Übungsblatt 10

Lösungsvorschlag
3 Aufgaben, 9 Punkte

Aufgabe 1

4 P

Das Keplerproblem nach Newton

In der NEWTON'schen Formulierung der Mechanik werden zwei (isotrop) wechselwirkende Massenpunkte durch die gekoppelten Differntialgleichungen

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\vec{r}}_1 &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot f_{21}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 &= -(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot f_{21}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \end{aligned}$$

dargestellt. Ist die Gravitation für die Wechsewirkung verantwortlich, so ist die Kraft zwischen den Körpern

$$f_{21} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

1.a) Transformiere die (gekoppelten) Bewegungsgleichungen auf Schwerpunkts- und Relativkoordinaten.

Schwerpunktsvektor:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Relativvektor:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Inverse Transformation:

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 &= \vec{r}_1 - \vec{r} \\ \Rightarrow \vec{R} &= \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2(\vec{r}_1 - \vec{r})}{m_1 + m_2} \\ \vec{R} &= \vec{r}_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \\ \Leftrightarrow \vec{r}_1 &= \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \\ \Rightarrow \vec{r}_2 &= \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} - \vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen sind dann

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{R}+\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}\right) & = \vec{r}\cdot f_{21}(|\vec{r}|) \\ m_2 \frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{R}-\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}\right) & = \vec{r}\cdot f_{21}(|\vec{r}|) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{R}}+\mu\ddot{\vec{r}} & = -\gamma m_1 m_2 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \\ m_2\ddot{\vec{R}}-\mu\ddot{\vec{r}} & = +\gamma m_1 m_2 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \end{cases} \quad \text{mit}\, \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

Addition:

$$\begin{aligned} 2m_1\ddot{\vec{R}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \ddot{\vec{R}} &= 0 \end{aligned}$$

Subtraktion:

$$\begin{aligned} (m_1-m_2)\,\ddot{\vec{R}}+2\mu\ddot{\vec{r}} &= -2\gamma m_1 m_2 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \\ \ddot{\vec{r}} &= -\gamma\,(m_1+m_2)\,\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \end{aligned}$$

1.b) Löse die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{R}} &= 0 \\ \Rightarrow \dot{\vec{R}} &= \text{const} = \frac{\vec{P}}{m_1+m_2} \\ \Rightarrow \vec{R} &= \vec{R}_0+\dot{\vec{R}}t \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt bewegt sich inertial.

1.c) Bei der Relativbewegung gilt Drehimpulserhaltung ($L =$const.). Das bedeutet, das sich die Bewegung der beiden Körper auf einer Ebene stattfindet. Wähle also geeignete ebene Polarkoordinaten, zur Formuliernung der Gleichung der Relativbewegung.

Es werden Polarkoordinaten so gewählt, dass sie die Ebene beschreiben, in er sich die Massenpunkte bewegen. Die dritte Koordinate (z oder ϑ) steht parallel auf dem Drehimpuls und ist deshalb konstant (bzw. ignorabel):

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r\vec{e}_r \\ \Rightarrow \dot{\vec{r}} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\ \Rightarrow \ddot{\vec{r}} &= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\vec{e}_r \\ &= \left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichung des Relativvektors in Polarkoordinaten ist damit:

$$\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi = -\gamma\,(m_1+m_2)\,\frac{r\vec{e}_r}{|r\vec{e}_r|^3}$$

Radialgleichung:

$$\begin{aligned} \ddot{r}-r\dot{\varphi}^2 &= -\frac{\gamma\,(m_1+m_2)}{r^2} \qquad (1) \\ \ddot{r} &= r\dot{\varphi}^2 - \frac{\gamma\,(m_1+m_2)}{r^2} \end{aligned}$$

Winkelgleichung:

$$\begin{aligned} 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} &= 0 \qquad (2)\\ \ddot{\varphi} &= \frac{2\dot{r}}{r}\dot{\varphi} \end{aligned}$$

