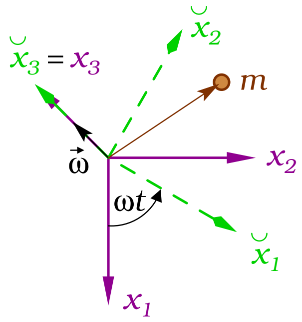
Übungsblatt 11

Lösungsvorschlag
3 Aufgaben, 9 Punkte

Aufgabe 1

3 P

Rotierendes Bezugssystem



In der Vorlesung wurden die Bewegungsgleichungen

$$
\begin{aligned}
S:\ m\vec{a} &= -\vec{\nabla}U(\vec{r}) \\
\breve{S}:\ m\breve{\vec{a}} &= -m\left(\dot{\breve{\vec{\omega}}} \times \breve{\vec{r}}\right) - 2m\left(\breve{\vec{\omega}} \times \breve{\vec{v}}\right) - m\breve{\vec{\omega}} \times \left(\dot{\breve{\vec{\omega}}} \times \breve{\vec{r}}\right) - \breve{\vec{\nabla}}U(\breve{\vec{r}})
\end{aligned}
$$

für die Bewegung eines Massenpunktes aus Sicht eines inertialen Bezugssystems S und eines rotierenden $\breve{S}$ abgeleitet. In der Vorlseung wurde angemerkt, dass der Ortsvektor des Massenpunktes unabhängig von der gewählten Darstellung ist

$$
\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3} \breve{x}_i \breve{\vec{e}}_i = \breve{\vec{r}}
$$

solange der Ursprung $0 = \breve{0}$ gleich bleibt.

1.a) Bestimme die $\breve{\vec{e}}_i$ in Abhängigkeit von $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ sowie die $\breve{x}_i$ in Abhängigkeit von (x_1, x_2, x_3) für die in der Grafik dargestellten Drehung.

Aus der Graphik sieht man:

$$
\begin{aligned}
\breve{\vec{e}}_1 &= \vec{e}_1 \cos\omega t + \vec{e}_2 \sin\omega t \\
\breve{\vec{e}}_3 &= \vec{e}_3
\end{aligned}
$$

$\breve{S}$ ist ein rechtwinkliges Dreibein, deshalb gilt

$$
\begin{aligned}
\breve{\vec{e}}_2 &= \breve{\vec{e}}_3 \times \breve{\vec{e}}_1 \\
\breve{\vec{e}}_2 &= \begin{pmatrix} 0 - \sin\omega t \cdot 1 \\ \cos\omega t \cdot 1 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} \\
\breve{\vec{e}}_2 &= -\vec{e}_1 \sin\omega t + \vec{e}_2 \cos\omega t
\end{aligned}
$$

Berechnung der Komponenten:

$$
\breve{x}_i = \breve{\vec{e}}_i \cdot \breve{\vec{r}} = \breve{\vec{e}}_i \cdot \vec{r} = \breve{\vec{e}}_i \cdot \sum_{j=1}^{3} x_j \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{3} x_j \breve{\vec{e}}_i \vec{e}_j
$$

Die 9 Skalarprodukte $D_{ij} = \breve{\vec{e}}_i \vec{e}_j$ kann man in einer (Rotations-)Matrix $\mathbf{D}$ zusammenfassen:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit kann man die Komponenten ineinander umformen:

$$\begin{pmatrix} \breve{x}_1 \\ \breve{x}_2 \\ \breve{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{aligned} \breve{x}_1 &= x_1 \cos\omega t + x_2 \sin\omega t \\ \breve{x}_2 &= -x_1 \sin\omega t + x_2 \cos\omega t \\ \breve{x}_3 &= x_3 \end{aligned}$$

Es wird nocheinmal darauf hingewiesen dass $\breve{\vec{r}} \neq \mathbf{D}\vec{r}$ ist, da es sich um eine passive Drehung handelt, bei der $\breve{\vec{r}} = \vec{r}$ gilt.

