Übungsblatt 1

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

3 P

klassisches Wurfproblem

Ein Massenpunkt verlässt den Boden (Anfangspunkt: Ursprung) mit der Geschwindigkeit $|\vec{v}_0| = v_0$ unter dem Winkel $(\vec{e}_x \cdot \vec{v}_0 / v_0) = \cos\alpha$. Es wirkt die Schwerkraft mit $g = 9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Reibungseffekte sind vernachlässigbar.

1.a) Welcher Wurfwinkel ist bei vorgegebener Geschwindigkeit notwendig, damit der Massenpunkt eine vorgegebene Stelle $\vec{r}_e = (x_e, 0, 0)$ erreicht?

Bahnkurve:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 t \cos\alpha \\ 0 \\ v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$$

Die Benötigte Zeit erhält man aus

$$\begin{aligned} v_0 t_e \cos\alpha &= x_e \\ \Leftrightarrow t_e &= \frac{x_e}{v_0 \cos\alpha} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} v_0 t_e \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_e^2 &= 0 \\ t_e \cdot \left(v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_e \right) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow z = 0$ wird auf alle Fälle bei $t_e = 0$ erreicht. Da ist jedoch $x = 0$ und deshalb betrachten wir nur zweiten Teil der quadratischen Gleichung:

$$\begin{aligned} v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_e &= 0 \\ \Leftrightarrow t_e &= \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} \end{aligned}$$

zusammensetzen:

$$\begin{aligned} \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} &= \frac{x_e}{v_0 \cos\alpha} \\ v_0^2 \cdot 2 \sin\alpha \cos\alpha &= x_e g \\ \sin 2\alpha &= \frac{x_e g}{v_0^2} \qquad (1) \\ \alpha &= \frac{1}{2} \arcsin \frac{x_e g}{v_0^2} \end{aligned}$$

Alternative:

$$\tan^2\alpha - \frac{2 v_0^2}{x_e g} \tan\alpha + = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arctan \frac{-v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - x_e^2 g^2}}{x_e g}$$

Betrachtet man das Argument des Arcussinus, so sieht man dass man einen bestimmten Entpunkt x_e nur erreichen kann wenn gilt:

$$\begin{aligned} \frac{x_e g}{v_0^2} &< 1 \\ \Leftrightarrow x_e &< v_0^2 / g \end{aligned}$$

1.b) Wieviel Zeit benötigt er dafür?

Die Flugzeit ist

$$t_e = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{x_e}{v_0 \cos\alpha}$$

1.c) Was ist die maximale Höhe dieser Flugbahn und zu welchem Zeitpunkt wird sie erreicht?

Den Zeitpunkt des Maximums erhlält man wenn die Steigung $\frac{dz}{dt}$ verschwindet:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \right) &= 0 \\ v_0 \sin\alpha - g t &= 0 \\ t_{\max} &= \frac{v_0}{g} \sin\alpha \end{aligned}$$

Die maximale Höhe ist also:

$$
\begin{aligned}
z_{\max} &= v_0 t_{\max} \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_{\max}^2 \\
&= \frac{v_0^2}{g}\sin^2\alpha - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2}\sin^2\alpha \\
&= \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha
\end{aligned}
$$

Dabei ist die x-Koordinate

$$
\begin{aligned}
x_{\max} &= v_0 \frac{v_0}{g}\cos\alpha\sin\alpha \\
&= \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \\
&= \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\frac{x_e g}{v_0^2} \\
&= \frac{1}{2} x_e
\end{aligned}
$$

1.d) Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Massenpunkt den Zielpunkt?

$$
\begin{aligned}
\vec{v}(t_e) &= \left.\frac{d}{dt}\vec{r}(t)\right|_{t=t_e} \\
&= \left.\frac{d}{dt}\left(v_0 t\cos\alpha\vec{e}_x + \left(v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2\right)\vec{e}_z\right)\right|_{t=t_e} \\
&= v_0\cos\alpha\vec{e}_x + \left(v_0\sin\alpha - gt\right)\vec{e}_z\big|_{t=t_e=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}} \\
&= v_0\cos\alpha\vec{e}_x + \left(v_0\sin\alpha - g\frac{2v_0\sin\alpha}{g}\right)\vec{e}_z \\
&= v_0\cos\alpha\vec{e}_x - v_0\sin\alpha\vec{e}_z
\end{aligned}
$$

$$
\vec{v}(t_e) = \begin{pmatrix} v_0\cos\alpha \\ 0 \\ -v_0\sin\alpha \end{pmatrix}
$$

1.e) Was ist die maximale Entfernung $x_{e,\max}$, die bei vorgegebenem v_0 möglich ist? Verwende dazu Gleichung 1:

$$
\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= \frac{x_e g}{v_0^2} \\
\Leftrightarrow x_e &= \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha
\end{aligned}
$$

der $\sin 2\alpha$ kann maximal gleich 1 sein. Deshalb ist $x_{e,\max} = \frac{v_0^2}{g}$

