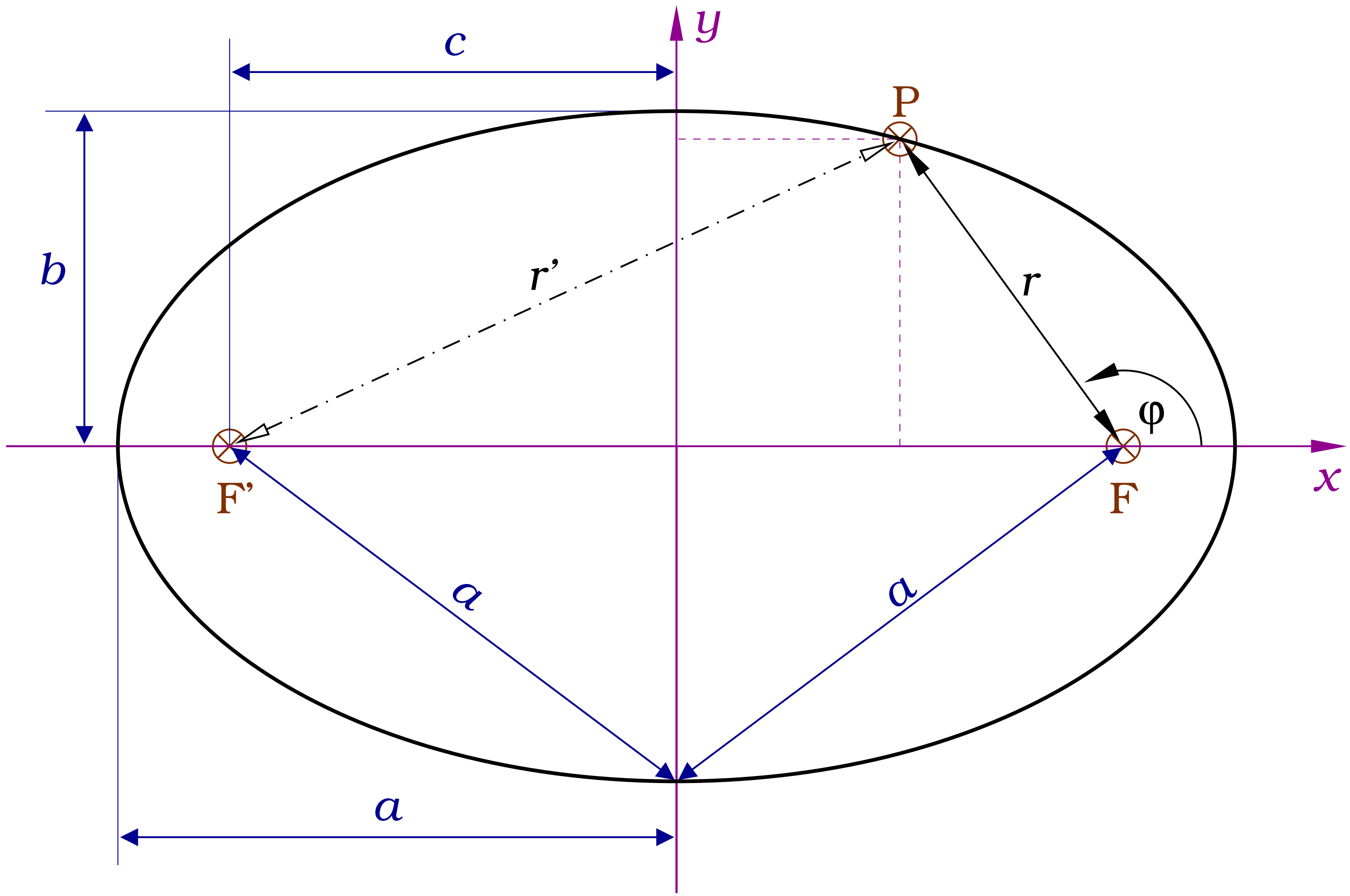
Kegelschnitte

Tobias Spranger, Tom Kirchner

Institut für Theoretische Physik, TU Clausthal

17.01.2006

Ellipse



Eine Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei Brennpunkten F und F' der Entfernung $2c$ den gleichen Abstand $r + r' = 2a$ haben. Es gilt:

$$a^2 \;=\; c^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} \;:=\; \varepsilon a \qquad 0 < \varepsilon < 1$$

