\omega_1 + \Omega^2\omega_1 = 0$$

$$\hookrightarrow \text{ allg. Lösung}: \quad \omega_1(t) = C_1\cos\Omega t + C_2\sin\Omega t$$

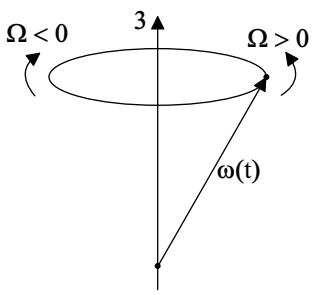
$$(1''): \qquad \frac{d}{dt}\Big(C_1\cos\Omega t + C_2\sin\Omega t\Big) = -\Omega\omega_2$$
$$\Longleftrightarrow \quad \omega_2(t) = C_1\sin\Omega t - C_2\cos\Omega t$$

$\lhd$ ABs: $\omega_1(0) = A\,, \quad \omega_2(0) = 0$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \omega_1(t) & = & A\cos\Omega t \\ \omega_2(t) & = & A\sin\Omega t \\ \omega_3(t) & = & \omega_3 \;=\; \text{konst.} \end{array}} \qquad \text{(Lösung im KF-System)}$$

$$|\boldsymbol{\omega}| = \sqrt{A^2 + \omega_3^2} = \text{konst.}$$

Veranschaulichung im KF-System:

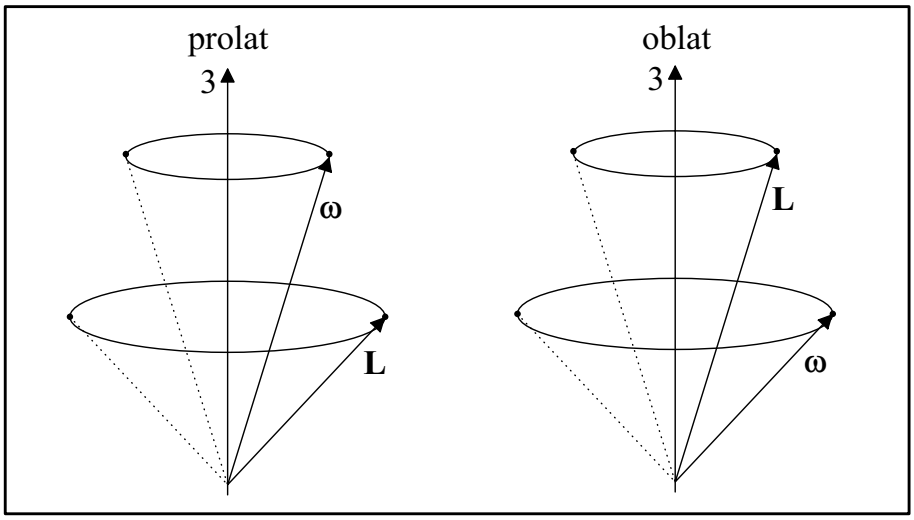


"reguläre Präzession"

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \Theta_1\omega_1 \\ \Theta_2\omega_2 \\ \Theta_3\omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta A\cos\Omega t \\ \Theta A\sin\Omega t \\ \Theta_3\omega_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{prolat}: \qquad \frac{L_3}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}}\,\frac{\Theta_3\omega_3}{\Theta A} \;<\; \frac{\omega_3}{A} = \frac{\omega_3}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$$

$$\text{oblat}: \qquad \frac{\Theta_3\omega_3}{\Theta A} \;>\; \frac{\omega_3}{A}$$



$$\boldsymbol{\omega}, \mathbf{L}, \mathbf{e}_3 \quad \text{liegen stets in Ebene} \quad (\text{zeige dazu } \mathbf{e}_3 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}) = 0)$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\, \mathbf{L}\, \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\big(\Theta A^2 + \Theta_3 \omega_3^2\big) = \text{konst.}$$

<u>Situation aus Sicht eines RF-Systems</u>

$$\underline{\dot{L}}\Big|_{RF} = \underline{\dot{L}}\Big|_{KF} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \underline{L}\Big|_{RF} = \text{konst.}$$

<u>Poinsot'sche Darstellung:</u>

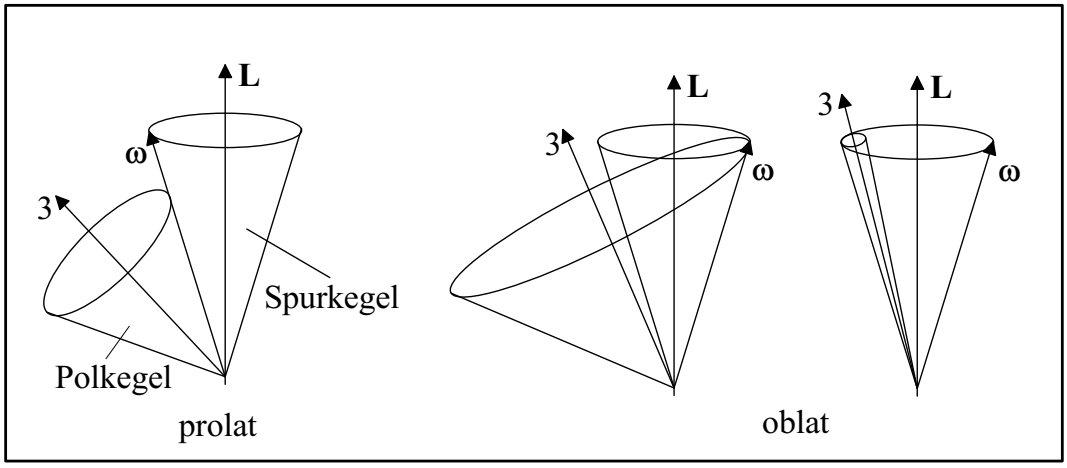
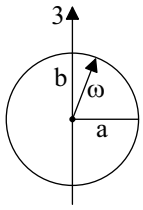


Abbildung 5.5: Polkegel rollt auf dem raumfesten Spurkegel ab

Zusatzbemerkungen:

(i) Quantitative(-re) Diskussion: bestimme $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$
Literatur: [DL], Kap. 6.3.7.4, ([Fli], Kap. 22), [Kuy], Kap. 12.5

(ii) Anwendung: Erdrotation



$a \approx 6377$ km

$b \approx 6356$ km

$$\begin{aligned} \longrightarrow \text{ Präzessionsfrequenz : } \quad \Omega &= \frac{\Theta_3 - \Theta}{\Theta}\,\omega_3 = \frac{\Theta_3 - \Theta}{\Theta} \cdot \frac{2\pi}{\text{Tag}} \\ &\approx \frac{1}{300}\frac{2\pi}{Tag} \\ \Longleftrightarrow \quad T &= \frac{2\pi}{\Omega} \approx 300 \text{ Tage} \approx 10 \text{ Monate} \end{aligned}$$

Gemessene Periode $T_{Chandler} \approx 433$ Tage (14 Monate)
$\longrightarrow$ Erde ist nicht starr

(iii) Stabilitätsanalyse für freien Kreisel:
siehe [Fli], Kap. 2.2 und [Blö], Kap. 7.4.2

b) Schwerer Kreisel ($\mathbf{M} \neq 0$)

$\longrightarrow$ Präzession und Nutation

Literatur: [Fli], Teil V (insb. Kap. 23); [Gre] II, Teil IV (insb. Kap. 13); [Gol], Kap. 4 + 5; [Som], Kap. 4

5.4 Oszillatorprobleme II

Diskussionspunkte:

- Lineare Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden $\hookrightarrow$ gekoppelte Oszillatoren
- Kontinuumsübergang $\longrightarrow$ schwingende Saite

5.4.1 Lagrange-Funktion und -Gleichungen für gekoppelte Oszillatoren

Voraussetzungen:

(i) Evtl. ZBs sind holonom

(ii) Zeitunabhängige Transformation $x_i \longleftrightarrow q_\mu$

(iii) Konservative Kräfte

(iv) System ist in Umgebung eines stabilen Gleichgewichts

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \quad L = T - U - V &= T - W \\ &= T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - W(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

$$H = T + W = E = \text{konst.}$$

- Taylorentwicklung von $W(\mathbf{q})$ um Gleichgewicht $\mathbf{q}^0 = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} W(\mathbf{q}) &\approx \underbrace{W(0)}_{=0} + \sum_\mu \underbrace{\frac{\partial W}{\partial q_\mu}\Big|_0}_{=0} q_\mu + \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} \frac{\partial^2 W}{\partial q_\mu q_\nu}\Big|_0 q_\mu q_\nu + ... \\ &\approx \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} W_{\mu\nu} q_\mu q_\nu \ , \qquad \Big(W_{\mu\nu} := \frac{\partial^2 W}{\partial q_\mu q_\nu}\Big|_0 = W_{\nu\mu}\Big) \end{aligned}$$

- $$T = \sum_i \frac{m_i}{2}\dot{x}_i^2 \quad \text{mit} \quad \dot{x}_i = \sum_\mu \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu}\, \dot{q}_\mu$$

$$\hookrightarrow \quad T = \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} T_{\mu\nu}(\mathbf{q})\dot{q}_\mu \dot{q}_\nu$$

$$\text{mit} \quad T_{\mu\nu}(\mathbf{q}) = \sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu}\frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} = T_{\nu\mu}(\mathbf{q})$$

Taylorentwicklung : $\quad T_{\mu\nu}(\mathbf{q}) \approx T_{\mu\nu}(0) + \sum_\lambda \frac{\partial T_{\mu\sigma}}{\partial q_\lambda}\Big|_0 q_\lambda \approx T_{\mu\nu}(0) \equiv T_{\mu\nu}$

(0. Ordnung für $T_{\mu\nu}(\mathbf{q})$ ist konsistent zur 2.Ordnung für W($\mathbf{q}$))

$$\hookrightarrow \quad L = \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\Big(T_{\mu\nu}\dot{q}_\mu\dot{q}_\nu - W_{\mu\nu}q_\mu q_\nu\Big) = \frac{1}{2}\Big(\dot{\mathbf{q}}^T \underline{\underline{T}}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{q}^T \underline{\underline{W}}\mathbf{q}\Big)$$

Bemerkung: die Matrizen $\underline{\underline{T}}$ und $\underline{\underline{W}}$ sind symmetrisch.

Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\lambda} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda} &= \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} T_{\mu\nu}\Big(\delta_{\mu\lambda}\dot{q}_\nu + \delta_{\nu\lambda}\dot{q}_\mu\Big) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\nu} T_{\lambda\nu}\dot{q}_\nu + \frac{1}{2}\sum_{\mu} T_{\mu\lambda}\dot{q}_\mu \\
&= \sum_{\mu} T_{\lambda\mu}\dot{q}_\mu \\
-\frac{\partial L}{\partial q_\lambda} = \frac{\partial W}{\partial q_\lambda} &= \ldots = \sum_{\mu} W_{\lambda\mu} q_\mu
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \sum_{\mu}\Big(T_{\lambda\mu}\ddot{q}_\mu + W_{\lambda\mu}q_\mu\Big) &= 0\ , \qquad \lambda = 1, \ldots, n \quad \text{für } n \text{ FG's} \\
\underline{\underline{T}}\ddot{\mathbf{q}} + \underline{\underline{W}}\mathbf{q} &= 0
\end{aligned}}$$

explizit:

$$\begin{pmatrix} T_{11} & \ldots & T_{1n} \\ \vdots & & \\ T_{n1} & \ldots & T_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{11} & \ldots & W_{1n} \\ \vdots & & \\ W_{n1} & \ldots & W_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.4.2 Lösung der BWGls

a) Einfache Situation: ungekoppelte Oszillatoren

$$\text{charakterisiert durch} \quad T_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\mu}T_\lambda\ , \quad W_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\mu}W_\lambda$$

$$\overset{\text{BWGl}}{\hookrightarrow} \qquad \ddot{q}_\lambda + \frac{W_\lambda}{T_\lambda}\, q_\lambda = 0\ , \qquad \lambda = 1, \ldots, n$$

$$\text{Lösung :} \qquad q_\lambda(t) = A_\lambda \cos(\omega_\lambda t + \delta_\lambda)\ , \qquad \omega_\lambda = \sqrt{\frac{W_\lambda}{T_\lambda}}$$

b) Diagonale $\underline{\underline{\mathrm{T}}}$-Matrix

$$\text{charakterisiert durch} \quad T_{\lambda\mu} = T_\lambda \delta_{\lambda\mu}$$

$$\overset{\text{BWGl}}{\hookrightarrow} \qquad T_\lambda \ddot{q}_\lambda + \sum_{\mu} W_{\lambda\mu} q_\lambda = 0$$

Trafo (i): $\tilde{q}_\lambda = \sqrt{T_\lambda} q_\lambda$

$$\overset{\text{BWGl}}{\hookrightarrow} \qquad \ddot{\tilde{q}}_\lambda + \sum_\mu D_{\lambda\mu} \tilde{q}_\mu = 0$$

$$\text{mit} \quad D_{\lambda\mu} = \frac{W_{\lambda\mu}}{\sqrt{T_\lambda T_\mu}} \quad \text{"Dynamische Matrix"}$$

$\underline{\underline{D}}$ ist symmetrische, positiv semidefinite Matrix, d.h.

$$D_{\lambda\mu} = D_{\mu\lambda} \ , \quad \boldsymbol{\xi}^T \underline{\underline{D}}\, \boldsymbol{\xi} \geq 0 \quad \forall \ \boldsymbol{\xi} = \{\xi_1 ... \xi_n\} \neq \{0...0\}$$

$\Longrightarrow$ $\underline{\underline{D}}$ ist diagonalisierbar, Eigenwerte sind reell (weil $\underline{\underline{D}}$ symmetrisch) und nicht-negativ (weil $\underline{\underline{D}}$ positiv-semidefinit)

d.h. es existiert orthogonale Trafo-Matrix $\underline{\underline{U}}$ ($\underline{\underline{U}}^{-1} = \underline{\underline{U}}^T$):

$$\underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} \Omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Omega_n^2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\Omega}}^2 \ , \qquad (\Omega_i^2 \geq 0)$$

Dieser Sachverhalt motiviert Trafo (ii) der BWGl:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = \underline{\underline{U}}^T \ \tilde{\mathbf{q}} \quad &\Longleftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{q}} = \underline{\underline{U}}\ \mathbf{Q} \\ \hookrightarrow \qquad \underline{\underline{U}}\ \ddot{\mathbf{Q}} \quad &+ \quad \underline{\underline{D}}\ \underline{\underline{U}}\ \mathbf{Q} = 0 \\ \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{U}}\ \ddot{\mathbf{Q}} \quad &+ \quad \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{D}}\ \underline{\underline{U}}\ \mathbf{Q} = 0 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\ddot{\mathbf{Q}} + \underline{\underline{\Omega}}^2\ \mathbf{Q} = 0}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\ddot{Q}_\lambda + \Omega_\lambda^2 Q_\lambda = 0} \qquad \lambda = 1, ..., n$$

$$\text{Lsg :} \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{"Normalkoordinaten"}}}{Q_\lambda(t)} \ = \ A_\lambda \cos(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{"Eigenfrequenzen"}}}{\Omega_\lambda} t + \delta_\lambda)$$

Rezept:

(i) Diagonalisiere $\underline{\underline{D}}$: Löse Säkulargleichung

$$\det(D_{\mu\nu} - \Omega_1^2 \delta_{\mu\nu}) = 0$$

$\longrightarrow$ (i.d.R. paarweise verschiedene) Wurzeln

$$0 \leq \Omega_1^2 < \Omega_2^2 < ... < \Omega_n^2$$

(ii) Bestimme orthogonale Transformation $\underline{\underline{U}}$ durch Einsetzen der Ω_λ^2 in homogenes Gleichungssystem

$$\sum_\nu (D_{\mu\nu} - \Omega_\lambda^2 \delta_{\mu\nu}) U_{\nu\lambda} = 0$$

(iii) Rücktransformation

$$\begin{aligned} q_\mu(t) &= \frac{1}{\sqrt{T_\mu}}\, \tilde{q}_\mu(t) = \sum_\lambda \frac{U_{\mu\lambda}}{\sqrt{T_\mu}}\, Q_\lambda(t) \\ &= \sum_\lambda \frac{U_{\mu\lambda}}{\sqrt{T_\mu}}\, A_\lambda \cos(\Omega_\lambda t + \delta_\lambda)\ , \qquad \mu = 1, ..., n \end{aligned}$$

Konsistenztest:

- $$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_\mu T_\mu \dot{q}_\mu^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\lambda\lambda'} U_{\mu\lambda} U_{\mu\lambda'} \dot{Q}_\lambda \dot{Q}_{\lambda'} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda\lambda'} \Big(\sum_\mu U^T_{\lambda\mu} U_{\mu\lambda'} \Big) \dot{Q}_\lambda \dot{Q}_{\lambda'} \\ &= \frac{1}{2} \sum_\lambda \dot{Q}_\lambda^2 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} W_{\mu\nu} q_\mu q_\nu \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\lambda\lambda'} \frac{W_{\mu\nu}}{\sqrt{T_\mu T_\nu}} U_{\mu\lambda} U_{\nu\lambda'} Q_\lambda Q_{\lambda'} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda\lambda'} \Big(\sum_{\mu\nu} U^T_{\lambda\mu} D_{\mu\nu} U_{\nu\lambda'} \Big) Q_\lambda Q_{\lambda'} \\ &= \frac{1}{2} \sum_\lambda \Omega_\lambda^2 Q_\lambda^2 \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \quad L = T - W = \frac{1}{2}\sum_\lambda \left(\dot{Q}_\lambda^2 - \Omega_\lambda^2 Q_\lambda^2\right)$$

$$\text{Lg} - \text{Gl'en}: \qquad \ddot{Q}_\lambda - \Omega_\lambda^2 Q_\lambda^2 = 0\ , \qquad \lambda = 1, ..., n$$

Letztlich sind die Normalkoordinaten die geeigneten generalisierten Koordinaten, denn für sie werden die Lagrange-Gleichungen besonders einfach.

c) Allgemeiner Fall

- BWGl : $\displaystyle\sum_\nu \left(T_{\mu\nu}\ddot{q}_\nu + W_{\mu\nu} q_\nu\right) = 0\ , \qquad \mu = 1, ..., n$

- Lsg-Ansatz: (motiviert durch b))

$$\begin{aligned} q_\nu(t) &= \sum_\lambda U_{\nu\lambda} Q_\lambda(t) \qquad \text{mit} \quad Q_\lambda(t) = A_\lambda \cos(\Omega_\lambda t + \delta_\lambda) \\ \hookrightarrow \qquad \ddot{q}_\nu &= \sum_\lambda U_{\nu\lambda} \ddot{Q}_\lambda \\ &= -\sum_\lambda U_{\nu\lambda} \Omega_\lambda^2 Q_\lambda \end{aligned}$$

$$\overset{\text{einsetzen}}{\hookrightarrow} \qquad \sum_{\nu\lambda} \left(W_{\mu\nu} - \Omega_\lambda^2 T_{\mu\nu}\right) U_{\nu\lambda} Q_\lambda = 0$$

da die Q_λ linear unabhängig sind, folgt:

$$\sum_\nu \left(W_{\mu\nu} - \Omega_\lambda^2 T_{\mu\nu}\right) U_{\nu\lambda} = 0 \qquad (*)$$

- Lösbarkeitsbed. : $\det\left(W_{\mu\nu} - \Omega_\lambda^2 T_{\mu\nu}\right) = 0$

$\Longrightarrow$ (i.d.R. paarweise verschiedene) reelle Wurzeln $0 \leq \Omega_1^2 < ... < \Omega_n^2$

- Einsetzen der Ω_λ^2 in $(*)$ liefert Trafo-Matrix $\underline{\underline{U}}$:

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \qquad \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{W}}\, \underline{\underline{U}} &= \underline{\underline{\Omega}}^2 \\ \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{T}}\, \underline{\underline{U}} &= \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ simultane Diagonalisierung von $\underline{\underline{W}}$, $\underline{\underline{T}}$