1.b) Zeige für diese Bezugssysteme durch Rechnung mit Komponenten

$$\vec{v} = \breve{\vec{v}} + \vec{\omega} \times \breve{\vec{r}}$$

Die Geschwindigkeit ist definiert als

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i \vec{e}_i$$

Wegen $\breve{\vec{r}} = \vec{r}$ gilt

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d}{dt}\breve{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{3} \breve{x}_i \breve{\vec{e}}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \dot{\breve{x}}_i \breve{\vec{e}}_i + \sum_{i=1}^{3} \breve{x}_i \dot{\breve{\vec{e}}}_i \end{aligned}$$

In Übungsblatt 0 wurde gezeigt, dass für uniform rotierende Bezugsysteme gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_r &= \omega(-\sin\omega t \cdot \vec{e}_x + \cos\omega t \cdot \vec{e}_y) = \omega \vec{e}_\varphi \\ \dot{\vec{e}}_\varphi &= -\omega(\cos\omega t \cdot \vec{e}_x + \sin\omega t \cdot \vec{e}_y) = -\omega \vec{e}_r \end{aligned}$$

übertragen auf unser rotierende Bezugsystem heißt das

$$\dot{\breve{\vec{e}}}_1 = \omega \breve{\vec{e}}_2 \qquad \dot{\breve{\vec{e}}}_2 = -\omega \breve{\vec{e}}_1 \qquad \dot{\breve{\vec{e}}}_3 = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} \breve{x}_i \dot{\breve{\vec{e}}}_i &= \breve{x}_1 \omega \breve{\vec{e}}_2 - \breve{x}_2 \omega \breve{\vec{e}}_1 \\ &= \omega \begin{pmatrix} -\breve{x}_2 \\ \breve{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \breve{x}_1 \\ \breve{x}_2 \\ \breve{x}_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In unserem Fall ist $\vec{\omega} = \omega\breve{\vec{e}}_3$.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{3} \breve{x}_i \dot{\breve{\vec{e}}}_i \quad = \quad \vec{\omega} \times \breve{\vec{r}}$$

mit $\sum_{i=1}^{3} \dot{\breve{x}}_i \breve{\vec{e}}_i = \breve{\vec{v}}$ folgt:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \sum_{i=1}^{3} \dot{\breve{x}}_i \breve{\vec{e}}_i + \sum_{i=1}^{3} \breve{x}_i \dot{\breve{\vec{e}}}_i \\ &= \breve{\vec{v}} + \vec{\omega} \times \breve{\vec{r}} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

1.c) Leite die Bewegungsgleichungen für dieses spezielle rotierende Bezugssystem her. Die allgemeine Form (1) sollte höchstens zur Kontrolle benutzt werden.

Lagrangefunktion:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{T} + \mathcal{V} \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - \mathcal{V}(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2} m \left(\breve{\vec{v}} + \vec{\omega} \times \breve{\vec{r}} \right)^2 - \mathcal{V}(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2} m \left(\sum_{i=1}^{3} \dot{\breve{x}}_i \breve{\vec{e}}_i + \omega \breve{x}_1 \breve{\vec{e}}_2 - \omega \breve{x}_2 \breve{\vec{e}}_1 \right)^2 - \mathcal{V}(\breve{x}_1, \breve{x}_2, \breve{x}_3) \\ &= \frac{1}{2} m \left(\sum_{i=1}^{3} \dot{\breve{x}}_i^2 + 2\omega \breve{x}_1 \dot{\breve{x}}_2 - 2\omega \breve{x}_2 \dot{\breve{x}}_1 + \sum_{i=1}^{2} \omega^2 \breve{x}_i^2 \right) - \mathcal{V}(\breve{x}_1, \breve{x}_2, \breve{x}_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\breve{x}}_1} &= \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \left(2\dot{\breve{x}}_1 - 2\omega \breve{x}_2 \right) = m\ddot{\breve{x}}_1 - m\omega \dot{\breve{x}}_2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \breve{x}_1} &= m\omega \dot{\breve{x}}_2 + m\omega^2 \breve{x}_1 - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \breve{x}_1} \\ \Rightarrow m\ddot{\breve{x}}_1 &= 2m\omega \dot{\breve{x}}_2 + m\omega^2 \breve{x}_1 - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \breve{x}_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\breve{x}}_2} &= \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \left(2\dot{\breve{x}}_2 + 2\omega \breve{x}_1 \right) = m\ddot{\breve{x}}_2 + m\omega \dot{\breve{x}}_1 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \breve{x}_2} &= -m\omega \dot{\breve{x}}_1 + m\omega^2 \breve{x}_2 - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \breve{x}_2} \\ \Rightarrow m\ddot{\breve{x}}_2 &= -2m\omega \dot{\breve{x}}_1 + m\omega^2 \breve{x}_2 - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \breve{x}_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\breve{x}}_3} &= \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \left(2\dot{\breve{x}}_3 \right) = m\ddot{\breve{x}}_3 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \breve{x}_3} &= -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \breve{x}_3} \\ \Rightarrow m\ddot{\breve{x}}_3 &= -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \breve{x}_3} \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen zusammen gefasst:

