Übungsblatt 0

Lösungsvorschlag

3 Aufgaben, 0 Punkte

Aufgabe 1

0 P

Kreisbewegung in verschiedenen Basissystemen

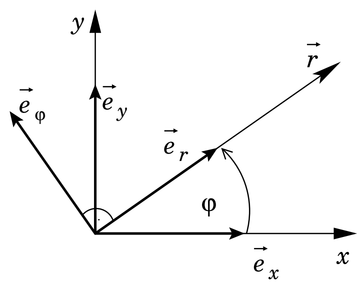

Abbildung 1: Polarkoordinaten

1.a) Stelle die Einheitsvektoren der Polardarstellung $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$ in kartesischen Koordinaten dar.

Der Einheitsvektor $\vec{e}_r$ ist der Richtungsvektor von $\vec{r}$:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r &= \frac{\vec{r}}{R} \\
\vec{e}_r &= \frac{R\cos\omega t \cdot \vec{e}_x + R\sin\omega t \cdot \vec{e}_y}{R} \\
\vec{e}_r &= \cos\omega t \cdot \vec{e}_x + \sin\omega t \cdot \vec{e}_y
\end{aligned}$$

Der Einheitsvektor $\vec{e}_\varphi$ steht senkrecht auf $\vec{e}_r$. Dabei wird das Vorzeichen so gewählt, dass $\vec{e}_\varphi$ dem Einheitsvektor $\vec{e}_r$ vorläuft. (Vergleiche auch: Rechssystem im Dreidimensionalen: $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \times \vec{e}_r$)

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\omega t \cdot \vec{e}_x + \cos\omega t \cdot \vec{e}_y$$

1.b) Berechne ihre Ableitung nach der Zeit t.

$$\begin{aligned}\dot{\vec{e}}_r &= \omega(-\sin\omega t \cdot \vec{e}_x + \cos\omega t \cdot \vec{e}_y) = \omega\vec{e}_\varphi \\ \dot{\vec{e}}_\varphi &= -\omega(\cos\omega t \cdot \vec{e}_x + \sin\omega t \cdot \vec{e}_y) = -\omega\vec{e}_r\end{aligned}$$

1.c) Wie lautet der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ in beiden Darstellungen?

(a) Kartesische Koordinaten:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= R\cos\omega t \cdot \vec{e}_x + R\sin\omega t \cdot \vec{e}_y \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\ \vec{v} &= \frac{d}{dt}R\cos\omega t \cdot \vec{e}_x + \frac{d}{dt}R\sin\omega t \cdot \vec{e}_y \\ \vec{v} &= -R\omega\sin\omega t \cdot \vec{e}_x + R\omega\cos\omega t \cdot \vec{e}_y \\ \vec{v} &= R\omega\begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(b) Polardarstellung:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= R\vec{e}_r(t) \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = R\dot{\vec{e}}_r(t) \\ \vec{v} &= R\omega\vec{e}_\varphi(t)\end{aligned}$$

1.d) Wie groß ist jeweils sein Betrag $v = |\vec{v}|$?

(a) Kartesische Koordinaten:

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{(-R\omega\sin\omega t)^2 + (R\omega\cos\omega t)^2} \\ v &= R\omega\sqrt{\sin^2\omega t + \cos^2\omega t} \\ v &= R\omega\end{aligned}$$

(b) Polardarstellung:

$$v = R\omega$$

1.e) Zeige das die Kreisbewegung den Flächensatz (s. Lücke, Kap 3.4) erfüllt.

Flächensatz[1]: $\dot{\vec{A}} = \frac{1}{2}\vec{x} \times \dot{\vec{x}}$

(a) Kartesische Koordinaten:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{A}} &= \frac{1}{2}R\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\\ 0\end{pmatrix} \times R\omega\begin{pmatrix}-\sin\omega t\\ \cos\omega t\\ 0\end{pmatrix}\\
\dot{\vec{A}} &= \frac{1}{2}R^2\omega\begin{pmatrix}0-0\\ 0-0\\ \cos^2\omega t + \sin^2\omega t\end{pmatrix}\\
\dot{\vec{A}} &= \frac{1}{2}R^2\omega\vec{e}_z = \text{const}
\end{aligned}$$

(b) Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{A}} &= \frac{1}{2}R\vec{e}_r \times R\omega\vec{e}_\varphi\\
&= \frac{1}{2}R^2\omega\vec{e}_z
\end{aligned}$$

1.f) Berechne mit dem Flächesatz die von der Bahnkurve eingeschlossene Fläche.