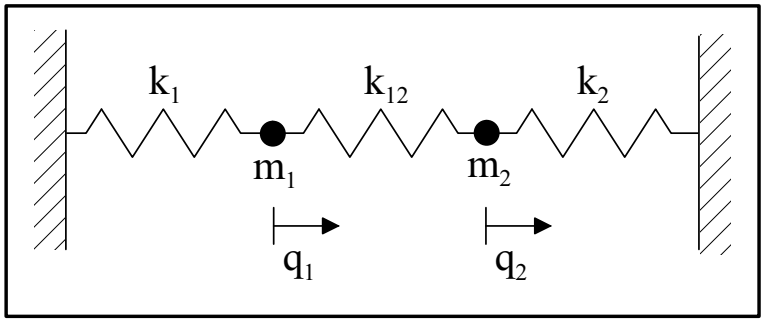
Details: Anhang A.5, sowie [Kuy], Kap. 13.2; [Fli], Kap. 25; [Gol], Kap. 10 (insb. 10.2)

- Konsistenz:

$$\begin{aligned} L &= T - W \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\Big(\dot{q}_\mu T_{\mu\nu}\dot{q}_\nu - q_\mu W_{\mu\nu} q_\nu\Big) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\lambda}\Big(\dot{Q}_\lambda^2 - \Omega_\lambda^2 Q_\lambda\Big) \qquad \text{(wie bei b))} \end{aligned}$$

5.4.3 Anwendungen

a) Zwei gekoppelte Oszillatoren



- $$T = \frac{m_1}{2}\,\dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2}\,\dot{q}_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} T_{\mu\nu}\dot{q}_\mu\dot{q}_\nu$$

  identifiziere $T_{11} = m_1 \equiv T_1$, $T_{22} = m_2 \equiv T_2$, $T_{12} = T_{21} = 0$

- $$U = \frac{k_1}{2}\,q_1^2 + \frac{k_2}{2}\,q_2^2$$

- $$V = \frac{k_{12}}{2}\big(q_1 - q_2\big)^2$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \quad W &= U + V = \frac{1}{2}\Big(k_1 q_1^2 + k_2 q_2^2 + k_{12}(q_1^2 - 2q_1q_2 + q_2^2)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} W_{\mu\nu} q_\mu q_\nu \end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad W_{11} = k_1 + k_{12} \ , \quad W_{12} = W_{21} = -k_{12} \ , \quad W_{22} = k_2 + k_{12}$$

$$\hookrightarrow \quad L = \frac{1}{2}\left\{ (\dot{q}_1, \dot{q}_2) \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} - (q_1, q_2) \begin{pmatrix} k_1 + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_2 + k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\}$$

(Problem von Typ b))

<u>Schritt (1):</u> Diagonalisiere $D_{\mu\nu} = \frac{\omega_{\mu\nu}}{\sqrt{T_\mu T_\nu}}$

$$\longrightarrow \quad \begin{vmatrix} \frac{k_1+k_{12}}{m_1} - \Omega^2 & -\frac{k_{12}}{\sqrt{m_1 m_2}} \\ -\frac{k_{12}}{\sqrt{m_1 m_2}} & \frac{k_2+k_{12}}{m_2} - \Omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \Big(\frac{k_1 + k_{12}}{m_1} - \Omega^2\Big)\Big(\frac{k_2 + k_{12}}{m_2} - \Omega^2\Big) - \frac{k_{12}^2}{m_1 m_2} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \Omega_{1,2}^2 = +\frac{1}{2}\Big(\frac{k_1 + k_{12}}{m_1} + \frac{k_2 + k_{12}}{m_2}\Big) \pm \frac{1}{2}\left[\Big(\frac{k_1 + k_{12}}{m_1} - \frac{k_2 + k_{12}}{m_2}\Big)^2 + \frac{4k_{12}^2}{m_1 m_2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Spezialfall: $m_1 = m_2 \equiv m \ , \quad k_1 = k_2 \equiv k$

$$\hookrightarrow \quad \Omega_{1,2}^2 = \frac{k + k_{12}}{m} \pm \frac{k_{12}}{m}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \ , \qquad \Omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}}}$$

<u>Schritt (2):</u> Bestimme $\underline{\underline{U}}$

$$\begin{pmatrix} \frac{k+k_{12}}{m} - \Omega_\lambda^2 & -\frac{k_{12}}{m} \\ -\frac{k_{12}}{m} & \frac{k+k_{12}}{m} - \Omega_\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1\lambda} \\ U_{2\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \qquad \lambda = 1, 2$$

Einsetzen von $\Omega_1^2, \ \Omega_2^2 : \quad U_{11} = U_{21} \ , \quad U_{12} = -U_{22}$

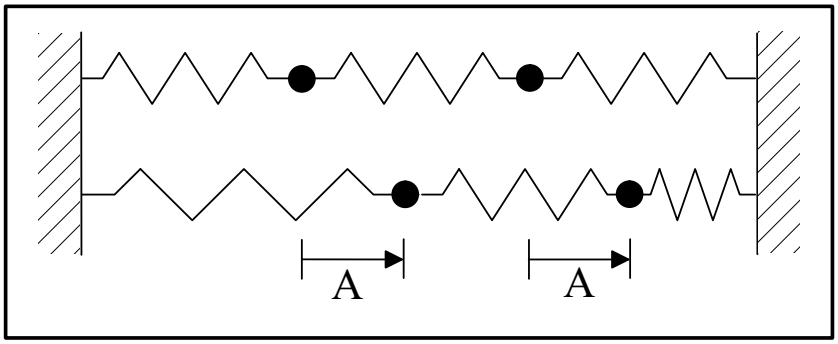
$$\text{Forderung :} \qquad \underline{\underline{U}}^T = \underline{\underline{U}}^{-1} \quad \hookrightarrow \quad \underline{\underline{U}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{U}}^T$$

Schritt (3):

$$\begin{aligned}
\text{Trafo}: \quad q_\mu(t) &= \sum_\lambda \frac{U_{\mu\lambda}}{\sqrt{T_\mu}}\, A_\lambda \cos(\Omega_\lambda t + \delta_\lambda) \\
\text{explizit}: \quad q_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{2m}}\Big\{A_1 \cos(\Omega_1 t + \delta_1) + A_2 \cos(\Omega_2 t + \delta_2)\Big\} \\
q_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{2m}}\Big\{A_1 \cos(\Omega_1 t + \delta_1) - A_2 \cos(\Omega_2 t + \delta_2)\Big\}
\end{aligned}$$

Schritt (4): Anfangsbedingungen

$$\boxed{(1) \qquad q_1(0) = q_2(0) = A\ , \qquad \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0}$$



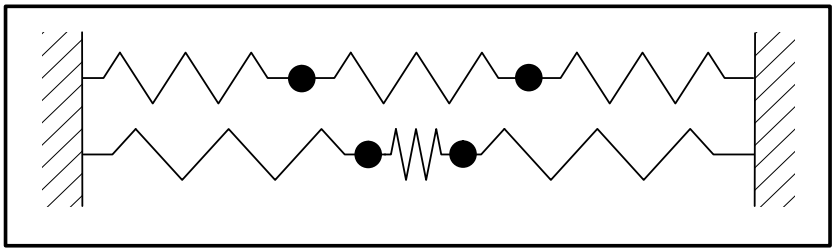
$$\begin{aligned}
q_1(0) = A &= \tfrac{1}{\sqrt{2m}}\Big(A_1 \cos\delta_1 + A_2 \cos\delta_2\Big) && (1)\\
q_2(0) = A &= \tfrac{1}{\sqrt{2m}}\Big(A_1 \cos\delta_1 - A_2 \cos\delta_2\Big) && (2)\\
\dot{q}_1(0) = 0 &= -\tfrac{1}{\sqrt{2m}}\Big(A_1\Omega_1 \sin\delta_1 + A_2\Omega_2 \sin\delta_2\Big) && (3)\\
\dot{q}_2(0) = 0 &= -\tfrac{1}{\sqrt{2m}}\Big(A_1\Omega_1 \sin\delta_1 - A_2\Omega_2 \sin\delta_2\Big) && (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1) = (2) \quad &\hookrightarrow \quad A_2 \cos\delta_2 = 0 \quad \hookrightarrow \quad A_1 \cos\delta_1 = \sqrt{2m}A \\
(3) + (4) \quad &\hookrightarrow \quad A_1 \sin\delta_1 = 0 \\
(3) - (4) \quad &\hookrightarrow \quad A_2 \sin\delta_2 = 0
\end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \quad A_2 = 0\ , \quad \tan\delta_1 = 0\ , \quad \delta_1 = 0\ , \quad A_1 = \sqrt{2m}A$$

$$\hookrightarrow \quad \boxed{q_1(t) = A \cos\Omega_1 t = q_2(t)} \quad \rightarrow \quad \text{symmetrische Normalschwingung}$$

$$\boxed{(2) \qquad q_1(0) = -q_2(0) = A\ , \quad \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) \ = \ 0}$$



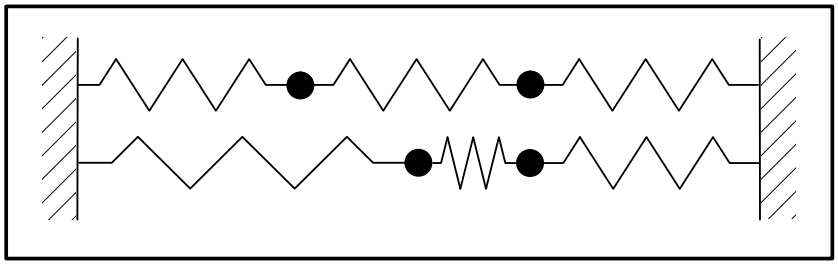
$$\overset{\text{Lsg.}}{\hookrightarrow} \quad \boxed{q_1(t) = A\cos\Omega_2 t = -q_2(t)} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l}\text{antisymmetrische}\\ \text{Normalschwingung}\end{array}$$

$$\text{beachte :} \qquad \Omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k_{12}}{m}} \ > \ \sqrt{\frac{k}{m}} = \Omega_1$$

Dies geht einher mit der Tatsache, dass im antisymmetrischen Fall mehr Energie im System gespeichert ist:

$$\begin{aligned} E_S &= W_S(0) = \frac{1}{2}(A,A)\begin{pmatrix} k+k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k+k_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ A\end{pmatrix} = kA^2 \\ E_A &= W_A(0) = \frac{1}{2}(A,-A)\begin{pmatrix} k+k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k+k_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ -A\end{pmatrix} = (k+2k_{12})\ A^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{(3) \qquad q_1(0) = A\ , \quad q_2(0) = \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0}$$



<u>Lösung:</u>

$$
\begin{aligned}
q_1(t) &= \frac{A}{2}\Big(\cos\Omega_1 t + \cos\Omega_2 t\Big) = A\cos\frac{(\Omega_1+\Omega_2)t}{2}\cos\frac{(\Omega_1-\Omega_2)t}{2} \\
q_2(t) &= \frac{A}{2}\Big(\cos\Omega_1 t - \cos\Omega_2 t\Big) = -A\sin\frac{(\Omega_1+\Omega_2)t}{2}\sin\frac{(\Omega_1-\Omega_2)t}{2}
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$ Schwebungen

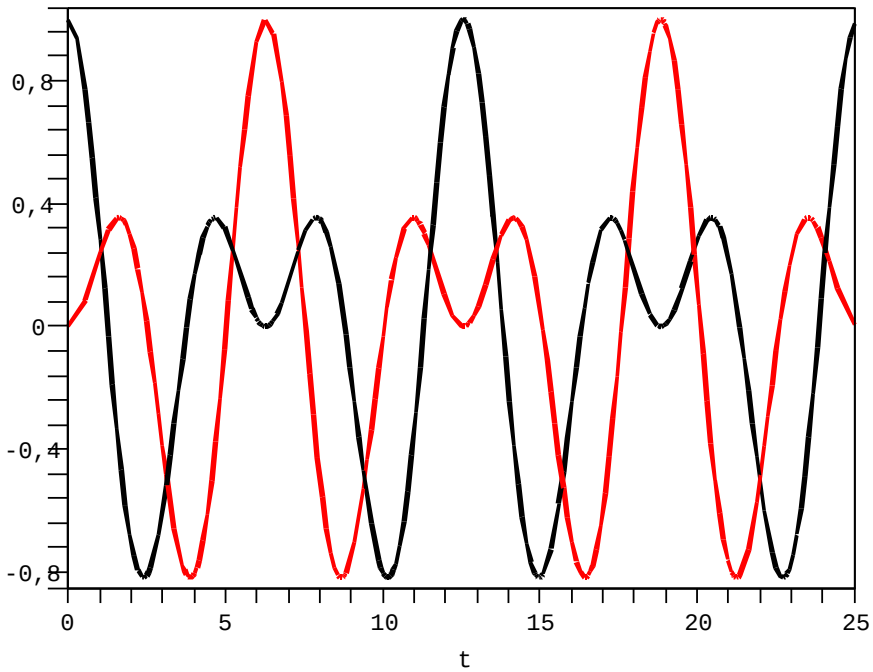


Abbildung 5.6: Schwebung für $\Omega_1 = 1$, $\Omega_2 = 1.5$, $q_1(t)$: schwarz, $q_2(t)$: rot

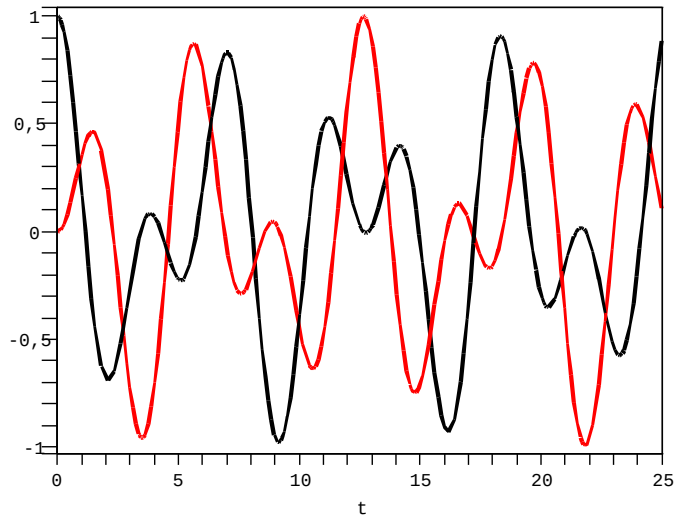


Abbildung 5.7: Schwebung für $\Omega_1 = 1$, $\Omega_2 = \sqrt{3}$, $q_1(t)$: schwarz, $q_2(t)$: rot

Spezialfall: $k_{12} \ll k$ (schwache Kopplung)

$$\left.\begin{aligned} q_1(t) &\approx A\cos\Delta t\cos\Omega_1 t \\ q_2(t) &\approx -A\sin\Delta t\sin\Omega_1 t \end{aligned}\right\} \quad \Delta = \frac{\Omega_1}{2}\frac{k_{12}}{k} \ll \Omega_1$$

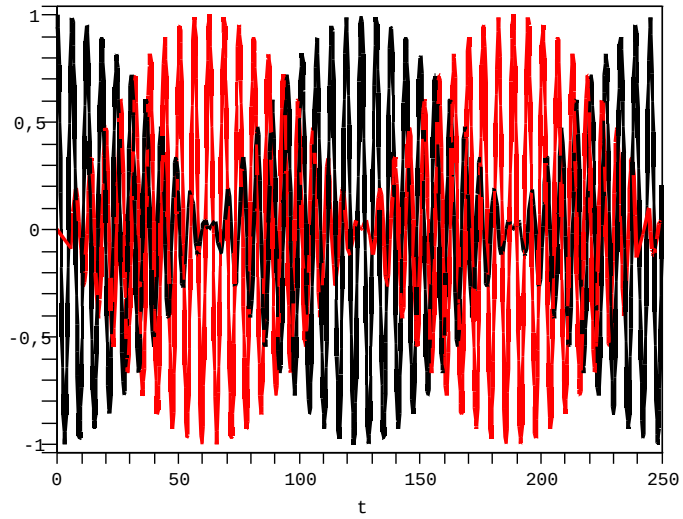
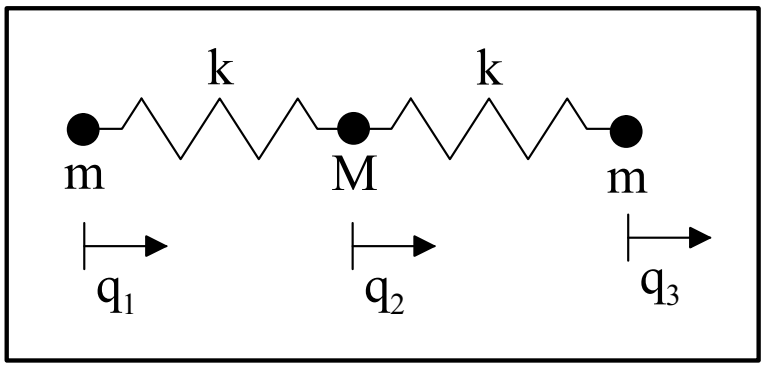


Abbildung 5.8: Schwebung für $\Omega_1 = 1$, $\Omega_2 = 1.05$, $q_1(t)$: schwarz, $q_2(t)$: rot

b) Schwingungen eines dreiatomigen linearen Moleküls



- $$T = \frac{m}{2}\Big(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2\Big) + \frac{M}{2}\,\dot{q}_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} T_{\mu\nu}\dot{q}_\mu\dot{q}_\nu$$

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

- $U = 0$

- $$\begin{aligned} V &= \frac{k}{2}\Big(q_1 - q_2\Big)^2 + \frac{k}{2}\Big(q_3 - q_2\Big)^2 \\ &= \frac{k}{2}\Big(q_1^2 + 2q_2 + q_3^2 - 2q_1q_2 - 2q_2q_3\Big) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} W_{\mu\nu}q_\mu q_\nu \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{W}} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ ebenfalls Problem vom Typ b)

<u>Schritt (1)</u>: Diagonalisiere $D_{\mu\nu} = \frac{W_{\mu\nu}}{\sqrt{T_\mu T_\nu}}$

$$\hookrightarrow \quad \begin{vmatrix} \frac{k}{m} - \Omega^2 & -\frac{k}{\sqrt{mM}} & 0 \\ -\frac{k}{\sqrt{mM}} & \frac{2k}{m} - \Omega^2 & -\frac{k}{\sqrt{mM}} \\ 0 & -\frac{k}{\sqrt{mM}} & \frac{k}{m} - \Omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\hookrightarrow \quad \boxed{\Omega_1 = 0\ , \quad \Omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}\ , \quad \Omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\Big(1 + \frac{2m}{M}\Big)}}$$

Aus $\Omega_1 = 0$ folgt: $\quad \ddot{Q}_1 = 0 \qquad \longrightarrow \qquad Q_1(t) = A_1 t + B_1$

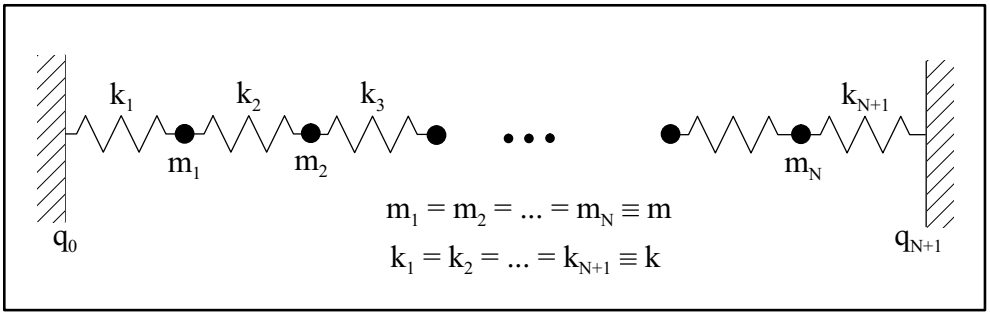
Genauere Diskussion (siehe Anhang A.6) liefert die folgende Veranschaulichung der Normalschwingungen

$$\begin{array}{llll} \Omega_1: & \bullet \longrightarrow & \bullet \longrightarrow & \bullet \longrightarrow \quad \text{Translation} \\ \Omega_2: & \bullet \longrightarrow & \bullet & \longleftarrow \bullet \\ \Omega_3: & \longleftarrow \bullet & \bullet \longrightarrow & \longleftarrow \bullet \end{array}$$