$$m\ddot{\breve{x}}_1 = 2m\omega \dot{\breve{x}}_2 + m\omega^2 \breve{x}_1 - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \breve{x}_1}$$

$$
\begin{aligned}
m\ddot{\breve{x}}_2 &= -2m\omega\dot{\breve{x}}_1 + m\omega^2\breve{x}_2 - \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\breve{x}_2} \\
m\ddot{\breve{x}}_3 &= -\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\breve{x}_3}
\end{aligned}
$$

Das kann man als Vektorgleichung zusammenfassen:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{\breve{\vec{r}}} &= 2m\omega\breve{\vec{e}}_1\dot{\breve{x}}_2 - 2m\omega\breve{\vec{e}}_2\dot{\breve{x}}_1 + \sum_{i=1}^{2} m\omega^2\breve{\vec{e}}_i\breve{x}_i - \breve{\vec{\nabla}}\mathcal{V} \\
&\vdots \\
m\ddot{\breve{\vec{r}}} &= -2m\left(\vec{\omega}\times\breve{\vec{v}}\right) - m\vec{\omega}\times\left(\dot{\vec{\omega}}\times\breve{\vec{r}}\right) - \breve{\vec{\nabla}}\mathcal{V}
\end{aligned}
$$

$\vec{F}_C = -2m\left(\vec{\omega}\times\breve{\vec{v}}\right)$ heißt CORIOLISkraft und $\vec{F}_Z = -m\vec{\omega}\times\left(\dot{\vec{\omega}}\times\breve{\vec{r}}\right)$ ist die Zentrifugalkraft.

Aufgabe 2

3 P

Bewegung im rotierenden Bezugssystem

In dieser Aufgabe wird wieder ein Massenpunkt in einem Inertialsystem und einem uniform rotierenden Bezugssystem betrachtet. Der Massenpunkt bewegt sich dieses Mal im Inertialsystem mit konstanter Geschwindigkeit v entlang der x-Achse. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich der Massenpunkt im Ursprung beider Bezugsysteme.

Wie bewegt sich der Massenpunkt aus Sicht eines rotierenden Beobachters?

Hinweis: Eine Möglichkeit die gekoppelten Differentialgleichungen zu lösen ist die doppelte bzw. einfache Ableitung und ineinander einzusetzen.

Es treten keine weiteren Kräfte/Potentiale auf. Deshalb sind die Bewegungsgleichungen

$$
\begin{aligned}
m\ddot{\breve{x}}_1 &= 2m\omega\dot{\breve{x}}_2 + m\omega^2\breve{x}_1 && (2) \\
m\ddot{\breve{x}}_2 &= -2m\omega\dot{\breve{x}}_1 + m\omega^2\breve{x}_2 && (3)
\end{aligned}
$$

Die dritte Koordinate ist in diesem Beispiel belanglos. Um dieses DGL-System zu lösen wird (2) zweimal und (3) einmal nach der Zeit abgeleitet:

$$
\begin{aligned}
\ddddot{\breve{x}}_1 &= 2\omega\dddot{\breve{x}}_2 + \omega^2\ddot{\breve{x}}_1 && (4) \\
\dddot{\breve{x}}_2 &= -2\omega\ddot{\breve{x}}_1 + \omega^2\dot{\breve{x}}_2 && (5)
\end{aligned}
$$

Benutze (3) um $\dot{\breve{x}}_2$ aus (5) zu eliminieren:

$$
\dot{\breve{x}}_2 = \frac{1}{2\omega}\ddot{\breve{x}}_1 - \frac{\omega}{2}\breve{x}_1
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \dddot{\breve{x}}_2 &= -2\omega\ddot{\breve{x}}_1 + \frac{\omega}{2}\ddot{\breve{x}}_1 - \frac{\omega^3}{2}\breve{x}_1 \\
&= -\frac{3}{2}\omega\ddot{\breve{x}}_1 - \frac{\omega^3}{2}\breve{x}_1
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung in (4) einsetzen:

$$
\begin{aligned}
\ddddot{\breve{x}}_1 &= -3\omega^2\ddot{\breve{x}}_1 - \omega^4\breve{x}_1 + \omega^2\ddot{\breve{x}}_1 \\
\Leftrightarrow 0 &= \ddddot{\breve{x}}_1 + 2\omega^2\ddot{\breve{x}}_1 + \omega^4\breve{x}_1 && (6)
\end{aligned}
$$

zur Lösung wird der Ansatz $\breve{x}_1 = \exp(\lambda t)$ eingesetzt:

$$\begin{aligned}
\lambda^4 e^{\lambda t} + 2\lambda^2\omega^2 e^{\lambda t} + \omega^4 e^{\lambda t} &= 0 \\
\lambda^4 + 2\lambda^2\omega^2 + \omega^4 &= 0 \\
\left(\lambda^2 + \omega^2\right)^2 &= 0
\end{aligned}$$

Das ist die Charaktaristische Gleigung der DGL 4. Ordnung. Sie hat die beiden Wurzeln 2. Ordnung

$$\lambda_1 = i\omega \qquad\qquad \lambda_2 = -i\omega$$

Damit ist die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}
\breve{x}_1 &= (\mathcal{A} + \mathcal{C}t)\, e^{i\omega t} + (\mathcal{B} + \mathcal{D}t)\, e^{-i\omega t} \\
\dot{\breve{x}}_1 &= (i\omega\mathcal{A} + i\omega\mathcal{C}t + \mathcal{C})\, e^{i\omega t} + (-i\omega\mathcal{B} - i\omega\mathcal{D}t + \mathcal{D})\, e^{-i\omega t} \\
\ddot{\breve{x}}_1 &= \left(-\omega^2\mathcal{A} - \omega^2\mathcal{C}t + 2i\omega\mathcal{C}\right) e^{i\omega t} + \left(-\omega^2\mathcal{B} + \omega^2\mathcal{D}t - 2i\omega\right) e^{-i\omega t} \\
\dddot{\breve{x}}_1 &= \left(-i\omega^3\mathcal{A} - i\omega^3\mathcal{C}t - 3\omega^2\mathcal{C}\right) e^{i\omega t} + \left(i\omega^3\mathcal{B} - i\omega^3\mathcal{D}t - 3\omega^2\mathcal{D}\right) e^{-i\omega t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\breve{x}}_1(0) &= 2\omega\dot{\breve{x}}_2(0) + \omega^2\breve{x}_1(0) \;=\; 0 \\
\dddot{\breve{x}}_1(0) &= 2\omega\ddot{\breve{x}}_2 + \omega^2\dot{\breve{x}}_1 \\
&= -4\omega^2\dot{\breve{x}}_1(0) + \omega^2\breve{x}_2(0) + \omega^2\dot{\breve{x}}_1(0) \\
&= -3\omega^2 v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{A} + \mathcal{B} && (7) \\
v &= i\omega\mathcal{A} + \mathcal{C} - i\omega\mathcal{B} + \mathcal{D} && (8) \\
0 &= -\omega^2\mathcal{A} + 2i\omega\mathcal{C} - \omega^2\mathcal{B} - 2i\omega\mathcal{D} && (9) \\
-3\omega^2 v &= -i\omega^3\mathcal{A} - 3\omega^2\mathcal{C} + i\omega^3\mathcal{B} - 3\omega^2\mathcal{D} && (10)
\end{aligned}$$

Addiere $3\omega^2$ mal (8) mit (10):

$$\begin{aligned}
3\omega^2 v - 3\omega^2 v &= i\omega^3\mathcal{A} + 3\omega^2\mathcal{C} - i\omega^3\mathcal{B} + 3\omega^2\mathcal{D} - i\omega^3\mathcal{A} - 3\omega^2\mathcal{C} + i\omega^3\mathcal{B} - 3\omega^2\mathcal{D} \\
0 &= 2i\omega^3\mathcal{A} - 2i\omega^3\mathcal{B} \\
\Rightarrow 0 &= \mathcal{A} - \mathcal{B}
\end{aligned}$$

Diese Gleichung und (7) erlauben nur die Lösungen $\mathcal{A} = \mathcal{B} = 0$. Damit werden die Gleichungen (8) und (9) zu:

$$\begin{aligned}
v &= \mathcal{C} + \mathcal{D} \\
0 &= \mathcal{C} - \mathcal{D}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{C} \;=\; \mathcal{D} \;=\; \frac{v}{2}$$