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \int_0^T \dot{\vec{A}}\,dt\\
&= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2}R^2\omega\vec{e}_z\,dt\\
&= \pi R^2\vec{e}_z
\end{aligned}$$

1.g) Wie lautet der Beschleunigungsvektor $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ in beiden Darstellungen?

[1] Hier muss eine dritte Koordinate (z) eigeführt werden, da das Kreuzprodukt nur im dreidimensioalen erklärt ist. Da sich die eigentliche Kreisbewegung nur entlang x und y bzw. r und φ zuträgt, muss $\vec{r}\cdot\vec{e}_z = \text{const}$ sein; es wird 0 gewählt.

(a) Kartesische Koordinaten:

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= -R\omega\left(\sin\omega t\cdot\vec{e}_x+\cos\omega t\cdot\vec{e}_y\right)\\
\vec{a} &= R\omega\left(-\frac{d\,\sin\omega t}{dt}\cdot\vec{e}_x+\frac{d\,\cos\omega t}{dt}\cdot\vec{e}_y\right)\\
\vec{a} &= R\omega\left(-\omega\cos\omega t\cdot\vec{e}_x-\omega\sin\omega t\cdot\vec{e}_y\right)\\
\vec{a} &= -R\omega^2\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(b) Polardarstellung:

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= R\omega\vec{e}_\varphi(t)\\
\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt}=R\omega\dot{\vec{e}}_\varphi(t)\\
\vec{a} &= R\omega\left(-\omega\vec{e}_r\right)\\
\vec{a} &= -R\omega^2\vec{e}_r
\end{aligned}$$

1.h) Wie groß ist jeweils sein Betrag $a=|\vec{a}|$?

(a) Kartesische Koordinaten:

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{(-R\omega^2\cos\omega t)^2+(-R\omega^2\sin\omega t)^2}\\
a &= R\omega^2\sqrt{\cos^2\omega t+\sin^2\omega t}\\
a &= R\omega^2
\end{aligned}$$

(b) Polardarstellung:

$$a = \left|-R\omega^2\vec{e}_r\right| = R\omega^2$$

Aufgabe 2

0 P

Gradient, Rotation und Divergenz

2.a) Berechne den Gradienten des skalaren Feldes $F(x,y,z)=F_0\left(x^2+y^2+z^2\right)$ in kartesischen Koordinaten und in Kugelkoordinaten.

(a) Kartesische Koordinaten

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}F(x,y,z) &= \vec{\nabla}F_0\left(x^2+y^2+z^2\right) \\
&= F_0\vec{\nabla}\left(x^2+y^2+z^2\right) \\
&= F_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)\vec{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+z^2\right)\vec{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+y^2+z^2\right)\right. \\
&= F_0\left(2x\vec{e}_x+2y\vec{e}_y+2z\vec{e}_z\right) \\
&= 2F_0\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(b) Kugelkoordinaten $x^2+y^2+z^2=r^2$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}F(r,\vartheta,\varphi) &= \vec{\nabla}F_0 r^2 \\
&= F_0\vec{\nabla}r^2 \\
&= F_0\left(\frac{\partial r^2}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial r^2}{\partial\vartheta}\vec{e}_\vartheta+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial r^2}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi\right) \\
&= 2rF_0\vec{e}_r
\end{aligned}$$

2.b) Berechne Rotation und Divergenz des Vektorfeldes

$$\vec{A} = A_o\begin{pmatrix} \frac{-x}{r^2+a^2} \\ \frac{-y}{r^2+a^2} \\ \frac{-z}{r^2+a^2} \end{pmatrix} \text{ mit } r^2=x^2+y^2+z^2 \text{ und } A_o, a\in\mathbf{R}$$