Literatur: [Gol], Kap. 10.4

5.4.4 Übergang zum Kontinuum: schwingende Saite

a) Lineare Oszillatorkette (klassisches Modell für eindimensionales Kristallgitter)



- $$T = \frac{m}{2}\sum_{\mu=1}^{N} \dot{q}_\mu^2$$
- $$U = \frac{k}{2}\Big(q_1^2 + q_N^2\Big)$$
- $$V = \frac{k}{2}\Big\{\big(q_2 - q_1\big)^2 + \big(q_3 - q_2\big)^2 + \ldots + \big(q_N - q_{N-1}\big)^2\Big\}$$

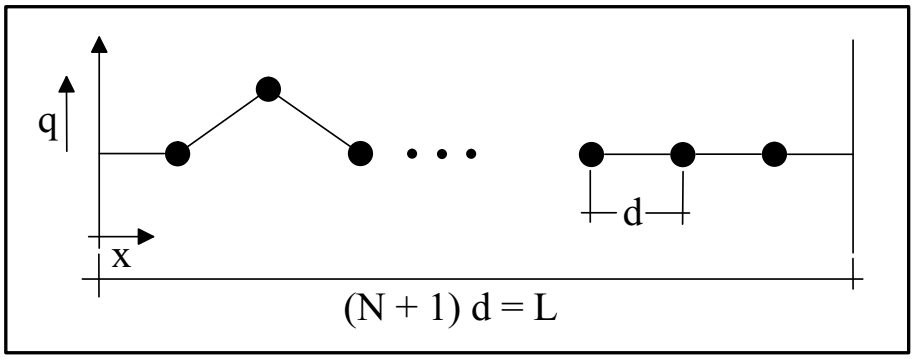
Festlegung: $q_0(t) = q_{N+1}(t) = 0$ "Randbedingungen"

$$\hookrightarrow \quad W = U + V = \frac{k}{2} \sum_{\mu=1}^{N+1} \Big(q_\mu - q_{\mu-1} \Big)^2$$

$$\text{BWGls}: \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\lambda} &= m\ddot{q}_\lambda \\ &= \frac{\partial L}{\partial q_\lambda} = -\frac{\partial W}{\partial q_\lambda} \\ &= k\Big(q_{\lambda+1} - 2q_\lambda + q_{\lambda-1} \Big) , \qquad \lambda = 1, ..., N \end{aligned}$$

Zur Lösung der BWGls: [DL], Kap. 6.1.3.3

b) Transversale Schwingungen



Man findet (für kleine Auslenkungen) dieselben BWGls wie bei a):

$$m\ddot{q}_\lambda - \frac{\tau}{d}\Big(q_{\lambda+1} - 2q_\lambda + q_{\lambda-1} \Big) = 0 , \qquad \lambda = 1, ..., N$$

τ : Fadenspannung

Literatur: [DL], Kap. 6.1.4

c) Kontinuumsübergang

$$N \longrightarrow \infty , \quad d \longrightarrow 0 \qquad : \quad (N+1)\, d = L = \text{konst.}$$

$$m \longrightarrow 0 , \quad d \longrightarrow 0 \qquad : \quad \tfrac{m}{d} = \rho = \text{konst.}$$

$$q_\lambda(t) \longrightarrow q(x,t)$$

$$\overset{\text{BWGl:}}{\hookrightarrow} \qquad \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \frac{\tau d}{m}\left(\frac{q(x+d,t) - 2q(x,t) + q(x-d,t)}{d^2}\right)$$

$$\longrightarrow \frac{\tau}{\rho}\,\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

$$\hookrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = 0}$$

eindimensionale Wellengleichung
(partielle DGl)

$$\text{mit} \qquad v = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \qquad \text{'Phasengeschwindigkeit'}$$

Lösungen: stehende + laufende Wellen

Literatur: [Kuy], Kap. 13.3

Weiterführender Gesichtspunkt: Lagrange- (und Hamilton-) Formalismus für Felder

Literatur: [Blö], Kap. 10; [Fli], Teil VIII, insb. Kap. 30+33; [Gol], Kap. 11

Kapitel 6

Hamilton'sche Mechanik

- Formale Weiterentwicklung der Theorie
- Anknüpfungs- und Ausgangspunkt für Quantenmechanik (+ statistische Mechanik → Thermodynamik)

6.1 Hamilton'sche (Kanonische) Bewegungsgleichungen

<u>Ausgangspunkt:</u> Hamiltonfunktion

$$H = \sum_\mu p_\mu \dot{q}_\mu - L$$

$$L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \ ; \quad H = H(?)$$

Zur Klärung der unabhängigen Variablen betrachte totales Differential

$$\begin{aligned} dH &= d\Big(\sum_\mu p_\mu \dot{q}_\mu - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\Big) \\ &= \sum_\mu \left\{ p_\mu d\dot{q}_\mu + \dot{q}_\mu dp_\mu - \frac{\partial L}{\partial q_\mu}\, dq_\mu - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\, d\dot{q}_\mu \right\} - \frac{\partial L}{\partial t}\, dt \\ \text{benutze Lg} - \text{Gl'en}: \quad &= \sum_\mu \left\{ \dot{q}_\mu dp_\mu - \dot{p}_\mu dq_\mu \right\} - \frac{\partial L}{\partial t}\, dt \\ &= H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \end{aligned}$$

andererseits:

$$dH(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_\mu \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_\mu}\, dq_\mu + \frac{\partial H}{\partial p_\mu}\, dp_\mu \right\} + \frac{\partial H}{\partial t}\, dt$$

$$\text{Vergleich} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial q_\mu}\,, \qquad \dot{q}_\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu}\,, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}\right)}$$

$\longrightarrow$ Hamilton'sche (Kanonische) Gleichungen

<u>Bemerkungen:</u>

(i) Kanonische Gl. $\Longleftrightarrow$ Lg.-Gl. $\Longleftrightarrow$ Ham. Prinzip $\Longleftrightarrow$ Newton II

Beweis der Äquivalenz zu den Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
L &= \sum_\mu p_\mu \dot{q}_\mu - H \\
\hookrightarrow \quad dL &= \sum_\mu \Big(p_\mu d\dot{q}_\mu + \dot{q}_\mu dp_\mu\Big) - dH(\mathbf{q},\mathbf{p},t) \\
&= \sum_\mu \Big(p_\mu d\dot{q}_\mu + \dot{q}_\mu dp_\mu - \frac{\partial H}{\partial q_\mu}\, dq_\mu - \frac{\partial H}{\partial p_\mu}\, dp_\mu\Big) - \frac{\partial H}{\partial t}\, dt \\
\text{benutze kanonische Gl.} \quad &= \sum_\mu \Big(p_\mu d\dot{q}_\mu + \dot{q}_\mu dp_\mu + \dot{p}_\mu dq_\mu - \dot{q}_\mu dp_\mu\Big) - \frac{\partial H}{\partial t}\, dt \\
&= dL(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) \\
&= \sum_\mu \Big(\frac{\partial L}{\partial q_\mu} dq_\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} d\dot{q}_\mu\Big) + \frac{\partial L}{\partial t}\, dt
\end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \quad \left.\begin{aligned} p_\mu &= \tfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \\ \dot{p}_\mu &= \tfrac{\partial L}{\partial q_\mu} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = 0$$

(ii) <u>Beispiel 1:</u> eindimensionaler Oszillator

$$\begin{aligned}
L &= T - U = \frac{m}{2}\Big(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2\Big) \\
H &= p\dot{x} - L = m\dot{x}\dot{x} - \frac{m}{2}\,\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\,\omega^2 x^2 = \frac{m}{2}\Big(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2\Big) = T + U = E
\end{aligned}$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$\hookrightarrow \quad H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2$$

Beachte, dass $\dot{x}$ zugunsten von p eliminiert wurde, um H ordnungsgemäß als Funktion der unabhängigen Variablen x, p auszudrücken

$$\text{BWGl}: \quad \left.\begin{aligned} \dot{p} &= -\tfrac{\partial H}{\partial x} = -m\omega^2 x \\ \dot{x} &= \tfrac{\partial H}{\partial p} = \tfrac{p}{m} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad \begin{aligned} &\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ &\uparrow \\ &\ddot{x} = \tfrac{\dot{p}}{m} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad H = E = \text{konst.}$$

(iii) $$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dH}{dt} \quad \Longleftrightarrow \quad H = \text{konst.} \quad \text{falls} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

(iv) System mit $n := 3N - k$ Freiheitsgraden:

$$\begin{aligned} \text{Lg} - \text{Gl'en} \quad &\hat{=} \quad \text{n} - \text{DGl's 2. Ordnung} \\ &\quad\ \ (2n \text{ ABs } q_\mu(0), \dot{q}_\mu(0),\ \mu = 1, ..., n) \\ \text{Hamilton} - \text{Gl'en} \quad &\hat{=} \quad \text{2n} - \text{DGl's 1. Ordnung} \\ &\quad\ \ (2n \text{ ABs } q_\mu(0), p_\mu(0),\ \mu = 1, ..., n) \end{aligned}$$

(v) Legendre-Transformation: Wechsel der unabhängigen Variablen ohne Informationsverlust

$$\text{Gegeben} \qquad f(x) \quad \overset{\text{Trafo } x \leftrightarrow u}{\longleftrightarrow} \quad g(u)$$

$$\text{Transformation :} \qquad u(x) = \frac{df}{dx} \qquad \hookrightarrow \qquad df = \frac{df}{dx}\, dx = u\, dx$$

$$\begin{aligned} \text{Ansatz :} \quad g &= f - ux \\ \hookrightarrow \quad dg &= d(f - ux) = df - u\, dx - x\, du = -x\, du = \frac{dg}{du}\, du \\ \hookrightarrow \quad g &= g(u) \qquad \longrightarrow x = -\frac{dg}{du} \end{aligned}$$

Legendre-Transformation ist umkehrbar eindeutig, falls $\frac{d^2 f}{dx^2} \neq 0$

$$\boxed{g(u) = f(x(u)) - x(u)\, \frac{df}{dx} \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = g(u(x)) - u(x)\, \frac{dg}{du}}$$

$$\text{Erweiterung :} \qquad f = f(x, y) \quad \overset{\text{Trafo } x \leftrightarrow u}{\longleftrightarrow} \quad g = g(u, y) \quad \text{mit} \quad u(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\lhd \qquad df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy = u\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$$

$$\begin{aligned} \text{Ansatz :} \qquad g &= f - ux \\ \hookrightarrow \quad dg &= u\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy - u\, dx - x\, du \\ &= -x\, du + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy \\ &= \frac{\partial g}{\partial u}\, du + \frac{\partial g}{\partial y}\, dy \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad g = g(u, y)$$

$$\hookrightarrow \qquad x = -\frac{\partial g}{\partial u}\ , \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

einfache Anwendung:

$$L = L(q, \dot{q}) \qquad \overset{\text{Trafo}}{\longleftrightarrow} \qquad H = H(q, p)$$

$$\uparrow$$

$$p(q, \dot{q}) = \tfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ \Leftrightarrow\ \dot{q}(q, p) = \tfrac{\partial H}{\partial p}$$

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ \dot{q} - L \quad \text{ist negative Legendre} - \text{Trafo von L (und umgekehrt)}$$

Dasselbe gilt für n Freiheitsgrade.

(vi) Beispiel 2: Zentralkraftproblem in Polarkoordinaten

$$L = T - U = \frac{m}{2}\big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\big) - U(r) = L\big(r, \dot{r}, \dot{\varphi}\big)$$

$$\text{BWGl}: \quad \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r}\ , & \frac{\partial L}{\partial r} &= mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \\ &= p_r & & \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= mr^2\dot{\varphi}\ , & \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \qquad (\varphi \text{ zyklisch}) \\ &= p_\varphi & & \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial U}{\partial r} &= 0 \\ r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} &= 0 \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} H &= p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} - L(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) \quad \text{mit} \quad \dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad \text{und} \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \\ &= p_r\ \frac{p_r}{m} + p_\varphi\ \frac{p_\varphi}{mr^2} - \frac{m}{2}\left(\left(\frac{p_r}{m}\right)^2 + r^2\ \left(\frac{p_\varphi}{mr^2}\right)^2\right) + U(r) \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + U(r) \\ &= H(r, p_r, p_\varphi) \end{aligned}$$

BWGl:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - \frac{\partial U}{\partial r}\ , & \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \\ \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}\ , & \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \end{aligned}}$$

$\Longleftrightarrow$ Lagrange-Gleichungen

<u>Beachte:</u>

$$\left.\begin{aligned} H &= E = \tfrac{m}{2}\dot{r}^2 + \tfrac{p_\varphi^2}{2mr^2} + U(r) \\ L &= T - U = \tfrac{m}{2}\dot{r}^2 + \tfrac{p_\varphi^2}{2mr^2} - U(r) \end{aligned}\right\}$$

uneinheitliche, problematische Schreibweise :

nur $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ und $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$

führen auf die richtigen BWGls!

(vii) Rezept

- Lege $3N - k$ generalisierte Koordinaten fest und bestimme Transformation
$$x_i = x_i(q_1, ..., q_{3N-k}, t)\ , \qquad (i = 1, ..., 3N)$$
- Bestimme
$$L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - U(\mathbf{q}, t) - V(\mathbf{q}, t)$$
- Berechne generalisierte Impulse
$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = p_\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$
- Löse nach generalisierten Geschwindigkeiten auf
$$p_\mu \quad \longrightarrow \quad \dot{q}_\mu = \dot{q}_\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$
- Setze in L ein
$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t) = \tilde{L}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$
- Berechne
$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_\mu p_\mu \dot{q}_\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - \tilde{L}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$
falls $H = E$:
$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t) + U(\mathbf{q}, t) + V(\mathbf{q}, t)$$

– Bilde $\big(2(3N-k)\big)$ Hamilton-Gleichungen

(viii) "<u>Phasenraum</u>": wird aufgespannt durch

$$''\text{Phasen}(-\text{punkte})'' : \quad \mathbf{\Pi} = (q_1 ... q_{3N-k}, p_1 ... p_{3N-k})$$

$\longrightarrow$ Phasentrajektorie $\mathbf{\Pi}(t)$ charakterisiert Bewegung des Systems

Kenntnis des Phasenpunktes für <u>einen</u> Zeitpunkt t_0 genügt zur Berechnung von $\mathbf{\Pi}(t)$

$$\mathbf{\Pi}(t_0) = \mathbf{\Pi}_0 \quad \overset{\text{Hamilton}-\text{Gl}'\text{en}}{\longrightarrow} \quad \mathbf{\Pi}(t)$$

Zustand des mechanischen Systems $\Longleftrightarrow$ Phasenpunkt $\mathbf{\Pi}$

$\longrightarrow$ alle Observablen sind Funktionen der Phase : $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = f(\mathbf{\Pi}, t)$

Literatur: [Jel] II, Kap. 15.3.1, 15.3.2

6.2 Poisson-Klammern

6.2.1 Definition und fundamentale Poisson-Klammern

$\lhd$
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &= \sum_\mu \Big(\frac{\partial f}{\partial q_\mu} \dot{q}_\mu + \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \dot{p}_\mu \Big) + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \sum_\mu \Big(\frac{\partial f}{\partial q_\mu} \frac{\partial H}{\partial p_\mu} - \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \frac{\partial H}{\partial q_\mu} \Big) + \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

Definition: Seien f, g skalare Observablen

$$\Big\{ f, g \Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} := \sum_\mu \Big(\frac{\partial f}{\partial q_\mu} \frac{\partial g}{\partial p_\mu} - \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \frac{\partial g}{\partial q_\mu} \Big)$$

Poisson-Klammer von f und g

$$\hookrightarrow \quad \boxed{\frac{df}{dt} = \Big\{ f, H \Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} + \frac{\partial f}{\partial t}}$$

Spezialfälle:

(i) $f = q_\mu$

$$\hookrightarrow \boxed{\dot{q}_\mu = \Big\{q_\mu, H\Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = \frac{\partial H}{\partial p_\mu}}$$

(ii) $f = p_\mu$

$$\hookrightarrow \boxed{\dot{p}_\mu = \Big\{p_\mu, H\Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial q_\mu}}$$

<u>Zusammenfassung :</u>

$$\dot{\mathbf{\Pi}} = \Big\{\mathbf{\Pi}, H\Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$$

Fundamentale Poisson-Klammern:

$$\begin{aligned} \Big\{q_\mu, q_\nu\Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} &= \Big\{p_\mu, p_\nu\Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = 0 \\ \Big\{q_\mu, p_\nu\Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} &= \delta_{\mu\nu} \end{aligned}$$

<u>Beweis:</u>

$$\begin{aligned} \Big\{q_\mu, p_\nu\Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} &= \sum_\lambda \Big(\frac{\partial q_\mu}{\partial q_\lambda}\frac{\partial p_\nu}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial q_\mu}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p_\nu}{\partial q_\lambda}\Big) \\ &= \sum_\lambda \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\lambda} \;=\; \delta_{\mu\nu} \end{aligned}$$

6.2.2 Algebraische Eigenschaften der Poisson-Klammer

- Antisymmetrie (oder Antikommutativität)

$$\begin{aligned} \Big\{f, g\Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} &= -\Big\{g, f\Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \\ \text{insbesondere :} \quad \Big\{f, f\Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} &= 0 \end{aligned}$$

- Linearität

$$\Big\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = c_1\Big\{f_1, g\Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} + c_2\Big\{f_2, g\Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$$

- Nullelement

$$\Big\{c, f\Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = 0 \quad (\text{mit } c = \text{ konst.})$$

- Produktregel

$$\Big\{f, gh\Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = g\Big\{f, h\Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} + h\Big\{f, g\Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$$

- Jacobi-Identität

$$\Big\{f, \Big\{g, h\Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} + \Big\{g, \Big\{h, f\Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} + \Big\{h, \Big\{f, g\Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\Big\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = 0$$

Die Eigenschaften beweist man unmittelbar durch Einsetzen der Definition. Eleganterer Nachweis der Jacobi-Identität: [Nol] II, Kap. 2.4.3

6.2.3 Wichtigkeit der Poisson-Klammer

Beispiel: Eindimensionaler Oszillator

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\,\omega^2 x^2$$

$$\begin{aligned}
\text{BWGl}: \qquad \dot{x} &= \Big\{x, H\Big\}_{x,p} = \Big\{x, \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\,\omega^2 x^2\Big\}_{x,p} \\
&= \frac{1}{2m}\Big\{x, p^2\Big\}_{x,p} + \frac{m}{2}\,\omega^2\Big\{x, x^2\Big\}_{x,p} \\
&= \frac{p}{m}\Big\{x, p\Big\}_{x,p} + m\omega^2\Big\{x, x\Big\}_{x,p} \\
&= \frac{p}{m} \\
\dot{p} &= \Big\{p, H\Big\}_{x,p} = \frac{1}{2m}\Big\{p, p^2\Big\}_{x,p} + \frac{m}{2}\,\omega^2\Big\{p, x^2\Big\}_{x,p} \\
&= m\omega^2 x\Big\{p, x\Big\}_{x,p} \\
&= -m\omega^2 x
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Die bekannte BWGl wurde gewonnen, ohne die Definition der Poisson-Klammer zu verwenden. Lediglich die algebraischen Eigenschaften und die fundamentalen Poisson-Klammern wurden benutzt.