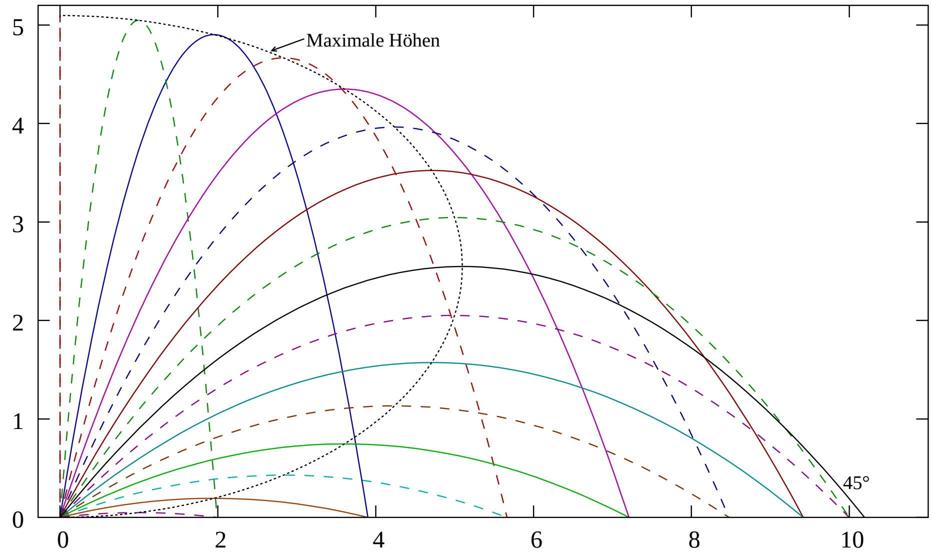

Abbildung 1: Wurfparabeln für eine Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

1.f) Unter welchem Wurfwinkel wird diese Entfernung erreicht?

Die Winkel für die maximale/minimale Weite erhält man wenn man diesen Ausdruck nach α ableitet und null setzt:

$$\begin{aligned} \frac{dx_e}{d\alpha} &= 0 \\ \frac{d}{d\alpha}\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha &= 0 \\ -2\frac{v_0^2}{g}\cos 2\alpha &= 0 \end{aligned}$$

$\cos 2\alpha = 0$ wird erreicht wenn $\alpha = \frac{1}{2}\pi(\frac{1}{2}n + 1)$ mit $n = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ Ist n gerade, so ist die Weite maximal in positiver x-Richtung, andernfalls maximal in negativer x-Richtung.

Aufgabe 2

3 P

Flussüberquerung

Ein Boot überquert mit der konstanten Geschwindigkeit v_b einen Fluss der Breite b senkrecht zu dessen Strömungsrichtung. Die Strömung hat einen parabolischen Verlauf: in der Mitte ist die Strömungsgeschwindigkeit v mit $v(b/2) = v_m$ am größten und an beiden Ufern ist $v = 0$.

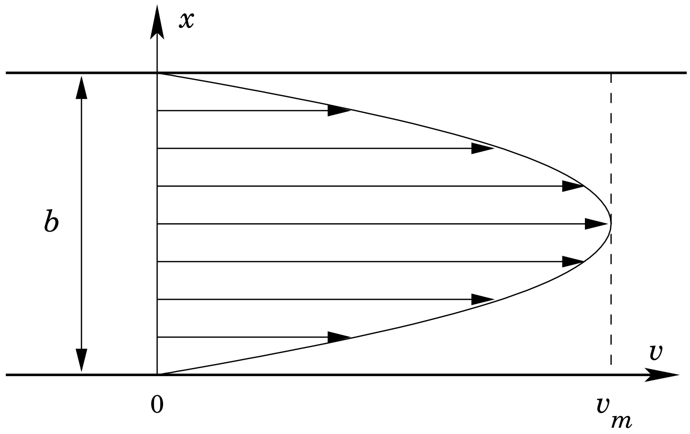

Abbildung 2: Strömungsprofil des Flusses

2.a) Gib das Geschwindigkeitsprofil des Flusses an.

2.b) Welche Bahnkurve beschreibt das Boot?

2.c) Wo liegt der Landepunkt?

2.d) Wie lange dauert die Überfahrt?

Nun fährt das Boot nicht mehr senkrecht zur Strömungsrichtung, sondern in einem Winkel α gegen die Stömung. (Wenn $\alpha = \pi/2$ ist, fährt das Boot direkt gegen die Strömung)

2.a) In welche (konstante) Richtung αmuss das Boot steuern, damit der Landepunkt auf gleicher Höhe mit dem Startpunkt ist? (Start- und Landepunkt liegen auf einer Senkrechten zur Strömungsrichtung)

2.b) Welche Bahnkurve beschreibt das Boot jetzt?

2.c) Wie lange dauert die Überfahrt?

Bei dieser Aufgabe sollte man sich nicht unbedingt nach der angegebenen Reihenfolge halten!

Als Ursprung wird die Flußmitte gewählt. Die Strömung ist bei $x = \pm b/2$ gleich null. Man setzt deshalb eine quadratische Gleichung der Form

$$v_s(x) \quad = \quad \mathcal{A}(x + \frac{b}{2}) \cdot (x - \frac{b}{2})) \tag{2}$$

an. An der Strömungsmitte $x = 0$ soll $v_s(0) = v_m$ gelten;

$$\begin{aligned}
\Rightarrow v_m &= \mathcal{A} \cdot (0 + \frac{b}{2}) \cdot (0 - \frac{b}{2})) \\
v_m &= -\mathcal{A}\frac{b^2}{4} \\
\Leftrightarrow \mathcal{A} &= -\frac{4v_m}{b^2}
\end{aligned}$$