Die Lösung für $\breve{x}_1$ ist damit

$$\breve{x}_1 \;=\; \frac{vt}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) \;=\; vt\,\cos\omega t$$

Die DGL für $\breve{x}_2$ kann man gewinnen wenn man die Ausgangsgleichung (2) ableitet

$$\begin{aligned}
\dddot{\breve{x}}_1 &= 2\omega\ddot{\breve{x}}_2 + \omega^2\dot{\breve{x}}_1 \\
\Leftrightarrow \ddot{\breve{x}}_2 &= \frac{1}{2\omega}\dddot{\breve{x}}_1 - \frac{\omega}{2}\dot{\breve{x}}_1
\end{aligned}$$

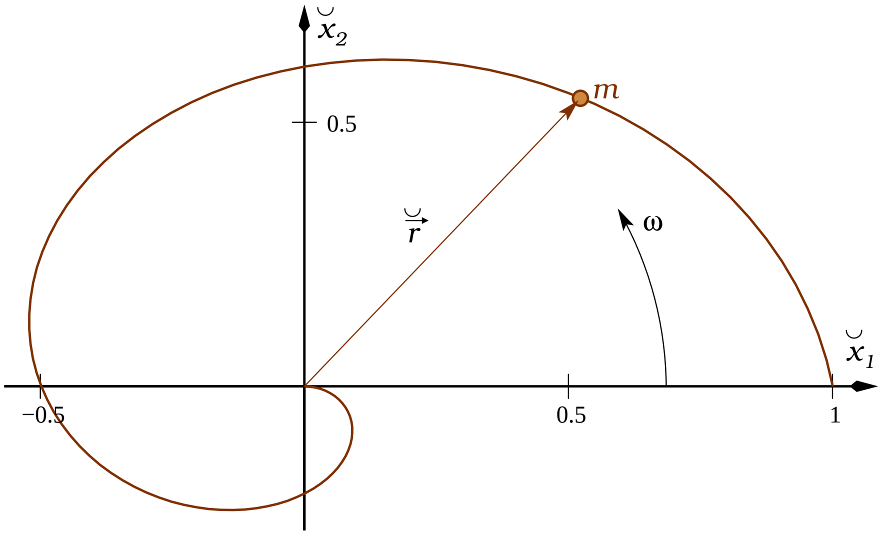


Abbildung 1: Bahnkurve des Massenpunktes im rotierenden Bezugssystem. Parameter: $\omega = 2\pi$ und $v = 1$

und in (3) einsetzt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\omega}\dddot{\breve{x}}_1 - \frac{\omega}{2}\dot{\breve{x}}_1 &= -2\omega\dot{\breve{x}}_1 + \omega^2\breve{x}_2 \\
\Leftrightarrow \breve{x}_2 &= \frac{1}{2\omega^3}\dddot{\breve{x}}_1 + \frac{3}{2\omega}\dot{\breve{x}}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\breve{x}_1 &= vt\,\cos\omega t \\
\dot{\breve{x}}_1 &= v\,\cos\omega t - v\omega t\,\sin\omega t \\
\ddot{\breve{x}}_1 &= -2v\omega\,\sin\omega t - v\omega^2 t\,\cos\omega t \\
\dddot{\breve{x}}_1 &= -3v\omega^2\,\cos\omega t - v\omega^3 t\,\sin\omega t
\end{aligned}$$

einsetzen:

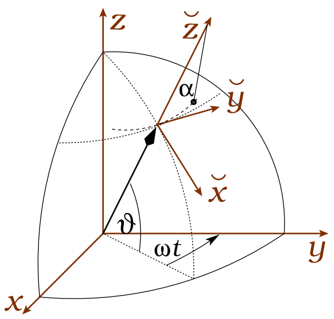
$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \breve{x}_2 &= \frac{1}{2\omega^3}\left(-3v\omega^2\,\cos\omega t - v\omega^3 t\,\sin\omega t t\right) + \frac{3}{2\omega}\left(v\,\cos\omega t - v\omega t\,\sin\omega t\right) \\
&= -\frac{3v}{2\omega}\cos\omega t - \frac{v}{2}t\,\sin\omega t + \frac{3v}{2\omega}\cos\omega t - \frac{v}{2}t\,\sin\omega t \\
&= -vt\,\sin\omega t
\end{aligned}$$

Der Massenpunkt beswegt also im umiform rotierenden Bezugssystem auf einer Spiralbahn.