(a) Divergenz:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot A_o\begin{pmatrix} \frac{-x}{r^2+a^2} \\ \frac{-y}{r^2+a^2} \\ \frac{-z}{r^2+a^2} \end{pmatrix} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}) &= A_o\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{-x}{r^2+a^2}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{r^2+a^2}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{-z}{r^2+a^2}\right)
\end{aligned}$$

Betrachte die elemetaren Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x}r^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right) = 2x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{-x}{r^2+a^2} = \frac{(r^2+a^2)\frac{\partial}{\partial x}(-x)-(-x)\frac{\partial}{\partial x}r^2}{\left(r^2+a^2\right)^2} = \frac{-r^2-a^2+2x^2}{\left(r^2+a^2\right)^2} = \frac{x^2-y^2-z^2-a^2}{\left(r^2+a^2\right)^2}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}) &= A_o\left(\frac{x^2-y^2-z^2-a^2}{\left(r^2+a^2\right)^2}+\frac{y^2-x^2-z^2-a^2}{\left(r^2+a^2\right)^2}+\frac{z^2-x^2-y^2-a^2}{\left(r^2+a^2\right)^2}\right)\\
&= A_o\frac{-x^2-y^2-z^2-3a^2}{\left(r^2+a^2\right)^2}\\
&= -A_o\frac{r^2+3a^2}{\left(r^2+a^2\right)^2}
\end{aligned}
$$

(b) Rotation:

$$
\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{-x}{r^2+a^2}\\ \frac{-y}{r^2+a^2}\\ \frac{-z}{r^2+a^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\frac{-z}{r^2+a^2}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{-y}{r^2+a^2}\\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{-x}{r^2+a^2}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{-z}{r^2+a^2}\\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{-y}{r^2+a^2}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{-x}{r^2+a^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}
$$

2.c) Versuche ein Skalarfeld Φ zu finden, für das $\vec{\nabla}\Phi=\vec{A}$ gilt.

Da die Rotation verschwindet, gibt es ein Skalarfeld Φ dessen Gradient $\vec{A}$ ist.
Ansatz: $\Phi(x,y,z)=\mathcal{B}\ln(r^2+a^2)$

$$
\vec{\nabla}\mathcal{B}\ln(r^2) = \mathcal{B}\left(\frac{\partial\ln(r^2+a^2)}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial\ln(r^2+a^2)}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial\ln(r^2+a^2)}{\partial z}\vec{e}_z\right)
$$

Betrachte Koordinatenableitung:

$$
\frac{\partial\ln(r^2+a^2)}{\partial x} = \frac{1}{r^2+a^2}\frac{\partial(r^2+a^2)}{\partial x}=\frac{1}{r^2+a^2}2x
$$

$$
\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\mathcal{B}\ln(r^2+a^2) = \mathcal{B}\begin{pmatrix}\frac{2x}{r^2+a^2}\\ \frac{2y}{r^2+a^2}\\ \frac{2z}{r^2+a^2}\end{pmatrix} = -2\mathcal{B}\begin{pmatrix}\frac{-x}{r^2+a^2}\\ \frac{-y}{r^2+a^2}\\ \frac{-z}{r^2+a^2}\end{pmatrix}
$$

Offensichtlich ist $\vec{\nabla}\mathcal{B}\ln(r^2+a^2)=\vec{A}$ wenn $-2\mathcal{B}=A_0 \Leftrightarrow \mathcal{B}=-\frac{1}{2}A_0$

Zusammenfassung: $\vec{A}$ ist das Gradiantenfeld von $\Phi(x,y,z)=-\frac{1}{2}A_0\ln(x^2+y^2+z^2+a^2)$

Aufgabe 3

0 P

Taylorreihenentwicklung

Entwickle die Funktion

$$
f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}
$$

am Punkt $x = x_0$ bis zur zweiten Ordnung nach Taylor.