Das führt auf die folgende Idee:

- Betrachte andere Objekte als Grundgrößen, z.B. lineare Operatoren
- Definiere für sie Klammersymbole durch die abstrakten Eigenschaften der Poisson-Klammern
- Fordere Gültigkeit der BWGl und der fundamentalen Poisson-Klammern

$$\overset{\text{cum grano salis}}{\Longrightarrow} \text{ Quantenmechanik}$$

$\hat{=}$ andere Realisierung derselben mathematischen Struktur

KM: Poisson-Klammern $\quad\hat{=}\quad$ QM: "Kommutatoren"

Literatur: [Nol] II, Kap. 2.4.5

6.3 Erweiterungen

(Literaturstudium)

6.3.1 Phasenraum und Satz von Liouville

Phasenraumportraits: [DL], Kap. 5.4.3

Statistische Mechanik + Satz von Liouville: [Kuy], Kap. 20; [Blö], Kap. 8.3 - 8.5

6.3.2 Kanonische Transformationen

$\lhd$ "Phasentransformationen"

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= Q_\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \qquad \alpha = 1, ..., n \\ P_\alpha &= P_\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \qquad \alpha = 1, ..., n \end{aligned}$$

Hamilton-Gleichungen i.a. nicht forminvariant!

Man muss gewisse Bedingungen an die Phasentransformationen knüpfen, um Forminvarianz der Hamilton-Gleichungen sicherzustellen. Die entsprechend eingeschränkten Transformationen nennt man kanonische Transformationen. Man findet: eine Transformation ist genau dann kanonisch, wenn die fundamentalen Poisson-Klammern gelten:

$$\begin{aligned} \Big\{Q_\alpha, Q_\beta\Big\}_{q,p} &= \Big\{P_\alpha, P_\beta\Big\}_{q,p} = 0 \\ \Big\{Q_\alpha, P_\beta\Big\}_{q,p} &= \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Literatur: [Kuy], Kap. 18 + 19; [Jel] II, Kap. 15.4; [Nol] II, Kap. 2.5

6.3.3 Hamilton-Jacobi-Theorie

$\Longrightarrow$ Übergang zur Quanten-(Wellen-)Mechanik

Literatur: [Kuy], Kap. 21 + 22; [Nol] II, Kap. 3; [Gol], Kap. 9

Anhang A

Ergänzungen

A.1 Heuristische Einführung der δ-Funktion

(Dirac, 1920er Jahre)

<u>Definition:</u>

(i) $\delta(x) = 0 \ , \quad x \neq 0$

(ii) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\ dx = f(0)$$

(wobei f eine beliebige Funktion ist)

Einige Folgerungen und Eigenschaften (ohne Beweis):

(i) $\delta(x) \xrightarrow{x \to 0} \infty$

(ii) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\ dx = 1$$ (folgt unmittelbar aus Def. (ii) für $f(x) = 1$)

(iii) Faltungssatz : $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\ dx = f(a)$$

(iv) $n-$te Ableitung :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(n)}(x-a)\ dx = (-1)^n f^{(n)}(x-a)$$

(v) Skalierungseigenschaft :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(ax)\ dx = \frac{1}{|a|} f(0)$$

abgekürzte Notation : $\delta(ax) = \dfrac{1}{|a|}\delta(x)$

(vi) Symmetrie :

$$\delta(x) = \delta(-x)$$

(vii) $$\theta'(x) = \delta(x)$$

wobei $$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Heaviside′sche Stufenfunktion

(viii) Fourierintegral :

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \, dx$$

<u>Bemerkungen:</u>

(i) Man kann die δ-Funktion als Grenzfunktion bestimmter Folgen auffassen, z.B.

<u>Definition :</u> $$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & -\frac{\epsilon}{2} \leq x \leq \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(x) \, dx \;=\; \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{1}{\epsilon} \, dx \;=\; 1$$

$$\hookrightarrow \quad \delta(x) \;=\; \lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(x)$$

(ii) Die rigorose mathematische Diskussion beruht auf der sogenannten Distributionstheorie (eingeführt von L. Schwartz, 1950)

A.2 Eigenschaften von Fourier-Transformations-Paaren

FT-Paar $\quad F(t) \longleftrightarrow \tilde{F}(\omega) \quad$ (siehe Kap. 3.2.3 c))

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \\ \tilde{F}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \end{aligned}$$

(i) Symmetrie

$$\Longrightarrow \qquad \tilde{F}(t) \longleftrightarrow 2\pi F(-\omega)$$

(ii) Skalierungseigenschaft

$$\Longrightarrow \qquad F(bt) \longleftrightarrow \frac{1}{|b|}\tilde{F}\big(\frac{\omega}{b}\big)\ , \quad \forall\ b\ \in\ \mathbb{R}$$

(iii) Zeit-Verschiebungs Eigenschaft

$$\Longrightarrow \qquad F(t-t_0) \longleftrightarrow \tilde{F}(\omega)\ e^{-i\omega t_0}$$

(iv) Frequenzverschiebungs-Eigenschaft

$$\Longrightarrow \qquad F(t)\ e^{i\omega t_0} \longleftrightarrow \tilde{F}(\omega-\omega_0)$$

(v) Zeitableitung

$$\Longrightarrow \qquad \frac{d^{(n)}}{dt^{(n)}}\ F(t) \longleftrightarrow (i\omega)^n \tilde{F}(\omega)$$

(vi) Zeitintegration

$$\Longrightarrow \qquad \int_{-\infty}^{t} F(t')\ dt' \longleftrightarrow \frac{1}{i\omega}\tilde{F}(\omega) + \pi\tilde{F}(0)\delta(\omega)$$

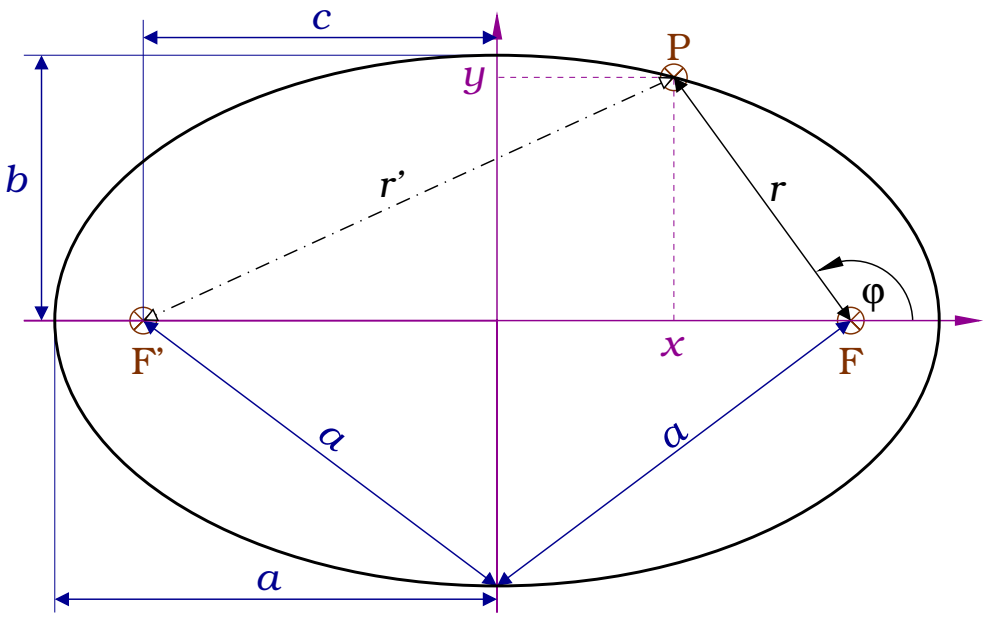
(vii) Linearität

$$\begin{aligned} \text{Falls} \qquad & F_1(t) \longleftrightarrow \tilde{F}_1(\omega) \quad \text{und} \quad F_2(t) \longleftrightarrow \tilde{F}_2(\omega) \\ \Longrightarrow \qquad & aF_1(t) + bF_2(t) \longleftrightarrow a\tilde{F}_1(\omega) + b\tilde{F}_2(\omega) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\ a, b\ \in\ \mathbb{C} \end{aligned}$$

A.3 Kegelschnitte

- Ellipse:

  Eine Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei Brennpunkten F und F' der Entfernung $2c$ den gleichen Abstand $r + r' = 2a$ haben.



Es gilt:

$$a^2 = c^2 + b^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \varepsilon a \qquad 0 < \varepsilon < 1$$

Bahn $r(\varphi)$ in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
2a &= r + r' \\
2a &= r + \sqrt{r^2 + (2c)^2 + 2(2c)r\,\cos\varphi} \\
\Leftrightarrow (2a - r)^2 &= r^2 + 4c^2 + 4cr\,\cos\varphi \\
\Leftrightarrow 4a^2 - 4ar &= 4c^2 + 4cr\,\cos\varphi \\
\Leftrightarrow a^2 - c^2 &= (a + c\,\cos\varphi)r \\
\Leftrightarrow r &= \frac{a^2 - \varepsilon^2 a^2}{a + \varepsilon a\,\cos\varphi} \\
r &= a\frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon\,\cos\varphi} \\
r &= \frac{p}{1 + \varepsilon\,\cos\varphi} \qquad \text{mit } p = a(1 - \varepsilon^2)
\end{aligned}$$

Bahn $r(x, y)$ in kartesischen Koordinaten:

$$r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad r' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

damit kann man aus

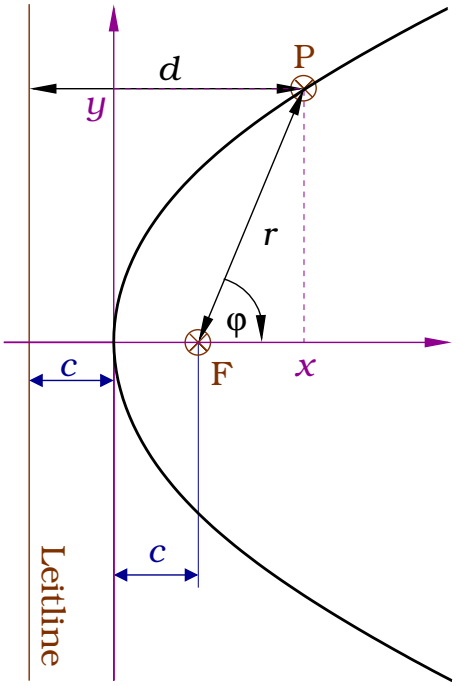
$$2a = r + r'$$

die implizite Ellipsengleichung

$$\frac{x}{a^2}^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit $b^2 = a^2 - c^2$ herleiten.

- <u>Parabel:</u>



Eine Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, für die gilt:

$$r = d$$

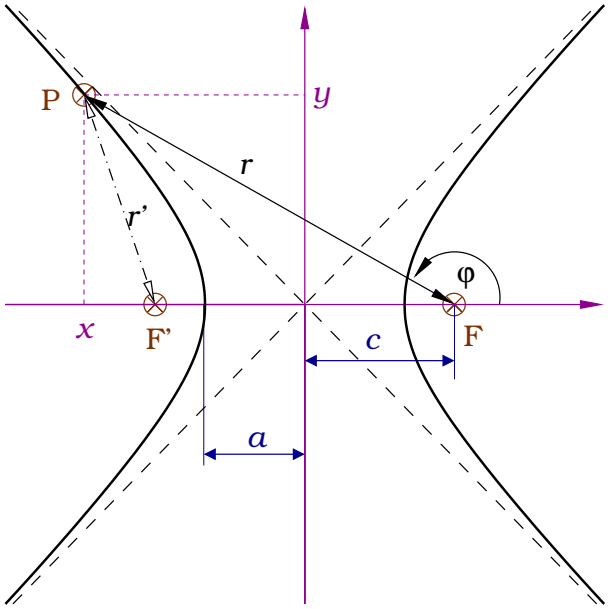
oder

$$\begin{aligned} d &= c + x = 2c - r\cos\varphi = r \\ \Rightarrow r &= \frac{2c}{1+\cos\varphi} \qquad \left(= \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}\right) \end{aligned}$$

weiter ist abzulesen:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(c-x)^2+y^2} \\ \Rightarrow (c+x)^2 &= (c-x)^2+y^2 \\ \Leftrightarrow y^2 &= 4cx \end{aligned}$$

- Hyperbel:



Eine Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte, mit

$$\begin{aligned} 2a &= r - r' \\ 2a &= r - \sqrt{r^2+4c^2+4cr\,\cos\varphi} \end{aligned}$$

mit $c = \varepsilon a$ für $\varepsilon > 1$ folgt:

$$\begin{aligned} r &= a\frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon\cos\varphi} \\ r &= \frac{p}{1+\varepsilon\,\cos\varphi} \\ & \qquad \text{mit } p = a(1-\varepsilon^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{a^2}^2 - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ & \qquad \text{mit } b^2 = c^2 - a^2 \end{aligned}$$

A.4 Details zum starren Körper

Details zu den Eulerwinkeln und den Lagrange-Gleichungen für die Rotation eines starren Körpers (siehe [DL], Kap. 6.3.5 + 6.3.6)

Eine beliebige Rotation um einen festen Punkt kann als Hintereinanderausführung von drei Rotationen um die sogenannten Euler-Winkel (α, β, γ) aufgefasst werden.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Raumfeste Koordinaten} & & & & & & \text{Körperfeste Koordinaten} \\ (x, y, z) & \xrightarrow{\alpha} & (x_1', x_2', x_3') & \xrightarrow{\beta} & (x_1'', x_2'', x_3'') & \xrightarrow{\gamma} & (x_1, x_2, x_3) \end{array}$$

$$\mathbf{r}_{KF} = \underline{\underline{D}}_{\gamma}\, \underline{\underline{D}}_{\beta}\, \underline{\underline{D}}_{\alpha}\, \mathbf{r}_{RF} = \underline{\underline{D}}\, \mathbf{r}_{RF}$$

Jede dieser Rotationen wird durch eine Drehmatrix ausgedrückt. Das Produkt der Drehmatrizen (beachte Reihenfolge!) charakterisiert die Gesamtdrehung.

<u>Drehung 1:</u> Drehe Koordinatensystem um α (im Gegenuhrzeigersinn) um z-Achse:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{r}' = \underline{\underline{D}}_{\alpha}\, \mathbf{r}_{RF})$$

<u>Drehung 2:</u> Drehe das neue System (S') um β (im Gegenuhrzeigersinn) um x_1'-Achse:

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{r}'' = \underline{\underline{D}}_{\beta}\, \mathbf{r}')$$

<u>Drehung 3:</u> Drehe das neue System (S'') um γ (im Gegenuhrzeigersinn) um x_3''-Achse:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{r}_{KF} = \underline{\underline{D}}_{\gamma}\, \mathbf{r}'')$$

Multiplikation der Matrizen:

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{D}} &= \underline{\underline{D}}_{\gamma}\,\underline{\underline{D}}_{\beta}\,\underline{\underline{D}}_{\alpha} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma & \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta\sin\gamma \\ -\cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma & -\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma & \sin\beta\cos\gamma \\ \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Da sich die Gesamtdrehung aus den drei Einzeldrehungen zusammensetzt, ist der Drehvektor $\boldsymbol{\omega}$ (der die Lage des KF-Systems zum RF-System beschreibt) die Summe der drei zugehörigen Drehvektoren:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\alpha + \boldsymbol{\omega}_\beta + \boldsymbol{\omega}_\gamma$$

Gesucht sind die KF-Zerlegungen dieser Vektoren.

(i) $\boldsymbol{\omega}_\alpha$ zeigt im RF-System in z-Richtung (siehe Drehung 1). Ein Vektor im RF-System wird auf das KF-System umgerechnet durch Anwendung von $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}_{\gamma}\,\underline{\underline{D}}_{\beta}\,\underline{\underline{D}}_{\alpha}$:

$$
\hookrightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_\alpha\Big|_{KF} = \begin{pmatrix} \dot\alpha_1 \\ \dot\alpha_2 \\ \dot\alpha_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\underline{\underline{D}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\alpha \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{D}}_{\gamma}\,\underline{\underline{D}}_{\beta}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\alpha \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \dot\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ \dot\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ \dot\alpha\cos\beta \end{pmatrix}
$$

(denn bei der 1. Drehung ändert sich die Kompo− nentenzerlegung von $\boldsymbol{\omega}_\alpha$ natürlich nicht)

(ii) $\boldsymbol{\omega}_\beta$ zeigt im S' (und S'')-System in Richtung der Knotenlinie ($x_1' = x_1''$). Der Übergang ins KF-System wird durch $\underline{\underline{D}}_{\gamma}$ vermittelt:

$$
\boldsymbol{\omega}_\beta\Big|_{KF} = \begin{pmatrix} \dot\beta_1 \\ \dot\beta_2 \\ \dot\beta_3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}}_{\gamma}\begin{pmatrix} \dot\beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot\beta\cos\gamma \\ -\dot\beta\sin\gamma \\ 0 \end{pmatrix}
$$

(iii) $\boldsymbol{\omega}_\gamma$ zeigt im S''- und im KF-System in Richtung von $x_3'' = x_3$:

$$
\boldsymbol{\omega}_\gamma\Big|_{KF} = \begin{pmatrix} \dot\gamma_1 \\ \dot\gamma_2 \\ \dot\gamma_3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}}_{\gamma}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\gamma \end{pmatrix}
$$

Zusammensetzung: $(\omega_k = \dot\alpha_k + \dot\beta_k + \dot\gamma_k)$

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \dot\alpha \sin\beta \sin\gamma + \dot\beta \cos\gamma \\
\omega_2 &= \dot\alpha \sin\beta \cos\gamma - \dot\beta \sin\gamma \\
\omega_3 &= \dot\alpha \sin\beta + \dot\gamma
\end{aligned}$$

Im HA-System gilt

$$\begin{aligned}
T_{rot} &= \frac{1}{2}\sum_k \Theta_k \omega_k^2 \\
&= \frac{1}{2}\Big(\Theta_1\omega_1^2 + \Theta_2\omega_2^2 + \Theta_3\omega_3^2\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\Theta_1\big(\dot\alpha^2\sin^2\beta\sin^2\gamma + \dot\beta^2\cos^2\gamma + 2\dot\alpha\dot\beta\sin\beta\sin\gamma\cos\gamma\big) \\
&\quad + \Theta_2\big(\dot\alpha^2\sin^2\beta\cos^2\gamma + \dot\beta^2\sin^2\gamma - 2\dot\alpha\dot\beta\sin\beta\sin\gamma\cos\gamma\big) \\
&\quad + \Theta_3\big(\dot\alpha^2\cos^2\beta + \dot\gamma^2 + 2\dot\alpha\dot\gamma\cos\beta\big)\Big\} \\
&= T_{rot}\Big(\beta\gamma, \dot\alpha\dot\beta\dot\gamma\Big)
\end{aligned}$$

Lagrange-Gleichungen für

$$L_{rot} = T_{rot} - U = T_{rot}\Big(\beta\gamma, \dot\alpha\dot\beta\dot\gamma\Big) - U\Big(\alpha\beta\gamma\Big)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{rot}}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial T_{rot}}{\partial q_k} = -\frac{\partial U}{\partial q_k} \qquad \begin{pmatrix} q_1 = \alpha \\ q_2 = \beta \\ q_3 = \gamma \end{pmatrix}$$

Andeutung der expliziten Auswertung

$\underline{q_3 = \gamma}$:

- $$\frac{\partial T_{rot}}{\partial \dot\gamma} = \Theta_3\big(\dot\gamma + \dot\alpha\cos\beta\big) \qquad \hookrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T_{rot}}{\partial \dot\gamma} = \Theta_3\Big(\ddot\alpha\cos\beta - \dot\alpha\dot\beta\sin\beta + \ddot\gamma\Big)$$