Aufgabe 3

3 P

Foucault'sches Pendel



Der französiche Physiker Jean Bernard Foucault (1819 - 1868) hat in den Jahren 1850 und 1851 mit Hilfe eines Fadenpendels nachgewiesen, daß die Erde um ihre Polachse rotiert. Eine nach dem gleichen Prinzip arbeitende Versuchsanordnung nennt man Foucaultsches Pendel. Berechne in der Näherung kleiner Ausschläge wie sich die Schwingungsebene eines $30\,\mathrm{kg}$ schweren Pendels der Länge $l = 50\,\mathrm{m}$ aufgrund der Erdrotation dreht. Gib die Rotationsdauer in Abhängigkeit von der geografischen Breite an. Verwende dabei $\breve{x}$ und $\breve{y}$ als generalisierte Koordinaten. Aller Terme mit der Ordnung ω^2 und mit $\dot{\breve{z}}$ können vernachlässigt werden.

Es gilt die holonome Zwangsbedingung

$$\begin{aligned} \breve{x}^2 + \breve{y}^2 + \breve{z}^2 &= l^2 \\ \Leftrightarrow \breve{z} &= l\,(1 - \cos\alpha) \end{aligned}$$

Die kinetische Energie im rotierenden Bezugssystem (vgl. Aufgabe 1) ist

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{m}{2}\left(\dot{\breve{x}}^2 + \dot{\breve{y}}^2 + \dot{\breve{z}}^2 + 2\omega\,\sin\vartheta\left(\breve{x}_1\dot{\breve{x}}_2 - \breve{x}_2\dot{\breve{x}}_1\right) + \sum_{i=1}^{2}\breve{x}_i^2\omega^2\,\sin^2\vartheta\right) \\ &\approx \frac{m}{2}\left(\dot{\breve{x}}^2 + \dot{\breve{y}}^2 + 2\omega\,\sin\vartheta\left(\breve{x}_1\dot{\breve{x}}_2 - \breve{x}_2\dot{\breve{x}}_1\right)\right) \end{aligned}$$

Potentielle Energie:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= mgl\,(1-\cos\alpha) = mgl\left(1 - \sqrt{1-\sin^2\alpha}\right) \\ &\approx \frac{mgl}{2}\sin^2\alpha = \frac{mg}{2l}\left(\breve{x}^2 + \breve{y}^2\right) \end{aligned}$$

Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L} \approx \frac{m}{2}\left(\dot{\breve{x}}^2 + \dot{\breve{y}}^2 + 2\omega\,\sin\vartheta\left(\breve{x}_1\dot{\breve{x}}_2 - \breve{x}_2\dot{\breve{x}}_1\right)\right) - \frac{mg}{2l}\left(\breve{x}^2 + \breve{y}^2\right)$$

Analog zu Aufgabe 1 sind die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{\breve{x}} &= 2\omega\,\sin\vartheta\dot{\breve{y}} - \omega_0^2\breve{x} \\ \ddot{\breve{y}} &= -2\omega\,\sin\vartheta\dot{\breve{x}} - \omega_0^2\breve{y} \end{aligned}$$

Dabei ist $\omega_0 = \sqrt{\frac{mg}{l}}$ die Kreisfrequenz des Pendels wenn man die Erddrehung vernachlässigt. Wenn man die Bewegungsgleichungen auf ein Bezugsystem $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ transformiert, das mit der Winkelgeschwindigkeit $\tilde{\omega} = \omega\,\sin\vartheta$ um die $\breve{z}$-Achse rotiert, wird sich die Bewegungsgleichungen stark vereinfachen:

$$\begin{aligned} \breve{x} &= \tilde{x}\,\cos(\tilde{\omega}t) + \tilde{y}\,\sin(\tilde{\omega}t) \\ \dot{\breve{x}} &= \dot{\tilde{x}}\,\cos(\tilde{\omega}t) + \dot{\tilde{y}}\,\sin(\tilde{\omega}t) + \tilde{\omega}\left(-\tilde{x}\,\sin(\tilde{\omega}t) + \tilde{y}\,\cos(\tilde{\omega}t)\right) \\ \ddot{\breve{x}} &= \ddot{\tilde{x}}\,\cos(\tilde{\omega}t) + \ddot{\tilde{y}}\,\sin(\tilde{\omega}t) + 2\tilde{\omega}\left(-\dot{\tilde{x}}\,\sin(\tilde{\omega}t) + \dot{\tilde{y}}\,\cos(\tilde{\omega}t)\right) - \tilde{\omega}^2\left(\tilde{x}\,\cos(\tilde{\omega}t) + \tilde{y}\,\sin(\tilde{\omega}t)\right) \\ \breve{y} &= -\tilde{x}\,\sin(\tilde{\omega}t) + \tilde{y}\,\cos(\tilde{\omega}t) \\ \dot{\breve{y}} &= -\dot{\tilde{x}}\,\sin(\tilde{\omega}t) + \dot{\tilde{y}}\,\cos(\tilde{\omega}t) - \tilde{\omega}\left(\tilde{x}\,\cos(\tilde{\omega}t) + \tilde{\omega}\tilde{y}\,\sin(\tilde{\omega}t)\right) \\ \ddot{\breve{y}} &= -\ddot{\tilde{x}}\,\sin(\tilde{\omega}t) + \ddot{\tilde{y}}\,\cos(\tilde{\omega}t) - 2\tilde{\omega}\left(\dot{\tilde{x}}\,\cos(\tilde{\omega}t) + \tilde{\omega}\dot{\tilde{y}}\,\sin(\tilde{\omega}t)\right) + \tilde{\omega}^2\left(\tilde{x}\,\sin(\tilde{\omega}t) - \tilde{y}\,\cos(\tilde{\omega}t)\right) \end{aligned}$$

einsetzen:

$$
\begin{aligned}
& \ddot{\tilde{x}}\,\cos(\tilde{\omega}t) + \ddot{\tilde{y}}\,\sin(\tilde{\omega}t) + 2\tilde{\omega}\left(-\dot{\tilde{x}}\,\sin(\tilde{\omega}t) + \dot{\tilde{y}}\,\cos(\tilde{\omega}t)\right) - \tilde{\omega}^2\left(\tilde{x}\,\cos(\tilde{\omega}t) + \tilde{y}\,\sin(\tilde{\omega}t)\right) \\
= \; & 2\tilde{\omega}\left(-\dot{\tilde{x}}\,\sin(\tilde{\omega}t) + \dot{\tilde{y}}\,\cos(\tilde{\omega}t) - \tilde{\omega}\left(\tilde{x}\,\cos(\tilde{\omega}t) + \tilde{\omega}\tilde{y}\,\sin(\tilde{\omega}t)\right)\right) - \omega_0^2\left(\tilde{x}\,\cos(\tilde{\omega}t) + \tilde{y}\,\sin(\tilde{\omega}t)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \ddot{\tilde{x}}\,\cos(\tilde{\omega}t) + \ddot{\tilde{y}}\,\sin(\tilde{\omega}t) &= -\left(\omega_0^2 + \tilde{\omega}^2\right)\left(\tilde{x}\,\cos(\tilde{\omega}t) + \tilde{y}\,\sin(\tilde{\omega}t)\right) \\
\Leftrightarrow \ddot{\tilde{x}} + \ddot{\tilde{y}}\,\tan(\tilde{\omega}t) &= -\left(\omega_0^2 + \tilde{\omega}^2\right)\left(\tilde{x} + \tilde{y}\,\tan(\tilde{\omega}t)\right)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
& -\ddot{\tilde{x}}\,\sin(\tilde{\omega}t) + \ddot{\tilde{y}}\,\cos(\tilde{\omega}t) - 2\tilde{\omega}\left(\dot{\tilde{x}}\,\cos(\tilde{\omega}t) + \tilde{\omega}\dot{\tilde{y}}\,\sin(\tilde{\omega}t)\right) + \tilde{\omega}^2\left(\tilde{x}\,\sin(\tilde{\omega}t) - \tilde{y}\,\cos(\tilde{\omega}t)\right) \\
= \; & -2\tilde{\omega}\left(\dot{\tilde{x}}\,\cos(\tilde{\omega}t) + \dot{\tilde{y}}\,\sin(\tilde{\omega}t) + \tilde{\omega}\left(-\tilde{x}\,\sin(\tilde{\omega}t) + \tilde{y}\,\cos(\tilde{\omega}t)\right)\right) - \omega_0^2\left(-\tilde{x}\,\sin(\tilde{\omega}t) + \tilde{y}\,\cos(\tilde{\omega}t)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow -\ddot{\tilde{x}}\,\sin(\tilde{\omega}t) + \ddot{\tilde{y}}\,\cos(\tilde{\omega}t) &= \left(\tilde{\omega}^2 + \omega_0^2\right)\left(\tilde{x}\,\sin(\tilde{\omega}t) - \tilde{y}\,\cos(\tilde{\omega}t)\right) \\
\Leftrightarrow \ddot{\tilde{x}} - \ddot{\tilde{y}}\,\tan(\tilde{\omega}t) &= -\left(\tilde{\omega}^2 + \omega_0^2\right)\left(\tilde{x} - \tilde{y}\,\tan(\tilde{\omega}t)\right)
\end{aligned}
$$