Ellipse

Bahn $r(\varphi)$ in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
2a &= r + r' \\
2a &= r + \sqrt{r^2 + (2c)^2 + 2(2c)r\,\cos\varphi} \\
\Leftrightarrow (2a - r)^2 &= r^2 + 4c^2 + 4cr\,\cos\varphi \\
\Leftrightarrow 4a^2 - 4ar &= 4c^2 + 4cr\,\cos\varphi \\
\Leftrightarrow a^2 - c^2 &= (a + c\,\cos\varphi)r \\
\Leftrightarrow r &= \frac{a^2 - \varepsilon^2 a^2}{a + \varepsilon a\,\cos\varphi} \\
r &= a\frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon\,\cos\varphi} \\
r &= \frac{p}{1 + \varepsilon\,\cos\varphi} \qquad \text{mit } p = a(1 - \varepsilon^2)
\end{aligned}$$

Ellipse

Bahn $r(x, y)$ in kartesischen Koordinaten:

$$r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad r' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

damit kann man aus

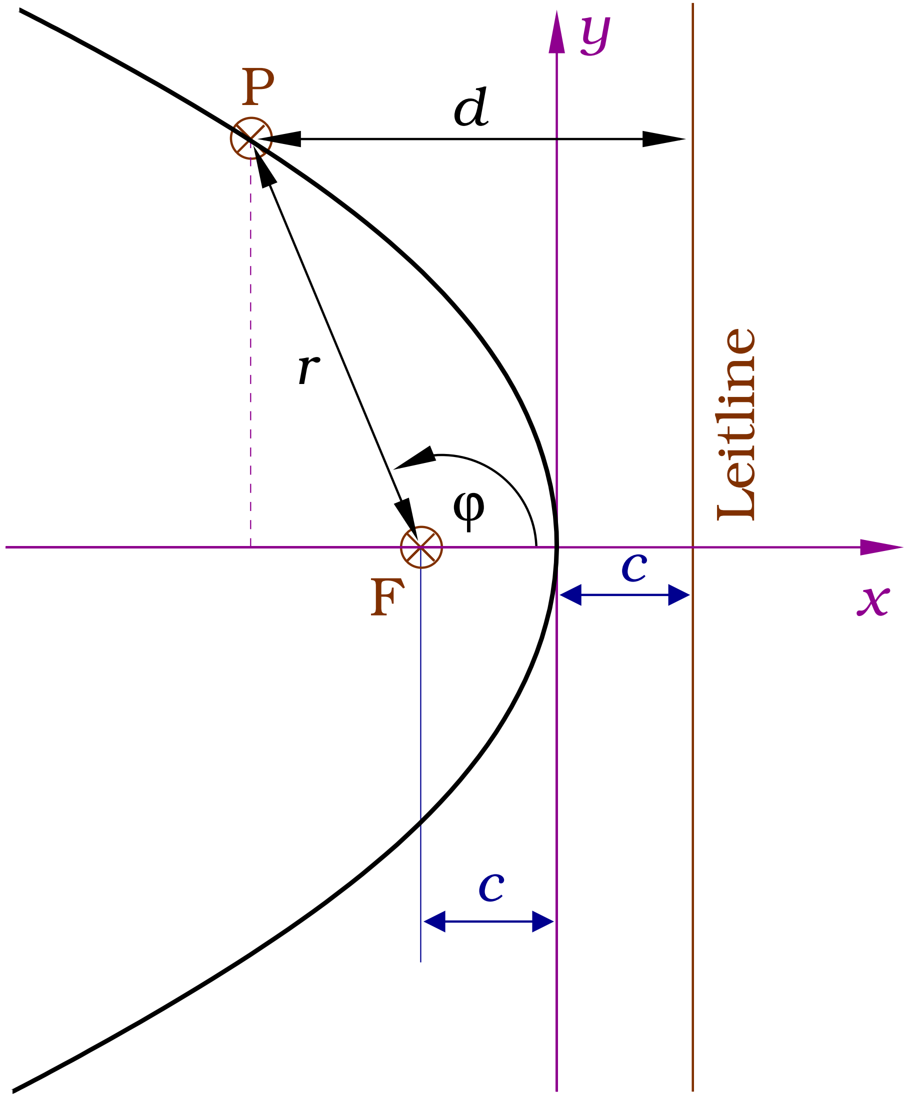
$$2a = r + r'$$

die implizite Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit $b^2 = a^2 - c^2$ herleiten.