- $$\begin{aligned}\frac{\partial T_{rot}}{\partial \gamma} &= \Theta_1\Big(\dot\alpha^2\sin^2\beta\sin\gamma\cos\gamma - \dot\beta^2\sin\gamma\cos\gamma + \dot\alpha\dot\beta\sin\beta\cos^2\gamma - \dot\alpha\dot\beta\sin\beta\sin^2\gamma\Big) \\ &+ \Theta_2\Big(-\dot\alpha^2\sin^2\beta\sin\gamma\cos\gamma + \dot\beta^2\sin\gamma\cos\gamma - \dot\alpha\dot\beta\sin\beta\cos^2\gamma + \dot\alpha\dot\beta\sin\beta\sin^2\gamma\Big)\end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ Lg-Gl.:

$$\boxed{\begin{aligned}&\Theta_3\big(\ddot\alpha\cos\beta - \dot\alpha\dot\beta\sin\beta + \ddot\gamma\big) \\ &- \big(\Theta_1 - \Theta_2\big)\Big\{\big(\dot\alpha^2\sin^2\beta - \dot\beta^2\big)\sin\gamma\cos\gamma \\ &\qquad + \dot\alpha\dot\beta\sin\beta\big(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma\big)\Big\} = -\frac{\partial U}{\partial\gamma}\end{aligned}}$$

Behauptung:

$$\text{Lg} - \text{Gl.} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\Theta_3\dot{\omega}_3 - \big(\Theta_1 - \Theta_2\big)\omega_1\omega_2 = -\frac{\partial U}{\partial \gamma}}$$

zu zeigen ist lediglich

$$\begin{aligned}
\omega_1\omega_2 &= \big(\dot{\alpha}\sin\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma\big)\big(\dot{\alpha}\sin\beta\cos\gamma - \dot{\beta}\sin\gamma\big) \\
&= \dot{\alpha}^2\sin^2\beta\sin\gamma\cos\gamma + \dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos^2\gamma \\
&\quad - \dot{\beta}^2\sin\gamma\cos\gamma - \dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\sin^2\gamma \\
&= \big(\dot{\alpha}^2\sin\beta - \dot{\beta}^2\big)\sin\gamma\cos\gamma + \dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\big(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma\big)
\end{aligned}$$

Entsprechende (länglichere) Rechnungen für $q_1 = \alpha$ und $q_2 = \beta$ führen auf:

$\underline{q_1 = \alpha}$:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\alpha}\Big\{\big(\Theta_1\sin^2\gamma + \Theta_2\cos^2\gamma\big)\sin^2\beta + \Theta_3\cos^2\beta\Big\} \\
&+ 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\big(\Theta_1\sin^2\gamma + \Theta_2\cos^2\gamma - \Theta_3\big)\sin\beta\cos\beta \\
&+ 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\big(\Theta_1 - \Theta_2\big)\sin^2\beta\sin\gamma\cos\gamma + \ddot{\beta}\big(\Theta_1 - \Theta_2\big)\sin\beta\sin\gamma\cos\gamma \\
&+ \dot{\beta}^2\big(\Theta_1 - \Theta_2\big)\cos\beta\sin\gamma\cos\gamma \\
&+ \dot{\beta}\dot{\gamma}\Big\{\big(\Theta_1 - \Theta_2\big)\big(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma\big) - \Theta_3\Big\}\sin\beta + \ddot{\gamma}\Theta_3\cos\beta \quad = \quad -\frac{\partial U}{\partial \alpha}
\end{aligned}$$

$\underline{q_2 = \beta}$:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\alpha}\big(\Theta_1 - \Theta_2\big)\sin\beta\sin\gamma\cos\gamma \\
&+ \dot{\alpha}^2\big(\Theta_3 - \Theta_1\sin^2\gamma - \Theta_2\cos^2\gamma\big)\sin\beta\cos\beta \\
&+ \dot{\alpha}\dot{\gamma}\Big\{\Theta_3 + \big(\Theta_1 - \Theta_2\big)\big(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma\big)\Big\}\sin\beta \\
&+ \ddot{\beta}\big(\Theta_1\cos^2\gamma + \Theta_2\sin^2\gamma\big) - 2\dot{\beta}\dot{\gamma}\big(\Theta_1 - \Theta_2\big)\sin\gamma\cos\gamma \quad = \quad -\frac{\partial U}{\partial \beta}
\end{aligned}$$

Linearkombinationen der drei BWGl führen auf

$$\begin{aligned}
\Theta_1\dot{\omega}_1 - \big(\Theta_2 - \Theta_3\big)\omega_2\omega_3 &= \frac{1}{\sin\beta}\Big(-\sin\gamma\frac{\partial U}{\partial \alpha} - \sin\beta\cos\gamma\frac{\partial U}{\partial \beta} + \cos\beta\sin\gamma\frac{\partial U}{\partial \gamma}\Big) \\
&\equiv M_1
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\Theta_2\dot{\omega}_2 - \big(\Theta_3 - \Theta_1\big)\omega_3\omega_1 &= \frac{1}{\sin\beta}\Big(-\cos\gamma\frac{\partial U}{\partial\alpha} + \sin\beta\sin\gamma\frac{\partial U}{\partial\beta} + \cos\beta\cos\gamma\frac{\partial U}{\partial\gamma}\Big)\\ &\equiv M_2\end{aligned}$$

Zusammenfassung (mit $M_3 = -\frac{\partial U}{\partial\gamma}$):

$$\left.\begin{aligned}\Theta_1\dot{\omega}_1 - \big(\Theta_2 - \Theta_3\big)\omega_2\omega_3 &= M_1\\ \Theta_2\dot{\omega}_2 - \big(\Theta_3 - \Theta_1\big)\omega_3\omega_1 &= M_2\\ \Theta_3\dot{\omega}_3 - \big(\Theta_1 - \Theta_2\big)\omega_1\omega_2 &= M_3\end{aligned}\right\}\ \text{Euler} - \text{Gleichungen}$$

$$\text{bzw.}\quad \sum_k \varepsilon_{ijk}\big(\Theta_k\dot{\omega}_k - M_k\big) - \big(\Theta_i - \Theta_j\big)\omega_i\omega_j = 0$$

$$\text{mit}\qquad \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (ijk)\ \text{zyklisch}\\ -1 & (ijk)\ \text{antizyklisch}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

A.5 Details zur Lösung der BWGls gekoppelter Oszillatoren

Ausgangspunkt: Homogenes Gleichungssystem (*) (siehe Kapitel 5.4.2 c))

$$\sum_{\nu} \Big(W_{\mu\nu} - \Omega_\lambda^2 T_{\mu\nu} \Big) U_{\nu\lambda} = 0$$

$$\hookrightarrow \quad \left.\begin{array}{ll} \sum_\nu W_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} = \Omega_\lambda^2 \sum_\nu T_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} & \mid \cdot \sum_\mu U_{\mu\lambda'} \\ \sum_\nu W_{\mu\nu} U_{\nu\lambda'} = \Omega_{\lambda'}^2 \sum_\nu T_{\mu\nu} U_{\nu\lambda'} & \mid \cdot \sum_\mu U_{\mu\lambda} \end{array}\right] \ominus$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{\mu\nu} \Big(U_{\mu\lambda'} W_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} - U_{\mu\lambda} W_{\mu\nu} U_{\nu\lambda'} \Big)$$
$$= \sum_{\mu\nu} \Big(\Omega_\lambda^2 U_{\mu\lambda'} T_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} - \Omega_{\lambda'}^2 U_{\mu\lambda} T_{\mu\nu} U_{\nu\lambda'} \Big)$$

Zur Weiterverarbeitung benutze Symmetrie der Matrizen $\underline{\underline{T}}$, $\underline{\underline{W}}$ und vertausche Summationsindices auf geeignete Weise.

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \quad \text{RS} &= \Omega_\lambda^2 \sum_{\mu\nu} U_{\mu\lambda'} T_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} - \Omega_{\lambda'}^2 \sum_{\mu\nu} U_{\mu\lambda} T_{\nu\mu} U_{\nu\lambda'} \\ &= \Omega_\lambda^2 \sum_{\mu\nu} U_{\mu\lambda'} T_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} - \Omega_{\lambda'}^2 \sum_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} T_{\mu\nu} U_{\mu\lambda'} \\ &= \Big(\Omega_\lambda^2 - \Omega_{\lambda'}^2 \Big) \sum_{\mu\nu} U^T_{\lambda'\mu} T_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} \\ \text{LS} &= \sum_{\mu\nu} U_{\mu\lambda'} W_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} - \sum_{\mu\nu} U_{\mu\lambda} W_{\nu\mu} U_{\nu\lambda'} \\ &= \sum_{\mu\nu} U_{\mu\lambda'} W_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} - \sum_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} W_{\mu\nu} U_{\mu\lambda'} = 0 \end{aligned}$$

Aus LS = RS = 0 folgt aufgrund der Voraussetzung $\Omega_\lambda^2 \neq \Omega_{\lambda'}^2$:

$$\sum_{\mu\nu} U^T_{\lambda'\mu} T_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} = 0 \qquad \text{für } \lambda' \neq \lambda$$

Für $\lambda' = \lambda$ folgt aus $T = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} T_{\mu\nu} \dot{q}_\mu \dot{q}_\nu > 0$:

$$\sum_{\mu\nu} U^T_{\lambda\mu} T_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} > 0$$

Wähle Normierung : $$\sum_{\mu\nu} U^T_{\lambda\mu} T_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} = 1$$

$$\overset{\text{insg.}}{\Longrightarrow} \quad \sum_{\mu\nu} U^T_{\lambda'\mu} T_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} = \delta_{\lambda\lambda'} \qquad (\underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{T}}\, \underline{\underline{U}} = 1)$$

$$\text{Dann folgt aus} \quad \left(\underline{\underline{W}} - \underline{\underline{\Omega}}^2 \underline{\underline{T}}\right) \underline{\underline{U}} \;=\; 0 \;:$$

$$\underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{W}}\, \underline{\underline{U}} \;=\; \underline{\underline{\Omega}}^2 \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{T}}\, \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{\Omega}}^2$$

$\Longrightarrow$ $\underline{\underline{T}}$ und $\underline{\underline{W}}$ werden simultan von $\underline{\underline{U}}$ diagonalisiert.

A.6 Näheres zum dreiatomigen Molekül

1) Auswertung der Säkulargleichung

$$\begin{aligned}
\longrightarrow \quad \det(...) = \Big(\frac{k}{m} - \Omega^2\Big)\Big\{\Big(\frac{2k}{M} - \Omega^2\Big)\Big(\frac{k}{m} - \Omega^2\Big) - \frac{k^2}{mM}\Big\} & \\
-\frac{k}{\sqrt{mM}}\Big(\frac{k}{\sqrt{mM}}\Big(\frac{k}{m} - \Omega^2\Big)\Big) &= 0 \\
\Longleftrightarrow \quad \Big(\frac{k}{m} - \Omega^2\Big)\Big\{\Big(\frac{2k}{M} - \Omega^2\Big)\Big(\frac{k}{m} - \Omega^2\Big) - \frac{2k^2}{mM}\Big\} &= 0 \\
\Longleftrightarrow \quad \Omega_2^2 = \frac{k}{m} &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{sowie} \qquad \frac{2k^2}{mM} - \Omega^2\Big(\frac{k}{m} + \frac{2k}{M}\Big) + \Omega^4 - \frac{2k^2}{mM} &= 0 \\
\Longleftrightarrow \qquad \Omega^2\Big(\Omega^2 - \frac{k}{m}\Big(1 + \frac{2m}{M}\Big)\Big) &= 0 \\
\Longrightarrow \quad \Omega_1^2 = 0 & \\
\Omega_3^2 = \frac{k}{m}\Big(1 + \frac{2m}{M}\Big) &
\end{aligned}$$

2) Bestimmung der Transformations-Matrix

$$\lhd \qquad \begin{pmatrix} \frac{k}{m} - \Omega_\lambda^2 & -\frac{k}{\sqrt{mM}} & 0 \\ -\frac{k}{\sqrt{mM}} & \frac{2k}{M} - \Omega_\lambda^2 & -\frac{k}{\sqrt{mM}} \\ 0 & -\frac{k}{\sqrt{mM}} & \frac{k}{m} - \Omega_\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1\lambda} \\ U_{2\lambda} \\ U_{3\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einsetzen der Eigenfrequenzen:

$\Omega_1 = 0$:

$$\left| \begin{aligned} \tfrac{k}{m}U_{11} - \tfrac{k}{\sqrt{mM}}U_{21} &= 0 \\ -\tfrac{k}{\sqrt{mM}}U_{11} + \tfrac{2k}{M}U_{21} - \tfrac{k}{\sqrt{mM}}U_{31} &= 0 \\ -\tfrac{k}{\sqrt{mM}}U_{21} + \tfrac{k}{m}U_{31} &= 0 \end{aligned} \right| \Longrightarrow \quad \underline{U}_{\,1} = \alpha \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m}{M}} \\ 1 \\ \sqrt{\frac{m}{M}} \end{pmatrix}$$

$\Omega_2^2 = \frac{k}{m}$:

$$\left| \begin{aligned} -\tfrac{k}{\sqrt{mM}}U_{22} &= 0 \\ -\tfrac{k}{\sqrt{mM}}U_{12} + k(\tfrac{2}{M} - \tfrac{1}{m})U_{22} - \tfrac{k}{\sqrt{mM}}U_{32} &= 0 \\ -\tfrac{k}{\sqrt{mM}}U_{22} &= 0 \end{aligned} \right| \Longrightarrow \quad \underline{U}_{\,2} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Omega_3^2 = \frac{k}{m}(1 + \frac{2m}{M})$:

$$\left| \begin{array}{r} -\frac{2k}{M}U_{13} - \frac{k}{\sqrt{mM}}U_{23} = 0 \\ -\frac{k}{\sqrt{mM}}U_{13} - \frac{k}{m}U_{23} - \frac{k}{\sqrt{mM}}U_{33} = 0 \\ -\frac{k}{\sqrt{mM}}U_{23} - \frac{2k}{m}U_{33} = 0 \end{array} \right| \Longrightarrow \quad \underline{U}_{\ 3} = \gamma \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{m}} \\ 1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{m}} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} \alpha\sqrt{\frac{m}{M}} & \beta & -\frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{M}{m}} \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \alpha\sqrt{\frac{m}{M}} & -\beta & -\frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{M}{m}} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{U}}^T = \begin{pmatrix} \alpha\sqrt{\frac{m}{M}} & \alpha & \alpha\sqrt{\frac{m}{M}} \\ \beta & 0 & -\beta \\ -\frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{M}{m}} & \gamma & -\frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{M}{m}} \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \quad \underline{\underline{U}}^T\underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} \alpha^2\frac{m}{M} + \alpha^2 + \alpha^2\frac{m}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma^2}{4}\frac{M}{m} + \gamma^2 + \frac{\gamma^2}{4}\frac{M}{m} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Normierung}}{\Longrightarrow} \quad \alpha^2(1 + \frac{2m}{M}) = 1 \iff \alpha = \sqrt{\frac{M}{M+2m}}$$

$$2\beta^2 = 1 \iff \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\gamma^2(1 + \frac{1}{2}\frac{M}{m}) = 1 \iff \gamma = \sqrt{\frac{2m}{M+2m}}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m}{M+2m}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{M}{2(M+2m)}} \\ \sqrt{\frac{M}{M+2m}} & 0 & \sqrt{\frac{2m}{M+2m}} \\ \sqrt{\frac{m}{M+2m}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{M}{2(M+2m)}} \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \quad q_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{M+2m}}\, Q_1(t) + \frac{1}{\sqrt{2m}}\, Q_2(t) - \sqrt{\frac{M}{2m(M+2m)}}\, Q_3(t) \\ q_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{M+2m}}\, Q_1(t) + \sqrt{\frac{2m}{M(M+2m)}}\, Q_3(t) \\ q_3(t) &= \frac{1}{\sqrt{M+2m}}\, Q_1(t) - \frac{1}{\sqrt{2m}}\, Q_2(t) - \sqrt{\frac{M}{2m(M+2m)}}\, Q_3(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad Q_1(t) &= A_1 t + B_1 \\ Q_2(t) &= A_2 \cos(\Omega_2 t + \delta_2) \\ Q_3(t) &= A_3 \cos(\Omega_3 t + \delta_3) \end{aligned}$$

3) Anfangsbedingungen zum Herausschälen der Normalschwingungen

Fall (i) :

$$\begin{aligned} q_1(0) &= q_2(0) = q_3(0) = 0 \\ \dot{q}_1(0) &= \dot{q}_2(0) = \dot{q}_3(0) = v_0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad q_1(t) = q_2(t) = q_3(t) = v_0 t$$

(Translation)

Fall (ii) :

$$\begin{aligned} q_1(0) &= A = -q_3(0) \ , \quad q_2(0) = 0 \\ \dot{q}_1(0) &= \dot{q}_2(0) = \dot{q}_3(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad q_1(t) &= A \cos \Omega_2 t = -q_3(t) \\ q_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

Fall (iii) :

$$\begin{aligned} q_1(0) &= q_3(0) = -A \ , \quad q_2(0) = \frac{2m}{M} A \\ \dot{q}_1(0) &= \dot{q}_2(0) = \dot{q}_3(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad q_1(t) &= -A \cos \Omega_3 t = q_3(t) \\ q_2(t) &= \frac{2m}{M} A \cos \Omega_3 t \end{aligned}$$

Anhang B

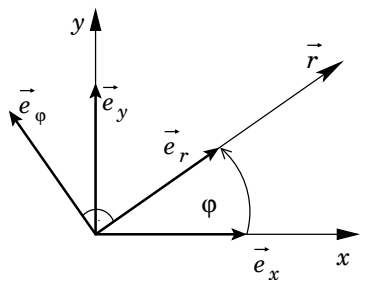
Übungen

Übungsblatt 0

Anwesenheitsübung: 02.11.2005

Aufgabe 1

Kreisbewegung in verschiedenen Basissystemen



In kartesischen Koordinaten wird die Bewegung eines Massenpunkts auf einer Kreisbahn durch den Ortsvektor

$$\begin{aligned} \vec{r} &= R\cos\omega t \cdot \vec{e}_x + R\sin\omega t \cdot \vec{e}_y \\ &= \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

beschrieben. R ist der Radius des Kreises und ω die Winkelgeschwindigkeit oder Kreisfrequenz.

In ebenen Polarkoordinaten kann der Vektor viel einfacher als

$$\vec{r} = R \cdot \vec{e}_r(t) = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Es ist jedoch zu beachten, dass die Basis $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ dieses Koordinatensystems mit der Kreisfrequenz ω des Massenpunktes mitrotiert.

1. Stelle die Einheitsvektoren der Polardarstellung $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$ in kartesischen Koordinaten dar.

2. Berechne ihre Ableitung nach der Zeit t.
3. Wie lautet der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ in beiden Darstellungen?
4. Wie groß ist jeweils sein Betrag $v = |\vec{v}|$?
5. Zeige das die Kreisbewegung den Flächensatz (s. [Lüc], Kap 3.4) erfüllt.
6. Berechne mit dem Flächensatz die von der Bahnkurve eingeschlossene Fläche.
7. Wie lautet der Beschleunigungsvektor $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ in beiden Darstellungen?
8. Wie groß ist jeweils sein Betrag $a = |\vec{a}|$?

Aufgabe 2

Gradient, Rotation und Divergenz

1. Berechne den Gradienten des skalaren Feldes $F(x, y, z) = F_o(x^2 + y^2 + z^2)$ in kartesischen Koordinaten und in Kugelkoordinaten.
2. Berechne Rotation und Divergenz des Vektorfeldes

$$\vec{A} = A_o \begin{pmatrix} \frac{-x}{r^2+a^2} \\ \frac{-y}{r^2+a^2} \\ \frac{-z}{r^2+a^2} \end{pmatrix} \text{ mit } r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ und } A_o, a \in \mathbf{R}$$

3. Versuche ein Skalarfeld Φ zu finden, für das $\vec{\nabla}\Phi = \vec{A}$ gilt.

Aufgabe 3

Taylorreihenentwicklung

Entwickle die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

bis zur zweiten Ordnung nach TAYLOR.