1.d) Löse die Bewegungsgleichung für die Winkelkoordinate und setze sie in die Radialgleichung ein.

$$\begin{aligned} 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} &= 0 \\ \frac{1}{r}\left(2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}\right) &= 0 \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Das bedeutet der Drehimpuls von φ ist konstant:

$$\begin{aligned} \Rightarrow r^2\dot{\varphi} &= \text{const} = L_\varphi \\ \Leftrightarrow \dot{\varphi} &= \frac{L_\varphi}{r^2} \end{aligned}$$

In die Radialgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= r\left(\frac{L_\varphi}{r^2}\right)^2 - \frac{\gamma\,(m_1+m_2)}{r^2} \\ \ddot{r} &= \frac{L_\varphi^2}{r^3} - \frac{\gamma\,(m_1+m_2)}{r^2} \end{aligned}$$

Zur Diskussion und Lösung der Radialgleichung siehe Skript und DREIZLER & LÜDDE, Mechanik, Kap. 4.1.2

1.e) Zeige, dass NEWTONS Bewegungsgleichungen der Gravitation beim Übergang von kartesischen nach Polarkoordinaten nicht forminvariant sind.

Die NEWTON'schen Bewegungsgleichungen währen forminvariant wenn

$$m\ddot{x}_i = F_i(x_j)$$

in kartesischen Koordinaten ($i, j \in [x, y]$) nach

$$m\ddot{\breve{x}}_i = \breve{F}_i(\breve{x}_j)$$

in Polarkoordinaten ($\breve{x}_1 = r$, $\breve{x}_2 = \varphi$) transformieren würden. (Die KOS wurden so gewählt, dass $z = \vartheta = 0\,\forall t$)
Gravitationsgeetz in kartesischen Koordinaten:

$$ma_i = -\frac{\alpha x_i}{\left(\sum_j x_j^2\right)^{3/2}} = \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

mit der Beschleunigung $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y)$ und dem Potential

$$V = -\frac{\alpha}{\left(\sum_j x_j^2\right)^{1/2}} = -\frac{\alpha}{r}$$

in Polarkoordinaten sind damit die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m\breve{a}_r &= -\breve{F}_r = \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\alpha}{r^2} \\ m\breve{a}_\varphi &= -\breve{F}_\varphi = \frac{\partial V}{r\partial\varphi} = 0 \end{aligned}$$

Mit der Beschleunigung

$$\begin{aligned} \vec{\breve{a}} &= \frac{d^2}{dt^2}(r\vec{e}_r) \\ &= \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi \\ &= \breve{a}_r\vec{e}_r + \breve{a}_\varphi\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Können die Bewegungsgleichungen als

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= -\frac{\alpha}{r^2} \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} &= 0 \end{aligned}$$

geschriben werden. (Die Winkelbeschleunigung $\breve{a}_\varphi$ verschwindet wegen Rotationssysmmetrie des Potentials.) Sie haben also eine andere Form als die Gleichungen in kartesischer Darstellung. Mehr dazu in JELITO 11.1

Aufgabe 2

3 P

Inverses Keplerproblem

Beim inversen KEPLERproblem geht es darum aus einem gegebenem Orbit $r(\varphi)$ die wirkenden Kräfte bzw. das Potential zu finden. Eigentlich könnte man zur gegebenen Bahn $r(\varphi)$ beliebig viele Kraftfelder $\vec{F}(\vec{r})$ finden, die ein Körper auf dieser Bahn halten könnte. Erst wenn man weiß, das es sich um ein Zentralkraftproblem handelt, kann man die Größe $f(r) = \frac{dV}{dr}$ und damit das Kraftgesetz eindeutig aus der Bahnbewegung herleiten.

2.a) Beweise

$$-\frac{dV}{dr} = f(r) = \frac{p_\varphi^2}{mr^4}\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\right)$$

Die Bewegungsgleichung für r lautet (siehe Afg 1.c), ()):

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = f(r) \tag{3}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\right) = \dot{\varphi}\frac{d}{dt}\frac{dr}{d\varphi} + \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt^2} \\ &= \dot{\varphi}\frac{d^2r}{d\varphi^2}\frac{d\varphi}{dt} + \ddot{\varphi}\frac{dr}{d\varphi} \\ &= \dot{\varphi}^2\frac{d^2r}{d\varphi^2} + \ddot{\varphi}\frac{dr}{d\varphi} \end{aligned} \tag{4}$$

Bewgungsgleichung für den Winkel φ:

$$\begin{aligned}
2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) &= 0 \\
\Leftrightarrow r^2\dot{\varphi} &= \text{const} = \frac{p_\varphi}{m} \qquad (5)
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} &= 0 \\
\Leftrightarrow \ddot{\varphi} &= \frac{-2\dot{\varphi}}{r}\frac{dr}{dt} \\
\ddot{\varphi} &= \frac{-2\dot{\varphi}}{r}\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \\
\ddot{\varphi} &= \frac{-2\dot{\varphi}^2}{r}\frac{dr}{d\varphi} \qquad (6)
\end{aligned}$$

(4) in die Radialgleichung (3) einsetzen:

$$\begin{aligned}
f(r) &= m\left(\dot{\varphi}^2\frac{d^2r}{d\varphi^2} + \ddot{\varphi}\frac{dr}{d\varphi} - r\dot{\varphi}^2\right) \\
&= m\left(\dot{\varphi}^2\frac{d^2r}{d\varphi^2} + \ddot{\varphi}\frac{dr}{d\varphi} - r\dot{\varphi}^2\right)
\end{aligned}$$

(5) und (6) einsetzen:

$$\begin{aligned}
f(r) &= m\left(\dot{\varphi}^2\frac{d^2r}{d\varphi^2} + \frac{-2\dot{\varphi}^2}{r}\frac{dr}{d\varphi}\frac{dr}{d\varphi} - r\dot{\varphi}^2\right) \\
&= m\dot{\varphi}^2\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\right) \\
&= \frac{p_\varphi^2}{mr^4}\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\right) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.b) Ein Körper bewegt sich auf einem elliptischen Orbit $r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\,\cos\varphi}$ in einem Zentralkraftfeld, wobei das Zentrum in einem Brennpunkt liegt. Zeige dass $f(r) \sim r^{-2}$ gilt.

$$\begin{aligned}
r(\varphi) &= \frac{p}{1+\varepsilon\,\cos\varphi} \qquad \text{mit}\, p = \frac{p_\varphi^2}{m\alpha} = a(1-\varepsilon^2) \\
\frac{dr}{d\varphi} &= -\frac{-p\varepsilon\,\sin\varphi}{\left(1+\varepsilon\,\cos\varphi\right)^2} \\
&= \frac{r^2}{p}\varepsilon\,\sin\varphi \\
\frac{d^2r}{d\varphi^2} &= \frac{\left(1+\varepsilon\,\cos\varphi\right)^2\cdot p\varepsilon\,\cos\varphi - p\varepsilon\,\sin\varphi\cdot 2\left(1+\varepsilon\,\cos\varphi\right)\left(-\varepsilon\sin\varphi\right)}{\left(1+\varepsilon\,\cos\varphi\right)^4} \\
&= p\frac{\varepsilon\,\cos\varphi + \varepsilon^2\,\cos^2\varphi + 2\varepsilon^2\,\sin^2\varphi}{\left(1+\varepsilon\,\cos\varphi\right)^3} \\
&= \frac{r^3}{p^2}\left(\varepsilon\,\cos\varphi + \varepsilon^2\,\cos^2\varphi + 2\varepsilon^2\,\sin^2\varphi\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow f(r) &= \frac{p_\varphi^2}{mr^4}\left(\frac{r^3}{p^2}\left(\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2\cos^2\varphi+2\varepsilon^2\sin^2\varphi\right)-\frac{2}{r}\frac{r^4}{p^2}\varepsilon^2\sin^2\varphi-\frac{r^3}{p^2}\left(1+\varepsilon\cos\varphi\right)^2\right)\\
&= \frac{p_\varphi^2}{mrp^2}\left(\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2\cos^2\varphi-1-2\varepsilon\cos\varphi-\varepsilon^2\cos^2\varphi\right)\\
&= \frac{p_\varphi^2}{mrp^2}\left(-1-\varepsilon\cos\varphi\right)\\
&= -\frac{p_\varphi^2}{mp}\frac{1}{r^2}\\
\Rightarrow f(r) &\sim r^{-2}
\end{aligned}
$$