Damit erhält man das Strömungsprofil

$$\begin{aligned}
v_s(x) &= -\frac{4v_m}{b^2}(x + \frac{b}{2}) \cdot (x - \frac{b}{2})) \\
v_s(x) &= -\frac{4v_m}{b^2}(x^2 - \frac{b^2}{4}) \\
v_s(x) &= v_m - \frac{4v_m}{b^2}x^2
\end{aligned}$$

Der Geschwindigkeitsvektor des Bootes ist

$$\vec{v}(x) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y(x) = v_s(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_b \\ v_m - \frac{4v_m}{b^2}x^2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Das Boot beschreibt eine Bahnkurve $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ deren x-Komponente nur von der Geschwindikeit des Bootes abhängt:

$$x = v_b t - \frac{b}{2} \tag{4}$$

Die y-Komponente hingegen hängt auch von der x-Koordinate des Bootes ab:

$$\begin{aligned}
y &= \int_0^t v(x(t'))\, dt' \\
y &= \int_0^t v(v_b \cdot t' - \frac{b}{2})\, dt' \\
y &= \int_0^t \left(v_m - \frac{4v_m}{b^2}(v_b \cdot t' - \frac{b}{2})^2 \right) dt' \\
y &= \int_0^t \left(v_m - \frac{4v_m v_b^2}{b^2}t'^2 + \frac{4v_m v_b}{b}t' - v_m \right) dt' \\
y &= \left. \frac{2v_m v_b}{b}t'^2 - \frac{4v_m v_b^2}{3b^2}t'^3 \right|_0^t \\
y &= \frac{2v_m v_b}{b}t^2 - \frac{4v_m v_b^2}{3b^2}t^3 \\
y &= \frac{2v_m v_b}{b}\left(t^2 - \frac{2v_b}{3b}t^3 \right)
\end{aligned}$$

Die Bahnkurve ist:

$$\vec{r}(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} v_b t - \frac{b}{2} \\ \frac{2v_m v_b}{b}\left(t^2 - \frac{2v_b}{3b}t^3\right) \end{pmatrix}$$

Die Dauer der Überfahrt T von $x_s = -b/2$ nach $x_l = b/2$ wird nur durch die x-komponente Bestimmt:

$$\begin{aligned} x_l - x_s &= v_b T \\ \Leftrightarrow T &= \frac{x_l - x_s}{v_b} \\ T &= \frac{b/2 - (-b/2)}{v_b} \\ T &= \frac{b}{v_b} \end{aligned}$$

Startet das Boot bei $\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} -b/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ so ist nach der Zeit T der Punkt $\vec{r}(T) = \begin{pmatrix} x(T) \\ y(T) \end{pmatrix}$ erreicht. Die x-Komponente ist einfach das andere Ufer und

$$\begin{aligned} y &= \frac{2v_m v_b}{b}\left(T^2 - \frac{2v_b}{3b}T^3\right) \\ y &= \frac{2v_m v_b}{b}\left(\left(\frac{b}{v_b}\right)^2 - \frac{2v_b}{3b}\left(\frac{b}{v_b}\right)^3\right) \\ y &= \frac{2v_m v_b}{b}\left(1 - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{b}{v_b}\right)^2 \\ y &= \frac{2v_m}{3v_b}b \end{aligned}$$

Das Boot erreicht das andere Ufer bei

$$\vec{r}(T) \quad = \quad \begin{pmatrix} b/2 \\ \frac{2v_m}{3v_b}b \end{pmatrix}$$

Wenn das Boot nicht mehr senkrecht zur Ströhmung $\alpha = 0$ fährt, ändert sich der Geschwindigkeitsvektor des Bootes bezüglich des Ufers auf.

$$\vec{v}(x) \quad = \quad \begin{pmatrix} v_x \\ v_y(x) \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} v_b \cos\alpha \\ v_m - \frac{4v_m}{b^2}x^2 - v_b \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Der Ort des Bootes ist

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ \vec{r}(t) &= \begin{pmatrix} v_b t \cdot \cos\alpha - \frac{b}{2} \\ \int_0^t v_y(x(t'))\, dt' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Rechnung für die y-Koordinate verläuft analog zu (?) jedoch muss v_b durch $v_b \cos\alpha$ ersetzt weden und $v_y(x)$ um einen zusätzicher Term $-v_b \sin\alpha$ erweitert werden:

$$v_y(x) \quad = \quad v_m - \frac{4v_m}{b^2}x^2 - v_b \sin\alpha$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow y \quad &= \quad \int_0^t \left(v_m - \frac{4v_m}{b^2}(v_b \cos\alpha \cdot t' - \frac{b}{2})^2 - v_b \sin\alpha \right) dt' \\
&\vdots \\
y \quad &= \quad \frac{2v_m v_b \cos\alpha}{b} \left(t^2 - \frac{2v_b \cos\alpha}{3b} t^3 \right) - v_b t \cdot \sin\alpha \\
\Rightarrow \vec{r}(t) \quad &= \quad \begin{pmatrix} v_b t \cdot \cos\alpha - \frac{b}{2} \\ \frac{2v_m v_b \cos\alpha}{b} \left(t^2 - \frac{2v_b \cos\alpha}{3b} t^3 \right) - v_b t \cdot \sin\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Überfahrt dauert jetzt

$$T \quad = \quad \frac{b}{v_b \cdot \cos\alpha}$$

Berechnung des Erforderlichen Winkels:

1. Alternative: Das Boot muss zur Zeit T bei $\vec{r}(T) = \begin{pmatrix} b/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sein:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow y(T) \quad &= \quad 0 \\
\frac{2v_m v_b \cos\alpha}{b} \left(T^2 - \frac{2v_b \cos\alpha}{3b} T^3 \right) - v_b \sin\alpha T \quad &= \quad 0 \\
\frac{2v_m v_b \cos\alpha}{b} \left(\left(\frac{b}{v_b \cos\alpha} \right)^2 - \frac{2v_b \cos\alpha}{3b} \left(\frac{b}{v_b \cos\alpha} \right)^3 \right) - v_b \sin\alpha \left(\frac{b}{v_b \cos\alpha} \right) \quad &= \quad 0 \\
\frac{2v_m v_b b^2 \cos\alpha}{v_b^2 b \cos^2\alpha} - \frac{4v_m v_b^2 b^3 \cos^2\alpha}{3b^2 v_b^3 \cos^3\alpha} - \frac{v_b b \sin\alpha}{v_b \cos\alpha} \quad &= \quad 0 \\
\frac{2v_m}{v_b} - \frac{4v_m}{3v_b} - \sin\alpha \quad &= \quad 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \sin\alpha \quad &= \quad \frac{2v_m}{v_b} \left(2 - \frac{4}{3} \right) \\
\sin\alpha \quad &= \quad \frac{2v_m}{3v_b} \\
\Leftrightarrow \alpha \quad &= \quad \arcsin \frac{2v_m}{3v_b}
\end{aligned}$$

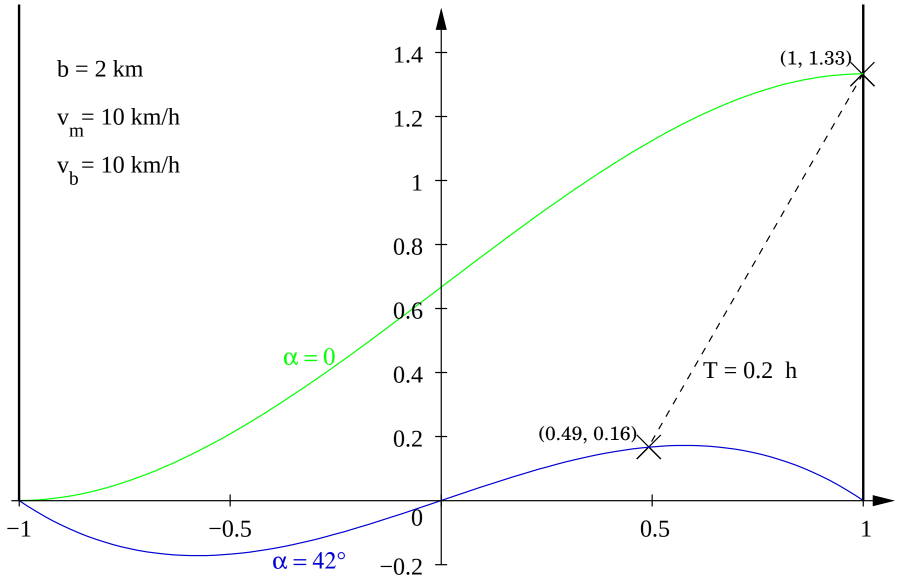

Abbildung 3: Flussüberquerung

2. Alternative Die die y-Komponente der Bootsgeschwindigkeit $v_b \sin\alpha$ muss so gewählt werden, dass sie die Abdrift $v_s = v_m - \frac{4v_m}{b^2}x^2$ gemittelt über die Breite des Flusses exakt kompensiert, also:

$$
\begin{aligned}
v_b \sin\alpha &= \frac{1}{b}\int_{-b/2}^{+b/2} v_m - \frac{4v_m}{b^2}x^2 dx \\
\sin\alpha &= \frac{1}{v_b b}\left(v_m x - \frac{4v_m}{3b^2}x^3\right)\Bigg|_{-b/2}^{+b/2} \\
\sin\alpha &= \frac{1}{v_b b}\left(v_m b - \frac{4v_m}{3b^2}\left(\left(\frac{b}{2}\right)^3 - \left(-\frac{b}{2}\right)^3\right)\right) \\
\sin\alpha &= \frac{1}{v_b b}\left(v_m b - \frac{4v_m}{3b^2}\frac{b^3}{4}\right) \\
\sin\alpha &= \frac{v_m}{v_b} - \frac{v_m}{3v_b} \\
\Leftrightarrow \alpha &= \arcsin\frac{2v_m}{3v_b}
\end{aligned}
$$

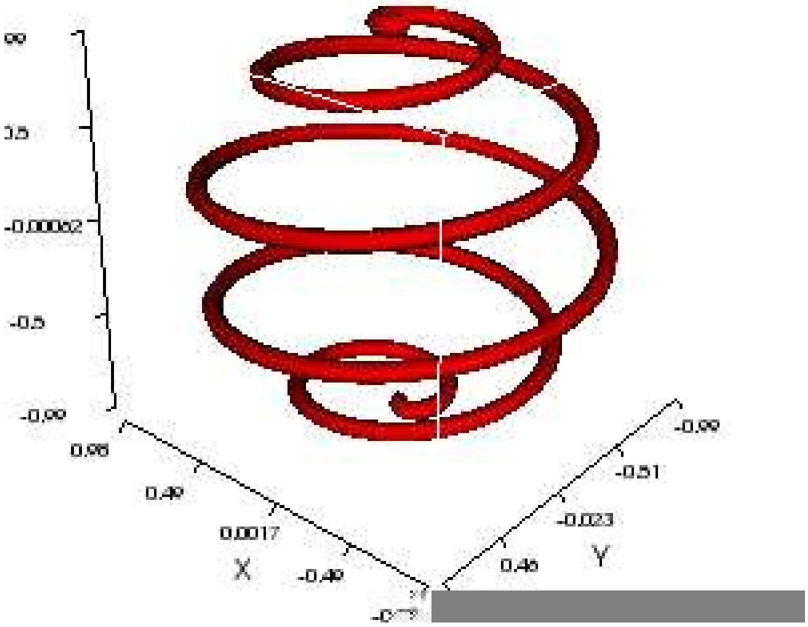

Abbildung 4: Bahnkurve von $\vec{r}(t)$ für $R = 1$ und $\omega = 10\pi$

Aufgabe 3

2 P

Bahnkurve

Ein Massenpunkt durchläuft von $t_a = 0$ bis $t_e = 1$ eine Kurve die durch den Ortsvektor

$$\vec{r}(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad = \quad R \begin{pmatrix} \cos\omega t \cdot \sin\pi t \\ \sin\omega t \cdot \sin\pi t \\ \cos\pi t \end{pmatrix}$$

beschrieben werden kann.

3.a) Beschreibe die Kurve, die der Ortsvektor durchläuft. Welche Rolle spielen R und ω?

- die Kurve läuft von $(0, 0, R)$ bis zum Punkt $(0, 0-, R)$
- in der Projektion auf die xy- läuft der Massenpunkt auf einer Spiralbahn.

- diese hat den Radius $r_s = 0$ bei $t = 0$ und $t = 1$
- bei $t = 1/2$ ist der Radius $r_s = R$ der Spirale maximal
- die Anzahl der Umläufe beträgt ω/π
- der Radius erweitert sich sinusförmig in Abhängigkeit von t
- und kreisförmig in Abhängigkeit von z

- die Bahnkuve läuft auf einer Kugel mit dem Radius R
- und dem Ursprung als Mittelpunkt

3.b) Berechne die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Punktes zum Zeitpunkt t.

Geschwindigkeit:

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt} R \begin{pmatrix} \cos\omega t \cdot \sin\pi t \\ \sin\omega t \cdot \sin\pi t \\ \cos\pi t \end{pmatrix} \\
&= R \begin{pmatrix} -\omega\sin\omega t \cdot \sin\pi t + \pi\cos\omega t \cdot \cos\pi t \\ \omega\cos\omega t \cdot \sin\pi t + \pi\sin\omega t \cdot \cos\pi t \\ -\pi\sin\pi t \end{pmatrix} \\
v_y^2/R^2 &= (\omega\cos\omega t \cdot \sin\pi t + \pi\sin\omega t \cdot \cos\pi t)^2 \\
&= \omega^2\cos^2\omega t \cdot \sin^2\pi t + \pi^2\sin^2\omega t \cdot \cos^2\pi t + 2\pi\omega\cos\omega t \cdot \sin\pi t \cdot \sin\omega t \cdot \cos\pi t \\
&= \omega^2\cos^2\omega t \cdot \sin^2\pi t + \pi^2\sin^2\omega t \cdot \cos^2\pi t + \frac{\pi\omega}{2}\sin 2\omega t \cdot \sin 2\pi t \\
v_x^2/R^2 &= (-\omega\sin\omega t \cdot \sin\pi t + \pi\cos\omega t \cdot \cos\pi t)^2 \\
&= \omega^2\sin^2\omega t \cdot \sin^2\pi t + \pi^2\cos^2\omega t \cdot \cos^2\pi t - \frac{\pi\omega}{2}\sin 2\omega t \cdot \sin 2\pi t \\
v_z^2/R^2 &= \pi^2\sin^2\pi t \\
\vec{v}^2/R^2 &= \omega^2\cos^2\omega t \cdot \sin^2\pi t + \pi^2\sin^2\omega t \cdot \cos^2\pi t \\
&+ \omega^2\sin^2\omega t \cdot \sin^2\pi t + \pi^2\cos^2\omega t \cdot \cos^2\pi t \ + \ \pi^2\sin^2\pi t \\
&= \omega^2\sin^2\pi t + \pi^2\cos^2\pi t + \pi^2\sin^2\pi t \\
&= \omega^2\sin^2\pi t + \pi^2 \\
|\vec{v}| &= R\sqrt{\omega^2\sin^2\pi t + \pi^2}
\end{aligned}
$$

Beschleunigung:

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} R \begin{pmatrix} -\omega\sin\omega t \cdot \sin\pi t + \pi\cos\omega t \cdot \cos\pi t \\ \omega\cos\omega t \cdot \sin\pi t + \pi\sin\omega t \cdot \cos\pi t \\ -\pi\sin\pi t \end{pmatrix} \\
&= R \begin{pmatrix} -\omega^2\cos\omega t \cdot \sin\pi t - \pi^2\cos\omega t \cdot \sin\pi t + \omega\pi(-\sin\omega t \cdot \cos\pi t - \sin\omega t \cdot \cos\pi t) \\ -\omega^2\sin\omega t \cdot \sin\pi t - \pi^2\sin\omega t \cdot \sin\pi t + \omega\pi(-\cos\omega t \cdot \cos\pi t - \cos\omega t \cdot \cos\pi t) \\ -\pi^2\cos\pi t \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