Anmerkungen:

Gradient, Divergenz und Rotation werden in der theoretischen Physik gerne mit Hilfe des Nabla-Operators $\vec{\nabla}$ notiert:

Gradient einer skalaren Funktion $f(\vec{r})$	$\vec{\nabla} f(\vec{r})$	(Produkt mit Skalar)
Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})$	(Skalarprodukt)
Rotation eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$	$\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$	(Kreuzprodukt)

Wie die Ableitung nach einem freien Parameter hat der Nabla-Operator in verschiedenen Basissystemen im allgemeinen eine unterschiedliche Gestalt:

kartesische Koordinaten	$\vec{r} = (x, y, z)$	$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$
Zylinderkoordinaten	$\vec{r} = (r, \varphi, z)$	$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$
Kugelkoordinaten	$\vec{r} = (r, \vartheta, \varphi)$	$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$

Zum Beispiel:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \quad = \quad \frac{\partial \vec{A}(\vec{r})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{A}(\vec{r})}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{A}(\vec{r})}{\partial z}$$

ist die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ in Zylinderkoordinaten

Übungsblatt 1

Vorrechnen & Diskussion: 09.11.2005

Aufgabe 1

klassisches Wurfproblem

Ein Massenpunkt verlässt den Boden (Anfangspunkt: Ursprung) mit der Geschwindigkeit $|\vec{v}_0| = v_0$ unter dem Winkel $(\vec{e}_x \cdot \vec{v}_0/v_0) = \cos\alpha$. Es wirkt die Schwerkraft mit $g = 9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Reibungseffekte sind vernachlässigbar.

1. Welcher Wurfwinkel ist bei vorgegebener Geschwindigkeit notwendig, damit der Massenpunkt eine vorgegebene Stelle $\vec{r}_e = (x_e, 0, 0)$ erreicht?

2. Wie viel Zeit benötigt er dafür?

3. Was ist die maximale Höhe dieser Flugbahn und zu welchem Zeitpunkt wird sie erreicht?

4. Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Massenpunkt den Zielpunkt?

5. Was ist die maximale Entfernung $x_{e,\max}$, die bei vorgegebenem v_0 möglich ist?

6. Unter welchem Wurfwinkel wird diese Entfernung erreicht?

Aufgabe 2

Flussüberquerung

Ein Boot überquert mit der konstanten Geschwindigkeit v_b einen Fluss der Breite b senkrecht zu dessen Strömungsrichtung. Die Strömung hat einen parabolischen Verlauf: in der Mitte ist die Strömungsgeschwindigkeit v mit $v(b/2) = v_\mathrm{m}$ am größten und an beiden Ufern ist $v = 0$.

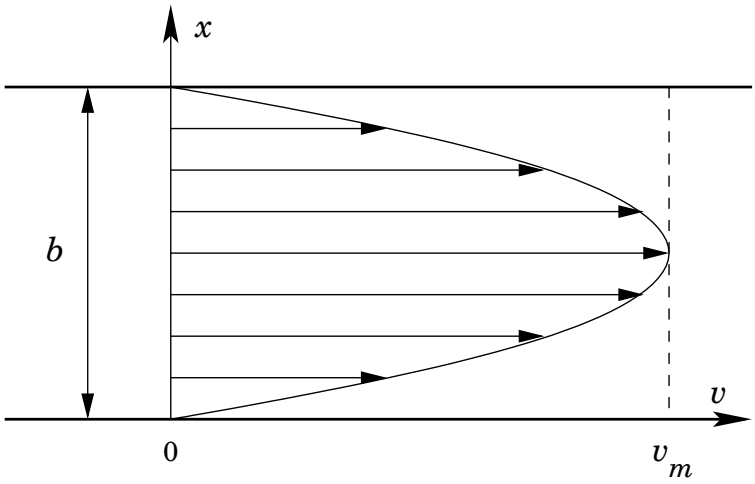


Abbildung B.1: Strömungsprofil des Flusses

2.a) Gib das Geschwindigkeitsprofil des Flusses an.

2.b) Welche Bahnkurve beschreibt das Boot?

2.c) Wo liegt der Landepunkt?

2.d) Wie lange dauert die Überfahrt?

Nun fährt das Boot nicht mehr senkrecht zur Strömungsrichtung, sondern in einem Winkel α gegen die Strömung. (Wenn $\alpha = \pi/2$ ist, fährt das Boot direkt gegen die Strömung)

2.e) In welche (konstante) Richtung α muss das Boot steuern, damit der Landepunkt auf gleicher Höhe mit dem Startpunkt ist? (Start- und Landepunkt liegen auf einer Senkrechten zur Strömungsrichtung)

2.f) Welche Bahnkurve beschreibt das Boot jetzt?

2.g) Wie lange dauert die Überfahrt?

Aufgabe 3

Bahnkurve

Ein Punkt durchläuft von $t_a = 0$ bis $t_e = 1$ eine Kurve die durch den Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t \cdot R \sin\pi t \\ \sin\omega t \cdot R \sin\pi t \\ \cos\pi t \end{pmatrix}$$

beschrieben werden kann

1. Beschreibe die Kurve, die der Ortsvektor durchläuft. Welche Rolle spielen R und ω?

2. Berechne die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Punktes zum Zeitpunkt t.

Aufgabe 4

Transformation zwischen Bezugssystemen

Ein sich bewegender Massenpunkt wird in einem Inertialsystem S und einem anderen Bezugsystem S' betrachtet. Dieses bewege sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_{\text{rel}}(t)$ von S weg. Die Koordinaten werden so gewählt, dass $\vec{v}_{\text{rel}}(t)$ in beiden Bezugssystemen nur eine x-Komponente hat. Die Zeit verläuft in beiden Bezugssystemen gleich schnell ($t' = t$). Zur Zeit $t = t' = 0$ haben sich die Ursprünge in einem Punkt gekreuzt. Im Inertialsystem S genügt der Massenpunkt der NEWTON'schen Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \tag{B.1}$$

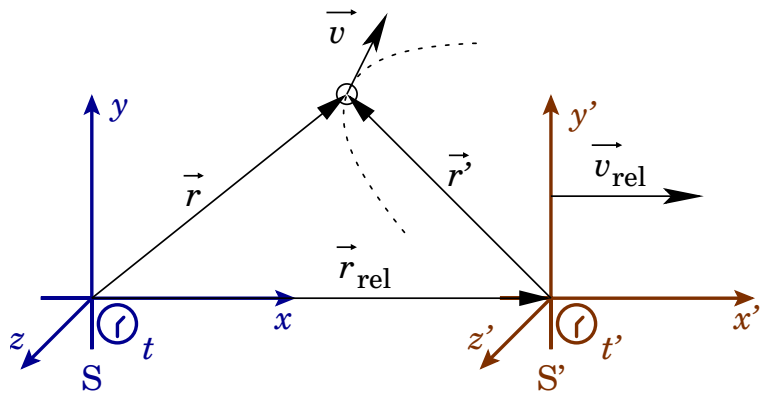


Abbildung B.2: Darstellung der Bahnkurve eines Massenpunktes in zwei, sich von einander entfernenden Koordinatensystemen S und S'

1. Stelle die Transformation $T(\vec{v}_{\text{rel}}(t)) : \vec{r} \mapsto \vec{r'}$ auf.

2. Wie lautet die Bewegungsgleichung des Massenpunktes aus der Sicht von S' wenn $\vec{v}_{\text{rel}}(t) = \vec{a}t$ mit konstantem $\vec{a}$ ist?

3. Wie muss $\vec{v}_{\text{rel}}(t)$ gewählt werden, damit die Bewegungsgleichung (B.1) unter der Transformation $T(\vec{v}_{\text{rel}}(t)) : \vec{r} \mapsto \vec{r'}$ invariant bleibt.

4. Die GALILEI-Transformation $G(\vec{r}_{\text{rel}}, \vec{v}_{\text{rel}}) : \vec{r} \mapsto \vec{r'}$ ist definiert durch[1]:

$$G(\vec{r}_{\text{rel}}, \vec{v}_{\text{rel}}) \circ \vec{r}(t) \quad = \quad \vec{r}(t) - \vec{r}_{\text{rel}} - \vec{v}_{\text{rel}} t \qquad \vec{r}_{\text{rel}}, \vec{v}_{\text{rel}} = \text{const}$$

   Zeige, dass diese GALILEI-Transformationen eine ABEL'sche Gruppe bilden.

5. Anwendung der Galileitransformationen:

   Ein Physiker fährt in einem Zug, der relativ zur Erde mit konstanter Geschwindigkeit fährt. Am Bahndamm sieht er

   (a) einen Jungen (reibungsfrei) einen Ball werfen (senkrecht oder schräg)
   (b) jemanden ein Federpendel betrachten
   (c) ein stehendes oder rollendes Rad

   Überlege qualitativ, welche Bahnkurven der Physiker sieht.

Aufgabe 5

Tiefe eines Brunnens

Um die Tiefe eines Brunnens zu bestimmen, lässt man einen Stein in diesen fallen und misst die Zeit t bis zum Aufschlag. Das Schwerefeld kann als homogen angenommen werden. Es wird ein ausreichend schwerer und aerodynamischer Stein gewählt, so dass Reibungseffekte mit Luft vernachlässigt werden können. Die Zeit, die der Schall (Geschwindigkeit c) des Aufschlags braucht, bis er den Rand des Brunnens erreicht, ist jedoch signifikant.

1. Berechne die Tiefe des Brunnens
2. In realistischen Fällen ist $c \gg 2gt$. Gib die ersten drei Terme einer Reihenentwicklung an.
3. Bei einem Brunnen auf der Erde ($g = 9.81\,\text{m/s}^2$, $c = 330\,\text{m/s}$) wird eine Fallzeit von $4.0\,\text{s}$ gemessen. Welche Tiefe wird nach 1.-3. Ordnung und exakt ermittelt?

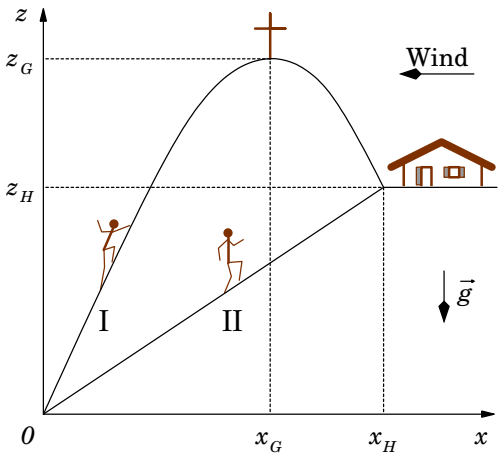
[1] Die vollständigen Galileitransformationen enthalten noch eine konstante Drehung der Bezugssysteme untereinander und einen Zeitoffset. Allerdings werden die Bezugssysteme meist so gewählt, dass diese verschwinden.

Übungsblatt 2

Anwesenheitsübung: 16.11.2005

Aufgabe 1

Bergsteiger



Zwei Bergsteiger, die gleich groß und schwer sind, wollen vom Tal (Ursprung) eine Hütte bei (x_H, z_H) besuchen. Bergsteiger I will über den Gipfel bei (x_G, z_G) steigen. Sein Weg kann als Parabel $z = -(x-x_G)^2+z_G$ mit $x \in [0,\, x_H]$ beschrieben werden. Der Bergsteiger II hat sich für den direkten Weg zur Hütte entschieden. Im Moment herrscht Windstille. Die Hütte ist in x-Richtung 1.5 mal weiter entfernt als der Gipfel.

1.a) Wähle eine geeignete Parametrisierung der Wege, und bestimme die Abhängigkeiten zwischen x_G, z_G, x_H, und z_H. Die weiteren Ergebnisse sollen – wenn möglich – in Abhängigkeit von x_G angegeben werden.

1.b) Welche Arbeit muss jeder Bergsteiger verrichten?

1.c) Im Herbst wollen die Bergsteiger wieder auf ihren Wegen zur Hütte wandern. Diesmal bläst ein Wind, der eine ständig wirkende Kraft $\vec{F}_W(z) = -F_W z \vec{e}_x$ verursacht. Welche Arbeit müssen die Bergsteiger diesmal verrichten?

1.d) Zahlenbeispiel: Jeder Bergsteiger wiegt (mit Gepäck) 83.4 kg, der Gipfel ist 1141 m hoch. Die Schwerebeschleunigung beträgt $9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ in $-z$-Richtung. Die Windstärke[2] beträgt $F_W = 2.31\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$.

[2] Die hier eingeführte Windstärke ist natürlich keine brauchbare physikalische Größe.

Aufgabe 2

Ballistisches Pendel

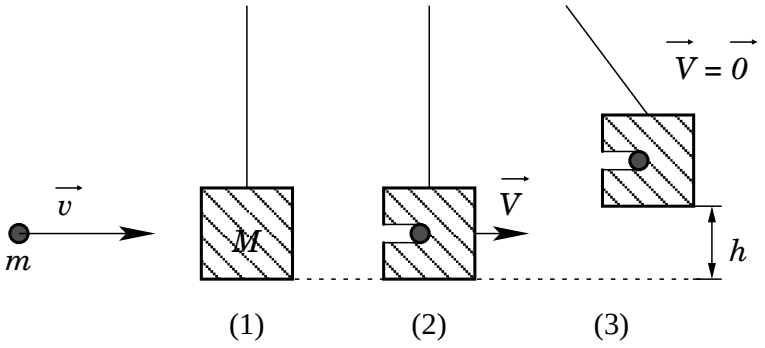


Abbildung B.3: Ballistisches Pendel vor (1) und während (2) dem Stoß sowie beim Umkehrpunkt (3)

Eine Kugel mit der Masse m trifft mit der Geschwindigkeit v senkrecht auf den Schwerpunkt eines ruhenden Klotzes mit der Masse M. Dieser ist als ballistisches Pendel aufgehängt (siehe Abb. B.3). Infolge des Rückstoßes (mit der Geschwindigkeit V) wird der Klotz auf die Höhe h angehoben. Betrachte bei den Rechnungen die beiden Fälle:

- Die Kugel bleibt im Klotz stecken (inelastischer Stoß)
- Die Kugel prallt vom Klotz ab ((vollkommen-)elastischer Stoß)

Berechne für die drei vorgegebenen Größen jeweils die beiden gesuchten:

2.a) gegeben: m, M, v; gesucht: V, h

2.b) gegeben: m, M, h; gesucht: v, V

2.c) gegeben: v, V, h; gesucht: m, M

2.d) gegeben: m, v, h; gesucht: M, V

2.e) gegeben: m, M, V; gesucht: v, h

2.f) gegeben: M, V, h; gesucht: m, v

Aufgabe 3

Hantel I

Zwei Massen m_1 und m_2 sind durch eine (masselose) Stange der Länge l miteinander verbunden. Jemand wirft diese Hantel irgendwann in eine beliebige Richtung.

3.a) Formuliere die Bewegungsgleichung für die Hantel im Schwerefeld der Erde.

3.b) Transformiere die Bewegungsgleichung in das Schwerpunktsystem.

3.c) Löse die Bewegungsgleichungen.

3.d) Welche Bahnkurve beschreibt der Relativvektor?

3.e) Bestimme den Bahndrehimpuls des Schwerpunktes der Hantel bezüglich des Abwurfpunktes und seine Ableitung. Unter welcher Bedingung verschwinden beide?

3.f) Berechne die Bahnkurven der beiden Massenpunkte bezüglich des Schwerpunktes und beschreibe sie.

Übungsblatt 3

Vorrechnen & Diskussion: 23.11.2005

Aufgabe 1

Tunnel durch die Erde

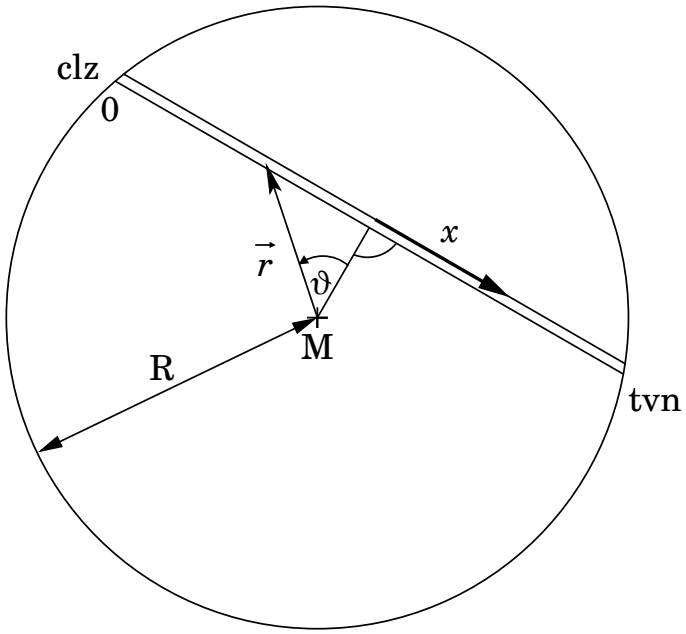


Abbildung B.4: Tunnel von Clausthal nach Taveuni

Um sich vom Clausthaler Wetter abzulenken, denkt sich ein Physiker einen geraden Tunnel von Clausthal durch die Erde bis zur Insel Taveuni. (Diese Insel bietet – neben schönen Stränden, warmen Temperaturen, sehens- und forschungswerten Vulkanen – das Phänomen, dass man sich mit einem Schritt von heute nach morgen und zurück bewegen kann.) In diesem Tunnel befindet sich eine Kapsel der Masse m, die sich im Tunnel (reibungsfrei) bewegen kann. Um dem Wetter zu entfliehen, setzt sich der Physiker einfach in die Kapsel und lässt sie fallen. Der Einfachheit halber kann die Dichte ρ der Erde als konstant angenommen werden.

1.a) Berechne die potentielle Energie der Kapsel in Abhängigkeit von x bezüglich eines günstigen Punktes.

1.b) Stelle den Energiesatz auf. Bestimme mit seiner Hilfe Ort und Geschwindigkeit der Kapsel in Abhängigkeit von der Zeit t.

1.c) Berechne die Zeit, die die Kapsel ($m = 438\,\mathrm{kg}$) von Clausthal nach Taveuni braucht. Clausthal liegt bei 51°48'00" N und 10°20'00" O. Der Tunnelausgang auf Taveuni liegt bei 16°49'00"S und 179°58'00"W. Die Masse der Erde beträgt $M = 5.98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ und ihr Radius $R = 6370\,\mathrm{km}$. Die Gravitationskonstante ist $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg\,s}^2}$.

Aufgabe 2

Raketenproblem

Eine Rakete, die ungeladen die Masse m_R hat, wird mit m_T Treibstoff beladen (Startmasse $m_S = m_R + m_T$). Nach dem Start stößt sie konstant die Gasmenge μ pro Zeiteinheit aus, bis ihr der Treibstoff ausgeht. Die Treibgase haben, von der Rakete aus gesehen, die (konstante) Durchschnittsgeschwindigkeit $\vec{v}_T$ gegen die Flugrichtung. Reibung kann vernachlässigt werden.

2.a) Stelle die Bewegungsgleichung der gestarteten Rakete im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ auf.

2.b) Betrachte eine Rakete im kräftefreien Raum. Bestimme die Geschwindigkeit der Rakete als Funktion der Zeit relativ zum Startplatz ($t = 0$, $\vec{r} = \vec{0}$, $\vec{v}_R = \vec{0}$, aufgefüllte Rakete)

2.c) Nach welcher Zeit t_B (Brenndauer) ist der Treibstoffvorrat verbraucht? Welche Geschwindigkeit und welche Energie hat die Rakete nach dem Ende der Brenndauer?

2.d) Wann wird die kinetische Energie der Rakete maximal? Welches Verhältnis müssen m_R, m_T, μ und $\vec{v}_T$ zueinander haben, damit dieses Maximum überhaupt erreicht wird? Welche Geschwindigkeit, Masse und kinetische Energie hat die Rakete zu diesem Zeitpunkt?