2.c) In einem anderen Zentrafkraftfeld bewegt sich ein Körper auf der Bahn $r(\varphi) = r_0 e^{-\varphi}$. Zeige dass das Kraftfeld mit r^{-3} abnimmt.

$$
\begin{aligned}
r(\varphi) &= r_0 e^{-\varphi}\\
\frac{dr}{d\varphi} &= -r_0 e^{-\varphi} = -r\\
\frac{d^2 r}{d\varphi^2} &= r_0 e^{-\varphi} = r
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow f(r) &= \frac{p_\varphi^2}{mr^4}\left(r-\frac{2}{r}\left(-r\right)^2-r\right)\\
&= \frac{p_\varphi^2}{mr^4}\left(-2r\right)\\
&= -\frac{2p_\varphi^2}{m}\frac{1}{r^3}\\
\Rightarrow f(r) &= \frac{1}{r^3}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

2 P

Drittes Kepler'sches Gesetz

Beweise, dass bei Planetenbewegungen näherungsweise das 3. Keplergesetz

$$T^2 \sim a^3$$

(Qudrate der Umlaufzeiten sind proportional zur dritten Potenz der großen Halbachse) gilt. Untersuche den Proporitonalitätsfaktor für unser Sonnensystem.

Fläche einer Ellipse:

$$
\begin{aligned}
A &= \pi a b\\
&= \pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2} \qquad \varepsilon = \sqrt{1-\frac{2Ep_\varphi^2}{\mu\alpha^2}}\\
&= \pi a^2\sqrt{1-1-\frac{2Ep_\varphi^2}{\mu\alpha^2}} \qquad E = \frac{\alpha}{2a}\\
&= \pi a^2\sqrt{-\frac{p_\varphi^2}{\mu a\alpha}}\\
&= \frac{\pi p_\varphi}{\sqrt{\mu\alpha}}a^{3/2}
\end{aligned}
$$

überstrichene Fläche:

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \int_0^T \dot{\vec{A}}\,dt \\
&= \int_0^T \frac{1}{2}\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\,dt \\
&= \int_0^T \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}\,dt \\
&= \int_0^T \frac{1}{2}r^2\frac{p_\varphi}{\mu r^2}\,dt \\
&= \int_0^T \frac{p_\varphi}{2\mu}\,dt \\
&= \frac{p_\varphi}{2\mu}T
\end{aligned}$$

Die Beiden Flächen sind gleich:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi p_\varphi}{\sqrt{\mu\alpha}}a^{3/2} &= \frac{p_\varphi}{2\mu}T \\
\Leftrightarrow T &= 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}a^{3/2} \\
\Leftrightarrow T^2 &= \frac{4\pi^2}{\gamma(m_1+m_2)}a^3 \\
\Rightarrow T^2 &\sim a^3
\end{aligned}$$

Für unser Sonnensystem $m_1 \gg m_2$ ist der Proportionalitätsfaktor für alle Planeten näherungsweise gleich:

$$\frac{4\pi^2}{\gamma(m_1+m_2)} \approx \frac{4\pi^2}{\gamma m_1} = 2.9 \cdot 10^{-18}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2}$$