Addition der beiden Gleichungen

$$
\ddot{\tilde{x}} = -\left(\tilde{\omega}^2 + \omega_0^2\right)\tilde{x}
$$

Subtraktion der beiden Gleichungen

$$
\ddot{\tilde{y}} = -\left(\tilde{\omega}^2 + \omega_0^2\right)\tilde{y}
$$

Betrachte die Kreisfrequenzen:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\omega} &= \omega\,\sin\vartheta = \frac{2\pi\,\sin\vartheta}{24 \cdot 3600\,\mathrm{s}} \approx 7.27 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1} \cdot \sin\vartheta \\
\omega_0 &= \sqrt{\frac{mg}{l}} \approx 5.89\,\mathrm{s}^{-1}
\end{aligned}
$$

Das bedeutet dass $\tilde{\omega}$ gegenüber ω_0 vernachlässigt werden kann.

Die Lösungen dieser Differentialgleichungen sind damit

$$
\begin{aligned}
\tilde{x} &= \tilde{x}_0\sin(\omega_0 t + \delta_x) \\
\tilde{y} &= \tilde{y}_0\sin(\omega_0 t + \delta_y)
\end{aligned}
$$

Mit der Zwangsbedingungen des Ebenen Pendels

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \left(\mathcal{A}\sin(\omega_0 t + \delta)\right)^2 &= 0 \\
\tilde{x}_0^2\sin^2(\omega_0 t + \delta_x) + \tilde{y}_0^2\sin^2(\omega_0 t + \delta_y) &= \left(\mathcal{A}\sin(\omega_0 t + \delta)\right)^2
\end{aligned}
$$

muss gelten

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_0^2 + \tilde{y}_0^2 &= \mathcal{A}^2 \\
\delta_x = \delta_y &= \delta
\end{aligned}
$$

Wähle die Anfangsbedingungen so, dass

$$
\tilde{x}_0 = \mathcal{A} \qquad \tilde{y}_0 = 0
$$

Ort	Breitengrad	Umlaufdauer T	Kreisfrequenz $\tilde{\omega}$
Nordpol	90°	24 h	$7.27 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$
Trondheim	63°25'	26.8 h	$6.50 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$
Clausthal	51°48'	30.5 h	$5.71 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$
Siena	43° 20'	35,0 h	$4.99 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$
Shànghǎi	31° 12'	46.3 h	$3.77 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$
Mayapán	20°38'	68.1 h	$2.56 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$
Huề	16° 28'	84.7 h	$2.06 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$
Äquator	0	∞	0
Recife	-8°4'	173.9 h	$-1.00 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$
Taveuni	-16°49'	83.0 h	$-2.10 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$

Tabelle 1: Kreisfrequenz und Umlaufdauer des FOUCAULT'schen Pendels

In die Gleichung für $\breve{x}$ und $\breve{y}$ einsetzen:

$$\begin{aligned} \breve{x} &= \mathcal{A}\,\sin(\omega_0 t + \delta_x)\,\cos(\tilde{\omega} t) \\ \breve{y} &= -\mathcal{A}\,\sin(\omega_0 t + \delta_x)\,\sin(\tilde{\omega} t) \end{aligned}$$

Das sind die Gleichungen für ein ebenes Pendel das mit $\omega_0 t$ schwingt. Dabei dreht sich die Schwingungsebene mit $\tilde{\omega}$ um die Ruhelage ($\breve{z}$-Achse). Die Umlaufdauer beträgt

$$T = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}} = \frac{24 \cdot 3600\,\mathrm{s}}{\sin\vartheta}$$

Oder einen Tag mal $\csc(\vartheta)$. ϑ ist die geographisch Breite. Beislpiele: