Übungsblatt 12

Lösungsvorschlag
3 Aufgaben, 8 Punkte

Aufgabe 1

2 P

Kreuzprodukt und Levi-Civita-Symbol

In dieser Aufgabe soll das Kreuzprodukt und einige Verknüpfungen mit diesem in Indexschreibweise dargestellt werden. Dabei wird das LEVI-CIVITA-Symbol verwendet:

$$\epsilon_{ijk...} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j,k,...) \text{ eine zyklische Permutation von } (1,2,3,...) \text{ ist} \\ -1 & \text{falls } (i,j,k,...) \text{ eine antizyklische Permutation von } (1,2,3,...) \text{ ist} \\ 0 & \text{falls mindestens zwei Indizies gleich sind} \end{cases}$$

Eine Eigenschaft des LEVI-CIVITA-Symbols ist

$$\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \tag{1}$$

wobei δ_{ij} das KRONECKERdelta ist mit

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

1.a) Stelle die x_i-Komponente des Kreuzpoduktes in Indexschreibweise dar. Ergebnis:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i$$

$$\begin{aligned} \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_1 &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ &= 0 \cdot a_2 b_2 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + 0 \cdot a_3 b_3 \\ &= \sum_{j,k=2}^{3} \epsilon_{1jk} a_j b_k \\ &= \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{1jk} a_j b_k \end{aligned}$$

Analoges gilt für die anderen Komponenten

$$\Rightarrow \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

$$\Rightarrow \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i$$

1.b) Beweise die Relation

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$$

und stelle sie in Indexschreibweise dar. Berechne den Sonderfall $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2$

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right) &= \left(\sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}a_j b_k\vec{e}_i\right)\left(\sum_{l,m,n=1}^{3}\epsilon_{lmn}c_m d_n\vec{e}_l\right)\\
&= \sum_{i,j,k,l,m,n=1}^{3}\epsilon_{ijk}a_j b_k\vec{e}_i\epsilon_{lmn}c_m d_n\vec{e}_l\\
&= \sum_{j,k,l,m,n=1}^{3}\epsilon_{ljk}\epsilon_{lmn}a_j b_k c_m d_n
\end{aligned}$$

Benutze Eigenschaft (1):

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right) &= \sum_{j,k,m,n=1}^{3}\left(\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}\right)a_j b_k c_m d_n\\
&= \sum_{j,k,m,n=1}^{3}\left(\delta_{jm}a_j c_m\delta_{kn}b_k d_n-\delta_{jn}a_j d_n\delta_{km}b_k c_m\right)\\
&= \sum_{j,k=1}^{3}\left(a_j c_j b_k d_k-a_j d_j b_k c_k\right)\\
&= \left(\sum_{j=1}^{3}a_j c_j\right)\left(\sum_{k=1}^{3}b_k d_k\right)-\left(\sum_{j=1}^{3}a_j d_j\right)\left(\sum_{k=1}^{3}b_k c_k\right)\\
&= (\vec{a}\cdot\vec{c})\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Indexschreibweise:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right) = \sum_{i,j=1}^{3}a_i c_i b_j d_j-\sum_{i,j=1}^{3}a_i d_i b_j c_j$$

Sonderfall:

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2 &= \sum_{i,j=1}^{3}a_i a_i b_j b_j-\sum_{i,j=1}^{3}a_i b_i b_j a_j\\
&= \left(\sum_{i=1}^{3}a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{3}b_j^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{3}a_i b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{3}b_j a_j\right)\\
&= \vec{a}^2\vec{b}^2-\left(\sum_{i=1}^{3}a_i b_i\right)^2\\
&= \vec{a}^2\vec{b}^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2
\end{aligned}$$

1.c) Beweise die Relation

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

und stelle sie in Indexschreibweise dar. Berechne den Sonderfall $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{c})$.