Parabel



Eine Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, für die gilt:

$$r = d$$

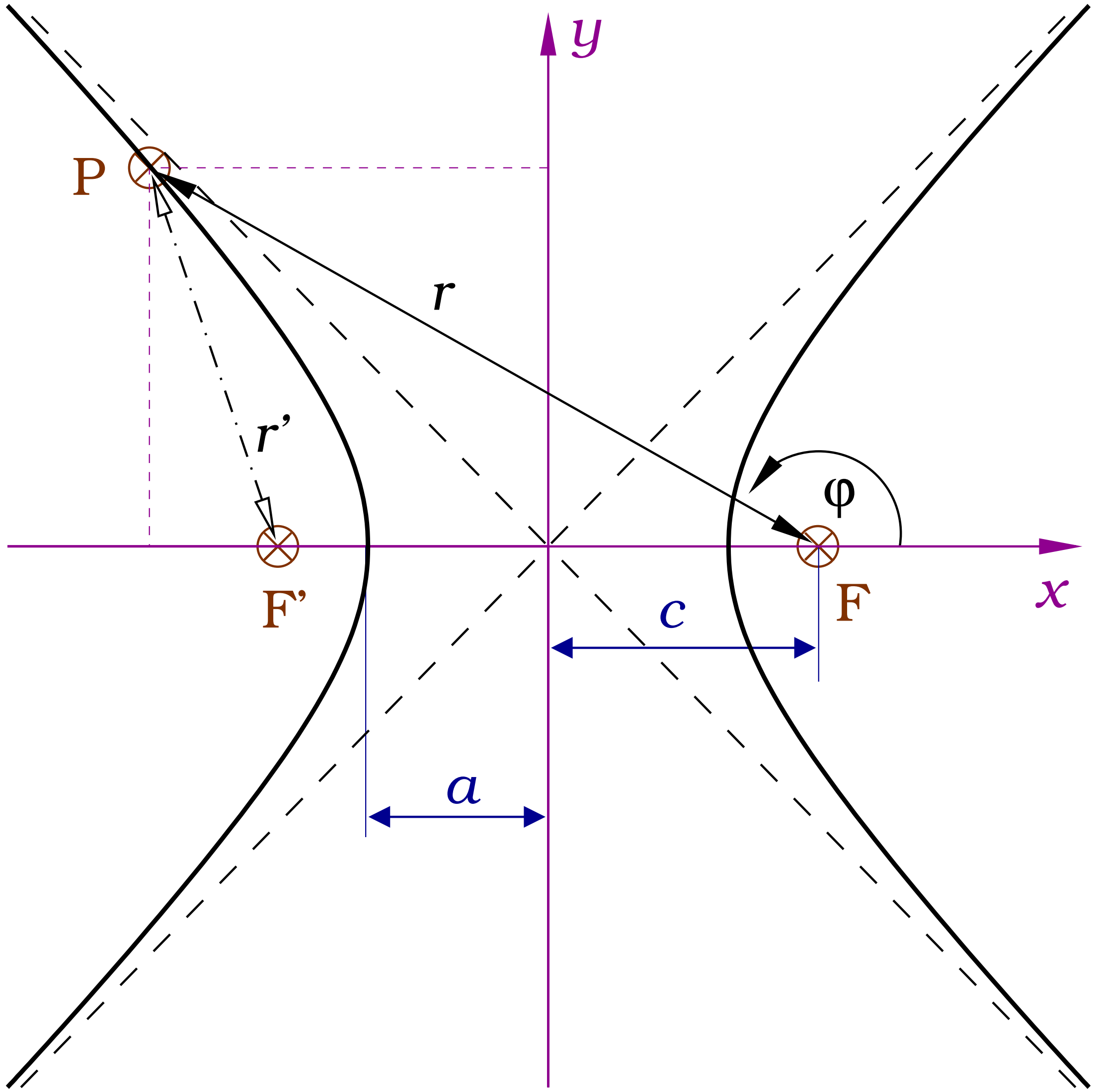
oder

$$\begin{aligned} r &= c + x = 2c - r\cos\varphi \\ \Rightarrow r &= \frac{2c}{1+\cos\varphi} \qquad \left(= \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}\right) \end{aligned}$$

weiter ist abzulesen:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(c-x)^2 + y^2} \\ \Rightarrow (c+x)^2 &= (c-x)^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow y^2 &= 4cx \end{aligned}$$

Hyperbel



Eine Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, mit

$$2a = r - r'$$
$$2a = r - \sqrt{r^2 + 4c^2 + 4cr\ \cos\varphi}$$

mit $c = \varepsilon a$ für $\varepsilon > 1$ folgt:

$$r = a\frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$
$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\ \cos\varphi}$$

mit $p = a(1-\varepsilon^2)$

$$\frac{x^{\ 2}}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit $b^2 = c^2 - a^2$