Taylorreihe:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!}(\Delta x)^\nu \left(\frac{d}{dx}\right)^\nu f(x)\bigg|_{x=x_0}$$

0. Ordnung:

$$f_0(x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + a^2}}$$

1. Ordnung:

$$\begin{aligned}
f_1(x_0 + \Delta x) &= \Delta x \, \frac{d}{dx} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\bigg|_{x=x_0} \\
&= \Delta x \, \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - x \cdot \frac{1}{2}\left(x^2 + a^2\right)^{-1/2} 2x}{x^2 + a^2}\Bigg|_{x=x_0} \\
&= \Delta x \, \frac{x^2 + a^2 - x^2}{\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}}\Bigg|_{x=x_0} \\
&= \Delta x \frac{a^2}{\left(x_0^2 + a^2\right)^{3/2}}
\end{aligned}$$

2. Ordnung:

$$\begin{aligned}
f_2(x_0 + \Delta x) &= \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\bigg|_{x=x_0} \\
&= \frac{(\Delta x)^2}{2} \, \frac{d}{dx} a^2 \left(x^2 + a^2\right)^{-3/2}\bigg|_{x=x_0} \\
&= \frac{(\Delta x)^2}{2} \, a^2 \left(-\frac{3}{2}\right) \left(x^2 + a^2\right)^{-5/2} \cdot 2x\bigg|_{x=x_0} \\
&= -(\Delta x)^2 \frac{3a^2 x_0}{2\left(x_0^2 + a^2\right)^{5/2}}
\end{aligned}$$

Entwicklung bis zur zweiten Ordnung:

$$\begin{aligned}
f(x_0 + \Delta x) &= \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + a^2}} + \frac{a^2}{\left(x_0^2 + a^2\right)^{3/2}} \Delta x - \frac{3a^2 x_0}{2\left(x_0^2 + a^2\right)^{5/2}} (\Delta x)^2 \\
f(x_0 + \Delta x) &= \frac{x_0\left(x_0^2 + a^2\right)^2 + a^2\left(x_0^2 + a^2\right)\Delta x - \frac{3}{2} a^2 x_0 (\Delta x)^2}{\left(x_0^2 + a^2\right)^{5/2}}
\end{aligned}$$

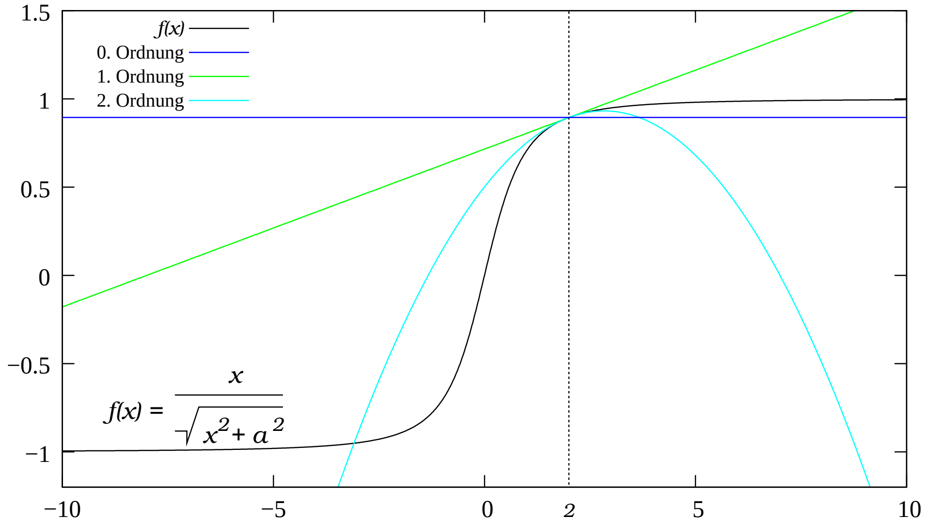

Abbildung 2: Entwicklung der Taylorreihe am Punkt $x = 2$ mit $a = 1$

Beispiel $a = 1$, $x_0 = 2$:

$$f(2+\Delta x) = \frac{2\,(4+1)^2 + 1\,(4+1)\,\Delta x - \frac{3}{2}2(\Delta x)^2}{(4+1)^{5/2}}$$

$$f(2+\Delta x) = \frac{50 + 5\Delta x - 3(\Delta x)^2}{5^{5/2}}$$

angenähert werden.