2.e) Betrachte eine (Sylvester-)Rakete, im Schwerefeld $\vec{G}$ der Erde. Die Steighöhe h_s (Höhe, die nach der Brenndauer t_B erreicht wird) sei klein genug, um $\vec{G} = -mg\vec{e}_z$ annehmen zu können. Stelle die Bewegungsgleichung auf. Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit die Rakete überhaupt abhebt?

2.f) Berechne die Steighöhe h_s der Rakete. Welche Geschwindigkeit hat die Rakete dann?

Aufgabe 3

Reibung

In dieser Aufgabe sollen zwei unterschiedliche Modelle für Reibung zwischen einem Festkörper und einem Fluid untersucht werden. Die beiden wichtigsten Modelle sind die STOKES-Reibung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{\text{ext}} - \beta\dot{\vec{r}}$$

und die NEWTON-Reibung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{\text{ext}} - \gamma|\dot{\vec{r}}|\dot{\vec{r}}$$

Dabei ist $\vec{F}_{\text{ext}}$ die Summe aller 'externen' Kräfte, die auf den Körper wirken. β und γ sind Reibungskoeffizienten, die im wesentlichen von der Form des Körpers und der Viskosität des Fluids abhängen.

3.a) Bestimme die Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ bei beiden Modellen am Beispiel der Bewegung eines Körpers ohne externe Kräfte, der relativ zum Medium eine Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ hat. Wann kommt der Körper zum Stillstand? Welche Strecke legt der Körper in der Zeit t zurück? Welche Strecke kann er maximal zurücklegen?

Das STOKES'sche Modell wird zur Beschreibung von laminarer Strömung verwendet, während turbulente Strömung nach NEWTON beschrieben wird. Zur Charakterisierung der Strömung wird gerne die REYNOLD'sche Zahl $Re = vL/\nu$ verwendet. L ist dabei die charakteristische Länge eines Körpers (z.B. $2R$ bei einer Kugel) und ν die kinematische Viskosität des Mediums (z.B. $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ für Luft). Ist $Re \lessapprox 10^3$, so geht man von laminarer Strömung aus, bei $Re \gtrapprox 10^4$ verwendet man NEWTONs Modell. Diese Werte hängen von der Geometrie des Körpers ab und müssen experimentell bestimmt werden. Des weiteren gibt es eine Übergangsform zwischen den beiden Grenzen.

3.b) Ein Köper bewegt sich zur Zeit $t = 0$ mit einer Geschwindigkeit v_0 durch ein Medium. v_0 ist ausreichend hoch, um eine turbulente Strömung der Flüssigkeit um den Körper zu verursachen. Auf den Körper wirken keine Kräfte. Berechne Ort und Geschwindigkeit des Körpers. Nimm an, dass die Strömung des Körpers schlagartig laminar wird, wenn seine REYNOLDszahl einen kritischen Wert Re_k unterschreitet.

3.c) Bestimme die Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ bei beiden Modellen am Beispiel des freien Falls ($\vec{F}_{\text{ext}} = -mg\vec{e}_z$) eines Körpers aus der Ruhe ($\vec{v}_0 = \vec{0}$). Betrachte den Grenzfall $t \to \infty$.

Übungsblatt 5

Vorrechnen & Diskussion: 08.12.2005

Aufgabe 1

Energie eines gedämpften harmonischen Oszillators

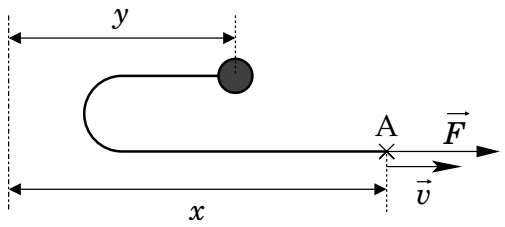
Es ist die Energie und der Energieverlust eines gedämpften harmonischen Oszillators zu berechnen. Dabei sind alle drei möglichen Bewegungsformen des gedämpften Oszillators zu berücksichtigen.

1.a) Berechne die mechanischen Energie und den Energieverlust. Benutze die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ sowie $\dot{x}(0) = v_0$.

1.b) Vergleiche und diskutiere die Ergebnisse.

Aufgabe 2

Peitsche



Eine Schnur der Länge l und der Masse M wird an einem Ende mit einem kleinen Massenstück m versehen. Die so konstruierte Peitsche wird bewegt, indem das andere Ende mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$ gezogen wird.

Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 & \dot{x}(0) &= v \\ y(0) &= x_0 + l & \dot{y}(0) &= 0 \end{aligned}$$

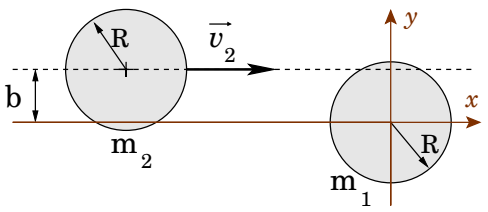
2.a) Wie groß ist die Geschwindigkeit $\dot{y}(t)$ des Massenstücks?

2.b) Berechne die maximale Geschwindigkeit $\dot{y}_{\max}$ eines Massenstücks von 5 g, das an einer 2.475 m langen und 0.475 kg schweren Peitsche, die mit 3 m/s bewegt wird, hängt.

Hinweis: Die Aufgabe ist aus [Gre] I

Aufgabe 3

Billard



Eine Kugel mit der Masse m und dem Radius R bewegt sich auf dem Billardtisch mit der Geschwindigkeit $v = p/m$ auf eine ruhende Kugel der Masse M und des gleichen Radius R zu. Das Koordinatensystem wählt man so, dass der Mittelpunkt der ruhenden Kugel im Ursprung liegt und sich der Mittelpunkt der anderen Kugel parallel zur x-Achse bewegt. Der Stoßparameter b bezeichnet den Abstand zwischen der Bahnkurve und der x-Achse. Die beiden Kugeln stoßen voll elastisch miteinander. Reibung kann vernachlässigt werden.

3.a) Berechne die Impulse $\vec{p}'$ und $\vec{P}'$ der Kugeln bezüglich des Tisches nach dem Stoß.

3.b) Berechne die Impulse relativ zum Schwerpunktsystem.

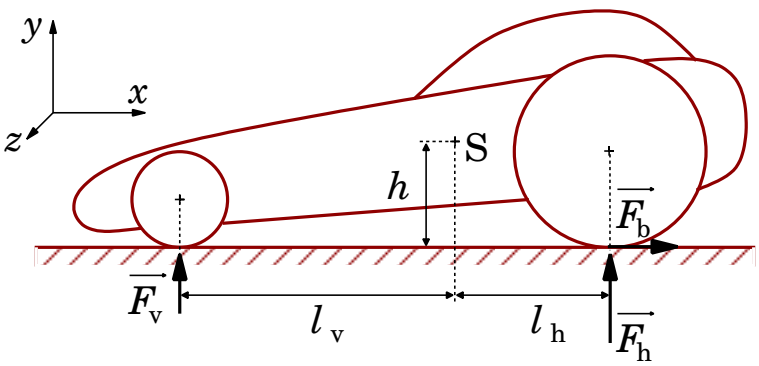
Hinweis: Die Teilaufgabe b) gestaltet sich einfacher, wenn man ein gedrehtes Koordinatensystem einführt.

Werkzeug:

$$\cos(\arcsin x) \quad = \quad \sqrt{1 - x^2}$$

Aufgabe 4

Rennwagen



Bei Sprintrennen wird ein Rennwagen benötigt, der möglichst gut beschleunigen (und anschließend wieder gut bremsen) kann. Ein Problem ist dabei, dass die Reifen durchdrehen, wenn die Kraft der Reifenoberfläche auf den Straßenbelag F_b zu groß wird (es gilt dann nicht mehr Haftreibung, sondern Gleitreibung). Die „maximale“ Beschleunigungskraft beträgt $F_\mathrm{b} = \mu F_\mathrm{h}$. Dabei ist μ der Haftreibungskoeffizient und F_h die Kraft auf die Hinterräder. Der Wagen hat die Masse m. Es wirkt die Schwerebeschleunigung der Erde.

4.a) Stelle die Gleichung für das Gleichgewicht der Kräfte auf.

4.b) Stelle die Gleichung für das Momentengleichgewicht um eine Drehachse auf, die durch die Auflagepunkte der Hinterräder läuft. Es ist zu berücksichtigen, dass die Beschleunigungskraft am Schwerpunkt angreift.

4.c) Wie groß sind die Normalkräfte F_v und F_h auf den Straßenbelag?

4.d) Die maximale Beschleunigung kann man erreichen wenn $F_\mathrm{v} \to 0$. Warum? Was ist unter Berücksichtigung dieser Bedingung die maximal mögliche Beschleunigung b? Wie muss dafür das Auto konstruiert sein? (Beziehung zwischen l_h, h und μ).

4.e) In welcher Zeit kann der Rennwagen aus dem Stand eine Geschwindigkeit von 100 km/h erreichen, wenn zwischen Hinterreifen und Straße ein Haftreibungskoeffizient von $\mu = 0.9$ herrscht? Welche Strecke legt er dabei zurück?

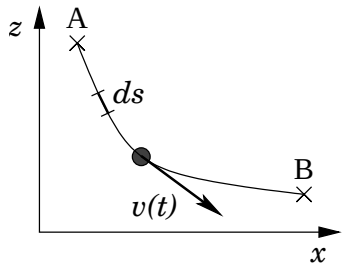
Vorsicht: leichte Aufgabe!

Übungsblatt 6

Vorrechnen & Diskussion: 14.12.2005

Aufgabe 1

Das Brachystochronenproblem

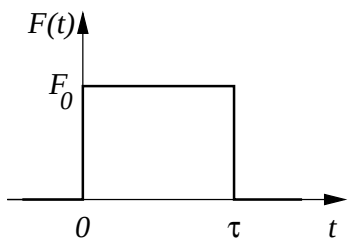


Gegeben sind zwei Punkte in der x-z-Ebene, die durch einen (fiktiven) Draht verbunden werden. Durch die Schwerkraft $g\vec{e}_z$ gleitet eine Perle auf dem Draht reibungsfrei vom höher gelegenen Punkt A zum tieferen Punkt B (bei Punkt A hat sie eine vernachlässigbar kleine Geschwindigkeit). Bei welcher Form des Drahtes ($\hat{=}$ Bahnkurve der Perle) ist die Zeit, die die Perle von A nach B braucht minimal? Löse diese Aufgabe mit Hilfe der Variationsrechnung.

Hinweise: Mit der Substitution $z = \mathcal{Z} - \frac{1}{4gC^2}(1 - \cos\alpha)$ lässt sich das auftretende Integral einfacher lösen. Dabei ist $\mathcal{Z}$ geeignet zu wählen und α ist ein freier Parameter. C ist ein Integrationsparameter, den man anhand der Anfangsbedingungen (x_A, z_A) und (x_B, z_B) bestimmen könnte. Diese Rechnung ist jedoch etwas langatmig und wird nicht verlangt. Die Bahnkurve braucht nicht explizit angegeben werden (Parameterdarstellung in Abhängigkeit von α reicht).

Aufgabe 2

Inhomogener Oszillator



In der letzten Übungsstunde wurde die Lösung inhomogener Differentialgleichungen mittels GREEN'scher Funktionen in einem Referat vorgestellt. In dieser Aufgabe soll dieses tolle Verfahren ausprobiert werden: Ein gedämpfter harmonischer Oszillator wird für eine Zeit τ mit einer konstanten Kraft F_0 angetrieben. Vor dieser Anregung befand sich der Oszillator in Ruhe.

Oszillatorgleichung:

$$m\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x \quad = \quad F_0 \cdot (\theta(t) - \theta(t - \tau))$$

HEAVISIDE'sche Sprungfunktion:

$$\theta(t) \;=\; \int_{-\infty}^{t} \delta(t')\,dt' \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

GREEN's Funktion für den gedämpften harmonischen Oszillator im Schwing- und Kriechfall:

$$G(t) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

sowie im aperiodischen Grenzfall:

$$G(t) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{t}{m} e^{\lambda t} & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

mit

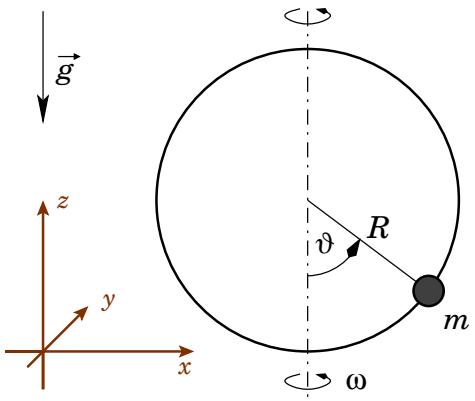
$$\lambda_{1/2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2} \qquad \lambda = -b$$

2.a) Berechne $x(t)$ für alle Fälle.

2.b) Diskutiere $x(t)$ für die Zeitintervalle $t < 0$, $0 \leq t \leq \tau$ und $t > \tau$.

Aufgabe 3

Perle am rotierenden Ring



Eine Perle der Masse m kann reibungslos auf einem Ring mit dem Radius R gleiten. Nun soll die Bewegung der Perle im Schwerefeld $\vec{g}$ untersucht werden, wenn sich der Ring um eine Drehachse parallel zu $\vec{g}$ dreht. Die Drehachse soll oben und unten durch den Ring gehen.

3.a) Formuliere die Zwangsbedingungen.

3.b) Wie lautet die LAGRANGE'sche Bewegungsgleichung?

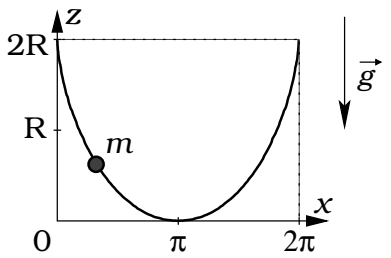
3.c) Integriere die Bewegungsgleichung für kleine ϑ.

Übungsblatt 7

Vorrechnen & Diskussion: 21.12.2005

Aufgabe 1

Zykloidenpendel



Eine Perle gleitet unter Einfluss der Schwerkraft $g\vec{e}_z$ reibungsfrei auf einem Draht. Dieser ist als Zykloide geformt, d.h. die Bahn der Perle genügt den Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= R(\alpha - \sin\alpha) \\ z &= R(1 + \cos\alpha) \qquad \text{mit } 0 \leq \alpha \leq 2\pi \end{aligned}$$

1.a) Stelle die LAGRANGE-Funktion auf.

1.b) Bestimme $\ddot{u}$ für $u = \sin\frac{\varphi(t)}{2}$

1.c) Bestimme die Bewegungsgleichung der Perle.

1.d) Löse die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen $z(0) = z_0$ und $\dot{\alpha}(0) = 0$

1.e) Berechne die Dauer einer Periode T in Abhängigkeit von der Auslenkung z_0.

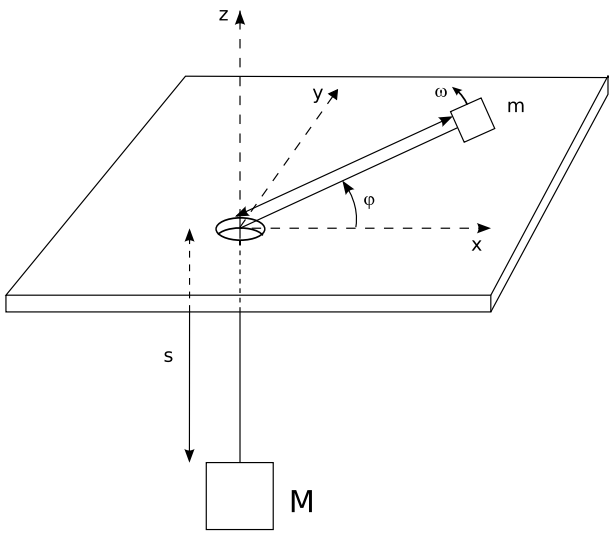
Werkzeug:

$$(1 + \cos\varphi) = 2\cos^2\frac{\varphi}{2} \qquad \sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$\sin(\arccos x) = -x + \frac{\pi}{2} \qquad \text{für } 1- \leq x \leq 1$$

Aufgabe 2

Kraft einer rotierenden Masse



Eine Masse m rotiert reibungslos auf einer Tischplatte. Über einen Faden der Länge l ($l = r + s$), der durch ein Loch in der Platte verläuft, ist m mit einer anderen Masse M verbunden. Es ist die Bewegung von m und M unter Einfluss der Schwerkraft $g\vec{e}_z$ zu untersuchen.

2.a) Formuliere und klassifiziere die Zwangsbedingungen.

2.b) Stelle die LAGRANGE-Funktion auf und leite die Bewegungsgleichung her.

2.c) Unter welchen Bedingungen rutscht die Masse M nach oben, wann nach unten?

2.d) Diskutiere den Spezialfall $\omega = 0$.

Aufgabe 3

Zwangsbedingungen

3.a) Zeige, dass die differentiellen Zwangsbedingungen für das in der Ebene rollende Rad nicht-holonom sind.

3.b) Überprüfe die Integrabilitätsbedingung für die Zwangsbedingung einer uniform rotierenden (schiefen) Ebene. Die Rotationsachse liegt in der Ebene.

Aufgabe 4

Krummlinige Koordinatensysteme

Viele Probleme in der Physik lassen sich durch die Wahl geeigneter krummliniger Koordinaten wesentlich vereinfachen. Häufig sind Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten geeignet, da viele physikalische Probleme zylinder- oder kugelsymmetrisch sind. In dieser Aufgabe soll die Bewegung eines Massenpunkts in diesen Darstellungen bestimmt werden. Die dadurch gewonnen Erkenntnisse können sicher bei einigen anderen Problemen zu gebrauchen sein.

4.a) Zylinderkoordinaten:

1) Stelle den Ort eines Massenpunktes in Zylinderkoordinaten (Einheitsvektoren) dar.
2) Berechne die Ableitung der Einheitsvektoren allgemein.
3) Berechne Geschwindigkeit und kinetische Energie eines beliebig beschleunigten Massenpunktes.
4) Berechne Geschwindigkeit und kinetische Energie eines Massenpunktes, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t)$ und der Geschwindigkeit $\dot{z}$ auf einem Zylindermantel bewegt.

4.a) Kugelkoordinaten:

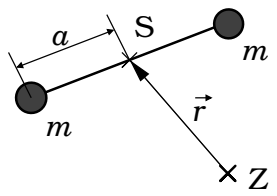
1) Stelle den Ort eines Massenpunktes in Kugelkoordinaten (Einheitsvektoren) dar.
2) Berechne die Ableitung der Einheitsvektoren allgemein.
3) Berechne Geschwindigkeit und kinetische Energie eines beliebig beschleunigten Massenpunktes.
4) Berechne Geschwindigkeit und kinetische Energie eines Massenpunktes, der sich mit den Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}(t)$ und $\dot{\vartheta}$ auf einer Kugeloberfläche bewegt.

Übungsblatt 8

Vorrechnen & Diskussion: 11.01.2006

Aufgabe 1

Hantel II



Zwei gleich schwere Massen m sind durch eine (masselose) Stange der Länge $2a$ miteinander verbunden. Diese Hantel befindet sich in einem Gravitationspotential $U = -\gamma \frac{m}{r}$ mit dem Zentrum in Z. Um die Rechnung zu vereinfachen, kann davon ausgegangen werden, dass sich die beiden Massenpunkte nur in einer Ebene, in der auch Z und der Schwerpunkt liegen, bewegen können.

1.a) Formuliere die Zwangsbedingungen und führe geeignete Koordinaten ein.

1.b) Stelle die LAGRANGE-Funktion auf und leite die Bewegungsgleichungen her.

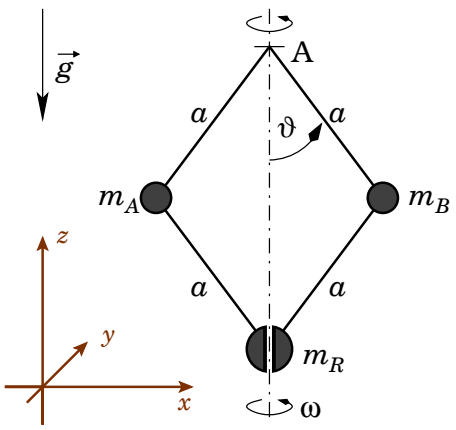
1.c) Definiere Eigen-, Bahn- und Gesamtdrehimpuls. Welche dieser Größen sind konstant und warum?