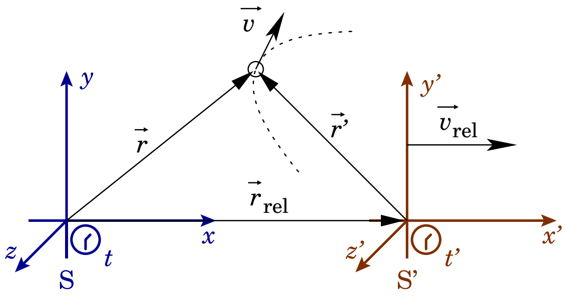

Abbildung 5: Darstellung der Bahnkurve eines Massenpunktes in zwei, sich von einander entfernenden Koordinatensystemen S und S'

$$= \quad R\begin{pmatrix} -(\omega^2+\pi^2)\cos\omega t\cdot\sin\pi t - 2\omega\pi\sin\omega t\cdot\cos\pi t \\ -(\omega^2+\pi^2)\sin\omega t\cdot\sin\pi t - 2\omega\pi\cos\omega t\cdot\cos\pi t \\ -\pi^2\cos\pi t \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

3 P

Transformation zwischen Bezugssystemen

Ein sich bewegender Massenpunkt wird in einem Inertialsystem S und ein anderes Bezugsystem S' betrachtet. Dieses bewege sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_{\text{rel}}(t)$ von S weg. Die Koordinaten werden so gewählt, dass $\vec{v}_{\text{rel}}(t)$ in beiden Bezugssystemen nur eine x-Komponente hat. Die Zeit verläuft in beiden Bezugssystemen mit gleich schnell ($t' = t$). Zur Zeit $t = t' = 0$ haben sich die Ursprünge in einem Punkt gekreuzt. Im Inertialsystem S genügt der Massenpunkt der (NEWTONschen) Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} \;=\; \vec{F} \tag{5}$$

4.a) Stelle die Transformation $T(\vec{v}_{\text{rel}}(t)) : \vec{r} \mapsto \vec{r}'$ auf.

vektoriell:

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= \vec{r}(t) - \vec{r}_{\text{rel}}(t) \\ &= \vec{r}(t) - \int_0^t \vec{v}_{\text{rel}}(\breve{t}) \cdot d\breve{t} \end{aligned}$$

Komponenten:

$$x' \;=\; x + \int_0^t v_{\text{rel}}(\breve{t}) \cdot d\breve{t}$$

$$
\begin{aligned}
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= t
\end{aligned}
$$

4.b) Wie lautet die Bewegungsgleichung des Massenpunktes aus der Sicht von S' wenn $\vec{v}_{\text{rel}}(t) = \vec{a}t$ mit konstantem $\vec{a}$ ist?

$$
\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= \vec{r}(t) - \int_0^t \vec{v}_{\text{rel}}(\breve{t}) \cdot d\breve{t} \\
&= \vec{r}(t) - \int_0^t \vec{a}\breve{t} \cdot d\breve{t} \\
&= \vec{r}(t) - \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \\
\dot{\vec{r}}'(t) &= \dot{\vec{r}}(t) - \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\vec{a}t^2 \\
&= \dot{\vec{r}}(t) - \vec{a}t = \dot{\vec{r}}(t) - \vec{v}_{\text{rel}}(t) \\
\ddot{\vec{r}}'(t) &= \ddot{\vec{r}}(t) - \vec{a}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad \mapsto \quad m\ddot{\vec{r}}' + m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\Rightarrow m\ddot{\vec{r}}' \; = \; \vec{F} - m\vec{a} \; = \; \vec{F}'$$

Dabei ist $m\vec{a}$ eine Scheinkraft.

4.c) Wie muss $\vec{v}_{\text{rel}}(t)$ gewählt werden, damit die Bewegungsgleichung (5) unter der Transformation $T(\vec{v}_{\text{rel}}(t)) : \vec{r} \mapsto \vec{r}'$ invariant bleibt.

Die t-Komponente bleibt unabhängig von $\vec{v}_{\text{rel}}(t)$ invariant. Deshalb bleibt die Bewgungsgleichung (5) invariant wenn $\ddot{\vec{r}}'(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$. Das wiederum ist erfüllt wenn $\dot{\vec{r}}'(t) = \dot{\vec{r}}(t) + \text{const}$ gilt. Das bedeutet dass $\vec{v}_{\text{rel}}(t)$ konstant sein muss.

4.d) Die GALILEItransformation $G(\vec{r}_{\text{rel}}, \vec{v}_{\text{rel}}) : \vec{r} \mapsto \vec{r}'$ ist definiert durch[1]:

$$G(\vec{r}_{\text{rel}}, \vec{v}_{\text{rel}}) \circ \vec{r}(t) \;=\; \vec{r}(t) - \vec{r}_{\text{rel}} - \vec{v}_{\text{rel}}t \qquad \vec{r}_{\text{rel}}, \vec{v}_{\text{rel}} = \text{const}$$

Zeige diese GALILEItransformationen eine ABELsche Gruppe bilden.

[1] Die vollständige Gallileitransformation enthält noch eine konstante Drehung der Bezugsyteme untereinander und einen Zeitoffset. Allerdings werden die Bezugssysteme meist so gewählt, dass diese verschwinden.

(a) Existenz und Eindeutigkeit: Eine Transformation $G(\vec{r}_{\text{rel},2}, \vec{v}_{\text{rel},2})$ angewendet auf eine andere $G(\vec{r}_{\text{rel},1}, \vec{v}_{\text{rel},1})$ ergibt wieder eine Transformation $G(\vec{r}_{\text{rel},3}, \vec{v}_{\text{rel},3})$:

$$\begin{aligned}
G(\vec{r}_{\text{rel},2}, \vec{v}_{\text{rel},2}) \circ (G(\vec{r}_{\text{rel},1}, \vec{v}_{\text{rel},1}) \circ \vec{r}(t)) &= G(\vec{r}_{\text{rel},2}, \vec{v}_{\text{rel},2}) \circ (\vec{r}(t) - \vec{r}_{\text{rel},1} - \vec{v}_{\text{rel},1} t)\,, \\
&= \vec{r}(t) - \vec{r}_{\text{rel},1} - \vec{v}_{\text{rel},1} t - \vec{r}_{\text{rel},2} - \vec{v}_{\text{rel},2} t \\
&= \vec{r} - \underbrace{(\vec{r}_{\text{rel},1} + \vec{r}_{\text{rel},2})}_{\vec{r}_{\text{rel},3}} - \underbrace{(\vec{v}_{\text{rel},1} + \vec{v}_{\text{rel},2})}_{\vec{v}_{\text{rel},3}} t \\
&= G_3(\vec{r}_{\text{rel},3}, \vec{v}_{\text{rel},3}) \circ \vec{r}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow G(\vec{r}_{\text{rel},2}, \vec{v}_{\text{rel},2}) \circ G(\vec{r}_{\text{rel},1}, \vec{v}_{\text{rel},1}) \quad = \quad G(\vec{r}_{\text{rel},3}, \vec{v}_{\text{rel},3}) \qquad \blacksquare$$

(b) Assoziativgesetz: Die Reihenfolge der Anwendung von G_1, G_2 und G_3 spielt keine Rolle:
Aus der vorhergehenden Rechnung sieht man, dass

$$G(\vec{r}_{\text{rel},2}, \vec{v}_{\text{rel},2}) \circ G(\vec{r}_{\text{rel},1}, \vec{v}_{\text{rel},1}) \quad = \quad G(\vec{r}_{\text{rel},3}, \vec{v}_{\text{rel},3})$$

mit

$$\vec{r}_{\text{rel},1} + \vec{r}_{\text{rel},2} = \vec{r}_{\text{rel},3} \quad \text{und} \quad \vec{v}_{\text{rel},1} + \vec{v}_{\text{rel},2} = \vec{v}_{\text{rel},3} \tag{6}$$

deshalb ist

$$\begin{aligned}
& G(\vec{r}_{\text{rel},1}, \vec{v}_{\text{rel},1}) \circ (G(\vec{r}_{\text{rel},2}, \vec{v}_{\text{rel},2}) \circ G(\vec{r}_{\text{rel},3}, \vec{v}_{\text{rel},3})) \\
= \;& G(\vec{r}_{\text{rel},1} + (\vec{r}_{\text{rel},2} + \vec{r}_{\text{rel},3})\,, \vec{v}_{\text{rel},1} + (\vec{v}_{\text{rel},2} + \vec{v}_{\text{rel},3})) \\
= \;& G((\vec{r}_{\text{rel},1} + \vec{r}_{\text{rel},2}) + \vec{r}_{\text{rel},3}, (\vec{v}_{\text{rel},1} + \vec{v}_{\text{rel},2}) + \vec{v}_{\text{rel},3}) \\
= \;& (G(\vec{r}_{\text{rel},2}, \vec{v}_{\text{rel},2}) \circ G(\vec{r}_{\text{rel},1}, \vec{v}_{\text{rel},1})) \circ G(\vec{r}_{\text{rel},3}, \vec{v}_{\text{rel},3}) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

(c) Existenz eines neutralen Elements: $G(\vec{r}_{\text{rel}}, \vec{v}_{\text{rel}}) \circ G(\vec{r}_{\text{rel},0}, \vec{v}_{\text{rel},0}) = G(\vec{r}_{\text{rel}}, \vec{v}_{\text{rel}})$
An (6) sieht man, dass die Galileitrafo auf Vektoraddition basiert. Das neutrale Element davon ist der Nullvektor $\vec{0}$. Deshalb ist $G(\vec{0}, \vec{0})$ ein guter Kandidat für das neutrale Element:

$$\begin{aligned}
G(\vec{r}_{\text{rel}}, \vec{v}_{\text{rel}}) \circ G(\vec{0}, \vec{0}) &= G(\vec{r}_{\text{rel}} + \vec{0}, \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{0}) \\
&= G(\vec{r}_{\text{rel}}, \vec{v}_{\text{rel}}) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

(d) Existenz eines inversen Elements: $G(\vec{r}_{\text{rel},1}, \vec{v}_{\text{rel},1}) \circ G(\vec{r}_{\text{rel},-1}, \vec{v}_{\text{rel},-1}) = G(\vec{0}, \vec{0})$
Wiederum hilft (6) wenn man $G(-\vec{r}_{\text{rel}}, -\vec{v}_{\text{rel}})$ auf $G(\vec{r}_{\text{rel}}, \vec{v}_{\text{rel}})$ anwendet erhält man:

$$\begin{aligned}
G(\vec{r}_{\text{rel}}, \vec{v}_{\text{rel}}) \circ G(-\vec{r}_{\text{rel}}, -\vec{v}_{\text{rel}}) &= G(\vec{r}_{\text{rel}} - \vec{r}_{\text{rel}}, \vec{v}_{\text{rel}} - \vec{v}_{\text{rel}}) \\
&= G(\vec{0}, \vec{0}) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

(e) Komutativgesetz:

$$\begin{aligned}
G(\vec{r}_{\text{rel},2}, \vec{v}_{\text{rel},2}) \circ G(\vec{r}_{\text{rel},1}, \vec{v}_{\text{rel},1}) &= G(\vec{r}_{\text{rel},1} + \vec{r}_{\text{rel},2}, \vec{v}_{\text{rel},1} + \vec{v}_{\text{rel},2}) \\
&= G(\vec{r}_{\text{rel},2} + \vec{r}_{\text{rel},1}, \vec{v}_{\text{rel},2} + \vec{v}_{\text{rel},1}) \\
&= G(\vec{r}_{\text{rel},1}, \vec{v}_{\text{rel},1}) \circ G(\vec{r}_{\text{rel},2}, \vec{v}_{\text{rel},2}) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

4.e) Anwendung der Galilieitransformationen:

Ein Physiker fährt in einem Zug, der relativ zur Erde mit konstanter Geschwindigkeit fährt. Am Bahndamm sieht er

(a) einen Jungen (reibungsfrei) einen Ball werfen (senkrecht oder schräg)
Wurfparabel, bei der sich die Geschwindikeitskomponente gegen die Fahrtrichtung erhöht.

(b) jemanden ein Federpendel betrachten
Sinus.

(c) einen stehendes oder rollendes Rad
Zyklode.

Überlege qualitativ welche Bahnkurfen der Physiker sieht.

Aufgabe 5

2 P

Tiefe eines Brunnens

Um die Tiefe eines Brunnens zu bestimmen läßt man einen Stein in diesen fallen und mist die Zeit t bis zum Aufschlag. Das Schwerefeld g kann als homogen angenommen werden. Es wird ein ausreichend schwerer und aerodynamischer Stein gewählt, so dass Reibungseffekte mit Luft vernachlässigt werden können. Die Zeit, die der Schall (Geschwindigkeit c) des Aufschlags braucht bis er den Rand des Brunnens erreicht, ist jedoch signifikant.

5.a) Berechne die Tiefe des Brunnens

$$t = t_{\text{Stein}} + t_{\text{Schall}}$$

freier Fall:

$$h = \frac{1}{2} g t_{\text{Stein}}^2 \quad \Leftrightarrow \quad t_{\text{Stein}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Schall:

$$h = ct_{\text{Schall}} \quad \Leftrightarrow \quad t_{\text{Schall}} = \frac{h}{c}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow t &= \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{c} \\
\Leftrightarrow t - \frac{h}{c} &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \\
\Leftrightarrow t^2 - 2\frac{ht}{c} + \frac{h^2}{c^2} &= \frac{2h}{g} \\
\Leftrightarrow h^2 - 2h\left(\frac{c^2}{g} + ct\right) + c^2t^2 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow h &= \frac{c^2}{g} + ct \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\left(\frac{c^2}{g} + ct\right)^2 - 4c^2t^2} \\
h &= \frac{c^2}{g} + ct \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\frac{c^4}{g^2} + 8\frac{c^3}{g}t + 4c^2t^2 - 4c^2t^2} \\
h &= \frac{c^2}{g} + ct \pm \frac{c^2}{g}\sqrt{1 + \frac{2gt}{c}}
\end{aligned}$$

Da für $t = 0$ $h = 0$ sein muss, kommt nur das negative Vorzeichen in Frage:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow h &= \frac{c^2}{g} + ct - \frac{c^2}{g}\sqrt{1 + \frac{2gt}{c}} \\
h &= ct + \frac{c^2}{g}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2gt}{c}}\right)
\end{aligned}$$

5.b) In realistischen fällen ist $c \gg 2gt$. Gib die ersten drei Terme einer Reihenentwicklung an.

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4$$

$$\begin{aligned}
h &= ct + \frac{c^2}{g}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2gt}{c}}\right) \\
h &\approx ct + \frac{c^2}{g}\left(1 - 1 - \frac{2gt}{2c} + \frac{4g^2t^2}{8c^2} - \frac{8g^3t^3}{16c^3} + \frac{5 \cdot 16g^4t^4}{128c^4}\right) \\
h &\approx \frac{1}{2}gt^2 - \frac{g^2t^3}{2c} + \frac{5g^3t^4}{8c^2}
\end{aligned}$$

5.c) Bei einem Brunnen auf der Erde ($g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$, $c = 330\,\mathrm{m/s}$) wird eine Fallzeit von $4.0\,\mathrm{s}$ gemessen. Welche Tiefe wird nach 1.-3. Ordnung und exakt ermittelt?

Ordnung	1	2	3	∞
Tiefe in m	78.5	69.2	70.6	70.4