1.d) Entwickle die LAGRANGE-Gleichungen nach Potenzen von a/r bis zur 2. Ordnung.

1.e) Zeige, dass für $a/r \ll 1$ die Bahnbewegung von der Eigendrehbewegung (näherungsweise) entkoppelt.

Aufgabe 2

Fliekraftregler



Ein Fliehkraftregler ist ein mechanisches Instrument, das in vielen technischen Anwendungen eingesetzt wurde (wird). Die Arbeitsweise beruht darauf, dass sich bei der Rotation von zwei Massen an gelenkig befestigten Stangen eine von der Rotationsgeschwindigkeit abhängige Gleichgewichtsposition einstellt. Mittels geeigneter Vorrichtungen, die auf diese Positionen ansprechen, kann man in Abhängigkeit von der Rotationsgeschwindigkeit die Arbeitsweise von Maschinen regulieren.

Zwei (gewichtslose, starre) Stangen der Länge a sind an einem vertikalen, uniform rotierenden Stab gelenkig befestigt. Sie liegen in einer Ebene. Am Ende jeder Stange sitzt eine Fliehmasse $m_A = m_B = m$. Gelenkig verbunden sind zwei weitere Stangen der Länge a, die an einem Reiter mit der Masse m_R befestigt sind. Der Reiter kann sich (reibungsfrei) entlang der Vertikalen ($\vec{e}_z$) bewegen. Alle drei Massen werden als punktförmig behandelt. Das ganze System dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Vertikale, die Massen sind der einfachen Gravitation $g\vec{e}_z$ ausgesetzt.

2.a) Zeige, dass das System nur einen Freiheitsgrad hat.

2.b) Welche generalisierten Koordinaten könnten geeignet sein?

2.c) Stelle die kartesischen Koordinaten der Massenpunkte und ihre Ableitungen in Abhängigkeit von ϑ auf.

2.d) Stelle die LAGRANGE-Funktion für ϑ als generalisierte Koordinate auf.

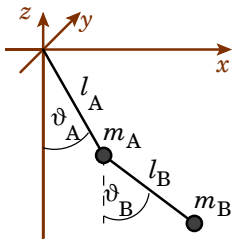
2.e) Bestimme die Bewegungsgleichung des Fliehkraftreglers.

2.f) Bestimme die Gleichgewichtssituationen, die bei der uniformen Drehung auftreten können.

2.g) Untersuche die Bewegung des Fliehkraftreglers für kleine Auslenkungen $z_R = z_0 + \delta z$ aus dem Gleichgewicht z_0

Aufgabe 3

Doppelpendel



In diese Aufgabe ist ein Doppelpendel im Schwerefeld der Erde $g\vec{e}_z$ mit dem LAGRANGE–Formalismus zu untersuchen.

3.a) Formuliere und klassifiziere die Zwangsbedingungen. Wie viele Freiheitsgrade hat das System?

3.b) Wähle geeignete generalisierte Koordinaten für das Doppelpendel.

3.c) Bestimme die LAGRANGE-Funktion des Systems.

3.d) Leite die Bewegungsgleichungen her.

3.e) Bestimme die Bewegungsgleichungen eines Doppelpendel mit gleichen Stangen $l_A = l_B = l$ und gleichen Massen $m_A = m_B = m$ für kleine Auslenkungen $\vartheta_A, \vartheta_B \ll 1$ und damit kleine Geschwindigkeiten $\dot{\vartheta}_A, \dot{\vartheta}_B$.

3.f) Löse die Bewegungsgleichungen mit dem Ansatz

$$\vartheta_A = \mathcal{C}_A e^{i\omega t} \qquad \vartheta_B = \mathcal{C}_B e^{i\omega t}$$

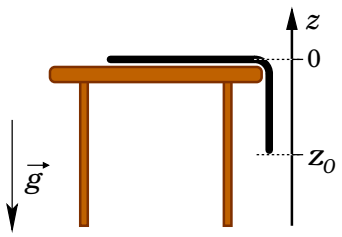
3.g) Bestimme die Abhängigkeit zwischen $\mathcal{C}_A$ und $\mathcal{C}_B$

Übungsblatt 9

Vorrechnen & Diskussion: 18.01.2006

Aufgabe 1

Abrutschendes Seil



Ein Seil der Länge l und der (homogen verteilten) Masse m hängt mit der Länge $a < l$ über einer Tischkante. Nach dem Loslassen zur Zeit $t = 0$ fängt das Seil an, reibungsfrei über die Tischkante zu gleiten. Das System steht im homogenen Gravitationsfeld $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Bestimme die Bewegungsgleichung für z.

Aufgabe 2

Dissipationsfunktionen

Berechne die Dissipations- und LAGRANGE-Funktionen folgender Systeme.

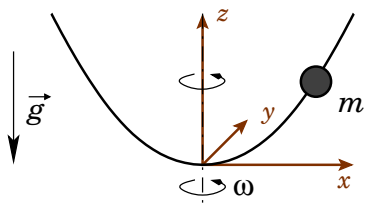
2.a) Sphärisches Federpendel in viskoser Flüssigkeit (laminar).

2.b) Frei bewegliche Hantel mit zwei gleich schweren Massen in viskoser Flüssigkeit (laminar).

2.c) Kreisförmige, homogene Scheibe, die auf einer ebenen Unterlage um ihren Schwerpunkt rotiert.

Aufgabe 3

Perle auf rotierender Parabel



Auf einem parabelförmigen Draht, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotiert, kann sich eine Perle reibungsfrei bewegen. Zur Zeit $t = 0$ kann die Form des Drahtes durch $z = ax^2$ beschrieben werden. Die Schwerkraft wirkt in negativer z-Richtung.

3.a) Stelle die Zwangsbedingungen auf und klassifiziere sie.

3.b) Berechne die LAGRANGE-Funktion.

3.c) Zeige, dass für $\omega = \sqrt{2ag}$ die Perle im Gleichgewicht steht.

3.d) Stelle die Bewegungsgleichungen auf und zeige, dass die Gesamtenergie

$$E = \frac{m}{2}\left(1 + 4a^2r^2\right)\dot{r}^2 - \frac{m}{2}\left(\omega^2 - 2ga\right)r^2$$

erhalten bleibt.

Aufgabe 4

Teilchen auf geneigter Ebene

Bestimme die Bewegungsgleichungen eines Teilchens, das auf einer um α geneigten Ebene mit Reibung gleitet. (Bei $\alpha = 0$ ist der Normalenvektor der Ebene genau antiparallel zur Gravitationskraft)

Übungsblatt 10

Vorrechnen & Diskussion: 25.01.2006

Aufgabe 1

Das Kepler-Problem nach Newton

In der NEWTON'schen Formulierung der Mechanik werden zwei (isotrop) wechselwirkende Massenpunkte durch die gekoppelten Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\vec{r}}_1 &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot f_{21}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 &= -(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot f_{21}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \end{aligned}$$

dargestellt. Ist die Gravitation für die Wechselwirkung verantwortlich, so ist

$$f_{21} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

1.a) Transformiere die (gekoppelten) Bewegungsgleichungen auf Schwerpunkts- und Relativkoordinaten.

1.b) Löse die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt

1.c) Bei der Relativbewegung gilt Drehimpulserhaltung (L =const.). Das bedeutet, dass die Bewegung der beiden Körper in einer Ebene stattfindet. Wähle also geeignete ebene Polarkoordinaten zur Formulierung der Gleichung der Relativbewegung.

1.d) Löse die Bewegungsgleichung für die Winkelkoordinate und setze sie in die Radialgleichung ein.

1.e) Zeige, dass NEWTON's Bewegungsgleichungen der Gravitation beim Übergang von kartesischen nach Polarkoordinaten nicht forminvariant sind.

Aufgabe 2

Inverses Keplerproblem

Beim inversen KEPLER-Problem geht es darum, aus einem gegebenem Orbit $r(\varphi)$ die wirkenden Kräfte bzw. das Potential zu finden. Eigentlich könnte man zur gegebenen Bahn $r(\varphi)$ beliebig viele Kraftfelder $\vec{F}(\vec{r})$ finden, die ein Körper auf dieser Bahn halten könnten. Erst wenn man weiß, dass es sich um ein Zentralkraftproblem handelt, kann man die Größe $f(r) = -\frac{dV}{dr}$ und damit das Kraftgesetz eindeutig aus der Bahnbewegung herleiten. (Die Form von $f(r)$ und andere Hinweise erhält man durch Lösen von Aufgabe 1.c) .)

2.a) Beweise

$$-\frac{dV}{dr} = f(r) = \frac{p_\varphi^2}{mr^4}\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\right)$$

2.b) Ein Körper bewegt sich auf einem elliptischen Orbit $r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ in einem Zentralkraftfeld, wobei das Zentrum in einem Brennpunkt liegt. Zeige, dass $f(r) \sim r^{-2}$ gilt.

2.c) In einem anderen Zentralkraftfeld bewegt sich ein Körper auf der Bahn $r(\varphi) = r_0 e^{-\varphi}$. Zeige dass das Kraftfeld mit r^{-3} abnimmt.

Aufgabe 3

Drittes Kepler'sches Gesetz

Beweise, dass bei Planetenbewegungen näherungsweise das 3. Keplergesetz

$$T^2 \sim a^3$$

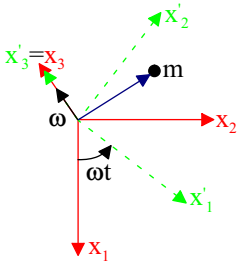
(Quadrate der Umlaufzeiten sind proportional zur dritten Potenz der großen Halbachse) gilt. Untersuche den Proportionalitätsfaktor für unser Sonnensystem.

Übungsblatt 11

Vorrechnen & Diskussion: 01.02.2005

Aufgabe 1

Rotierendes Bezugssystem



In der Vorlesung wurden die Bewegungsgleichungen

$$
\begin{aligned}
S: \; m\vec{a} &= -\vec{\nabla} U(\vec{r}) \\
\breve{S}: \; m\breve{\vec{a}} &= -m\left(\dot{\vec{\omega}} \times \breve{\vec{r}}\right) - 2m\left(\vec{\omega} \times \breve{\vec{v}}\right) \quad \text{(B.2)} \\
&\quad - m\vec{\omega} \times \left(\dot{\vec{\omega}} \times \breve{\vec{r}}\right) - \breve{\vec{\nabla}} U(\breve{\vec{r}}) \quad \text{(B.3)}
\end{aligned}
$$

für die Bewegung eines Massenpunktes aus Sicht eines inertialen Bezugssystems S und eines rotierenden $\breve{S}$ abgeleitet.

In der Vorlesung wurde angemerkt, dass der Ortsvektor des Massenpunktes unabhängig von der gewählten Darstellung ist

$$
\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3} \breve{x}_i \breve{\vec{e}}_i = \breve{\vec{r}}
$$

solange der Ursprung $0 = \breve{0}$ gleich bleibt.

1.a) Bestimme die $\breve{\vec{e}}_i$ in Abhängigkeit von $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ sowie die $\breve{x}_i$ in Abhängigkeit von (x_1, x_2, x_3) für die in der Grafik dargestellten Drehung.

1.b) Zeige für diese Bezugssysteme durch Rechnung mit Komponenten

$$
\vec{v} = \breve{\vec{v}} + \vec{\omega} \times \breve{\vec{r}}
$$

1.c) Leite die Bewegungsgleichungen für dieses spezielle rotierende Bezugssystem her. Die allgemeine Form (B.3) sollte höchstens zur Kontrolle benutzt werden.

Aufgabe 2

Bewegung im rotierenden Bezugssystem

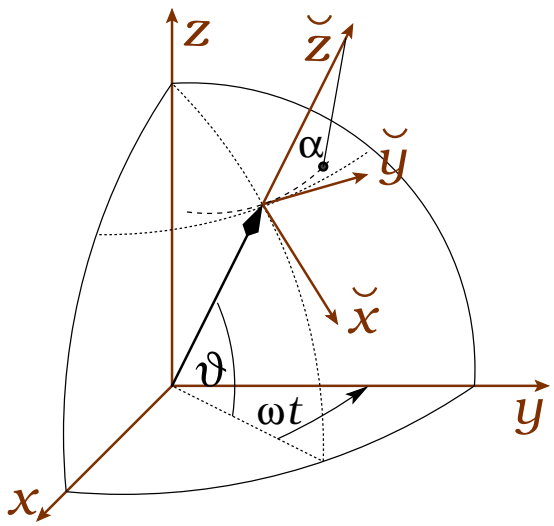
In dieser Aufgabe wird wieder ein Massenpunkt in einem Inertialsystem und einem uniform rotierenden Bezugssystem betrachtet. Der Massenpunkt bewegt sich dieses Mal im Inertialsystem mit konstanter Geschwindigkeit v entlang der x-Achse. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich der Massenpunkt im Ursprung beider Bezugssysteme.

Wie bewegt sich der Massenpunkt aus Sicht eines rotierenden Beobachters?

Hinweis: Eine Möglichkeit, die gekoppelten Differentialgleichungen zu lösen besteht darin, die doppelte bzw. einfache Ableitung ineinander einzusetzen.

Aufgabe 3

Foucault'sches Pendel



Der Französische Physiker Jean Bernard Foucault (1819 - 1868) hat in den Jahren 1850 und 1851 mit Hilfe eines Fadenpendels nachgewiesen, dass die Erde um ihre Polachse rotiert. Eine nach dem gleichen Prinzip arbeitende Versuchsanordnung nennt man Foucault'sches Pendel. Berechne in der Näherung kleiner Ausschläge, wie sich die Schwingungsebene eines 30 kg schweren Pendels der Länge $l = 50\,\mathrm{m}$ aufgrund der Erdrotation dreht. Gib die Rotationsdauer in Abhängigkeit von der geografischen Breite an.

Hinweise:

- Verwende dabei $\breve{x}$ und $\breve{y}$ als generalisierte Koordinaten.
- Alle Terme der Ordnung ω^2 und mit $\dot{z}$ können vernachlässigt werden.

Übungsblatt 12

Vorrechnen & Diskussion: 08.02.2005

Aufgabe 1

Kreuzprodukt und Levi-Civita-Symbol

In dieser Aufgabe sollen das Kreuzprodukt und einige Verknüpfungen mit diesem in Indexschreibweise dargestellt werden. Dabei wird das LEVI-CIVITA-Symbol verwendet:

$$\epsilon_{ijk...} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j,k,...) \text{ eine zyklische Permutation von } (1,2,3,...) \text{ ist} \\ -1 & \text{falls } (i,j,k,...) \text{ eine antizyklische Permutation von } (1,2,3,...) \text{ ist} \\ 0 & \text{falls mindestens zwei Indizes gleich sind} \end{cases}$$

Eine Eigenschaft des LEVI-CIVITA-Symbols ist

$$\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \tag{B.4}$$

wobei δ_{ij} das KRONECKER-delta ist mit

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

1.a) Stelle die x_i-Komponente des Kreuzproduktes in Indexschreibweise dar. Ergebnis:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i$$

1.b) Beweise die Relation

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) - \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right) \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$$

und stelle sie in Indexschreibweise dar. Notiere den Sonderfall $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2$

1.c) Beweise die Relation

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \quad = \quad \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$$

und stelle sie in Indexschreibweise dar. Notiere den Sonderfall $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{c})$.

Aufgabe 2

Trägheitsmomente

Berechne die Trägheitstensoren für Drehungen um den Schwerpunkt für folgende homogene Körper in geeigneten körperfesten Koordinatensystemen.

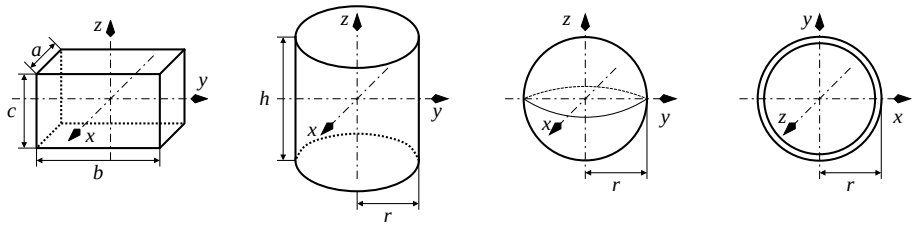


Abbildung B.5: Starre Körper mit ihren Hauptträgheitsachsen x,y und z

2.a) Quader mit den Seitenlängen a, b und c

2.b) Zylinder mit der Höhe h und dem Radius r

2.c) Kugel mit dem Radius r

2.d) dünner Reifen mit dem Radius r

Aufgabe 3

Satz von Steiner

Ein Trägheitstensor $\mathbf{\Theta}$ ist bezüglich eines körperfesten Bezugssystems $S : (x_1, x_2, x_3)$ mit dem Ursprung im Schwerpunkt gegeben. Mit Hilfe des Satzes von STEINER kann man daraus den Trägheitstensor $\mathbf{\Theta}'$ bezüglich eines um $\vec{a}$ verschobenen Bezugssystems $S' : (x'_1, x'_2, x'_3)$ berechnen (die beiden Koordinatensysteme sind nicht ineinander verdreht).

3.a) Beweise den Satz von STEINER:

$$\Theta'_{ij} = \Theta_{ij} + m \left(\delta_{ij} \sum_{k=1}^{3} a_k^2 - a_i a_j \right)$$

3.b) Berechne $\mathbf{\Theta}$ für einen homogenen Würfel der Kantenlänge s bezüglich eines Bezugssystems in einer Ecke des Würfels. Verwende dazu den in Aufgabe 2.a) berechneten Trägheitstensor und den Satz von STEINER.

3.c) Finde die Hauptträgheitsmomente von $\mathbf{\Theta}$ des Würfels (an der Ecke aufgehängt) durch Diagonalisieren.

Hinweis: Die Diagonalisierung von $\mathbf{\Theta}$ ist elementar aber umfangreich. Es wird empfohlen, das Problem numerisch zu lösen.

Literaturverzeichnis

[Blö] Blöchl, P.: *Theoretische Physik I: Klassische Mechanik*. Internetadresse: http://www.pt.tu-clausthal.de/atp/education.shtml.

[DL] Dreizler, R. M. und Lüdde, C. S.: *Theoretische Physik 1*. Springer.

[Fey] Feynman, Richard P.: *Vorlesungen über Physik, Band 1*. Oldenbourg.

[Fli] Fliessbach, T.: *Mechanik*. Spektrum.

[For] Forster, O.: *Analysis I*. Vieweg.

[Gol] Goldstein, H.: *Klassische Mechanik*. Aula, Wiesbaden.

[Gre] Greiner, W.: *Theoretische Physik 1+2*. H. Deutsch, Frankfurt.

[Jel] Jelitto, R.: *Theoretische Physik 1+2*. Aula, Wiesbaden.

[Kuy] Kuypers, F.: *Klassische Mechanik*. Wiley-VCH.

[Lin] Linhard, F.: *Klassische Mechanik*. Fischer, Frankfurt 2002.

[LL] Landau, L.D. und Lifschitz, E.M.: *Mechanik*. H. Deutsch, Frankfurt.

[Lüc] Lücke, W.: *Mathematische Methoden der Physik*. Internetadresse: http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/etp.html.

[Nol] Nolting, W.: *Grundkurs Theoretische Physik I+II*. Springer.

[Sch] Scheck, F.: *Theoretische Physik 1*. Springer.

[Som] Sommerfeld, A.: *Vorlesungen über Theoretische Physik 1: Mechanik*. H. Deutsch, Frankfurt.

[WH] Wachter, A. und Haeber, H.: *Repititorium Theoretische Physik*. Springer, Berlin 1998.