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) &= \vec{a} \times \left(\sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{i,j,k} b_j c_k \vec{e}_i\right) \\
&= \sum_{l,m,n=1}^{3} \epsilon_{lmn} a_m \left(\sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{i,j,k} b_j c_k \vec{e}_i\right)_n \vec{e}_l \\
&= \sum_{l,m,n=1}^{3} \epsilon_{lmn} a_m \left(\sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{i,j,k} b_j c_k \delta_{in}\right) \vec{e}_l \\
&= \sum_{i,j,k,l,m,n=1}^{3} \epsilon_{lmn} a_m \epsilon_{i,j,k} b_j c_k \delta_{in} \vec{e}_l \\
&= \sum_{i,j,k,l,m=1}^{3} \epsilon_{lmi} \epsilon_{i,j,k} a_m b_j c_k \vec{e}_l
\end{aligned}$$

Es gilt $\epsilon_{lmi} = \epsilon_{ilm}$:

$$\Rightarrow \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \sum_{i,j,k,l,m=1}^{3} \epsilon_{ilm} \epsilon_{i,j,k} a_m b_j c_k \vec{e}_l$$

Benutze Eigenschaft (1):

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) &= \sum_{j,k,l,m=1}^{3} \left(\delta_{lj}\delta_{mk} - \delta_{lk}\delta_{mj}\right) a_m b_j c_k \vec{e}_l \\
&= \sum_{j,k,l,m=1}^{3} \left(\delta_{lj} b_j \vec{e}_l \delta_{mk} a_m c_k - \delta_{lk} c_k \vec{e}_l \delta_{mj} a_m b_j\right) \\
&= \sum_{k,l,m=1}^{3} \left(b_l \vec{e}_l a_k c_k - c_l \vec{e}_l a_m b_m\right) \\
&= \sum_{k,l=1}^{3} b_l \vec{e}_l a_k c_k - \sum_{k,l=1}^{3} c_l \vec{e}_l a_k b_k \\
&= \left(\sum_{l=1}^{3} b_l \vec{e}_l\right)\left(\sum_{k=1}^{3} a_k c_k\right) - \left(\sum_{l=1}^{3} c_l \vec{e}_l\right)\left(\sum_{k=1}^{3} a_k b_k\right) \\
&= \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Indexschreibweise:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \sum_{i,j=1}^{3} b_i \vec{e}_i a_j c_j - \sum_{i,j=1}^{3} c_i \vec{e}_i a_j b_j$$

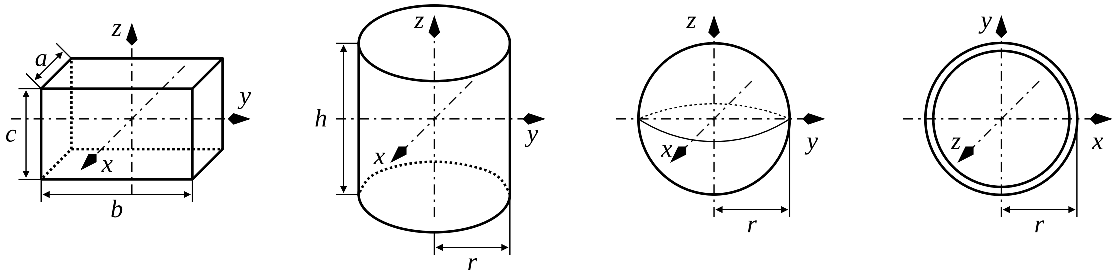

Abbildung 1: Starre Körper mit ihren Hauptträgheitsachsen x,y und z

Sonderfall:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{c}) &= \sum_{i,j=1}^{3} a_i \vec{e}_i a_j c_j - \sum_{i,j=1}^{3} c_i \vec{e}_i a_j a_j \\
&= \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i \right) \left(\sum_{j=1}^{3} a_j c_j \right) - \left(\sum_{i=1}^{3} c_i \vec{e}_i \right) \left(\sum_{j=1}^{3} a_j a_j \right) \\
&= \vec{a} \, (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \vec{a}^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

3 P

Trägheitsmomente

Berechne die Trägheitstensoren für Drehungen um den Schwerpunkt für folgende homogene Körper in geegneten körperfesten Koordinatensystemen.

2.a) Quader mit den Seitenlängen a, b und c

Wähle die kartesischen Koordinaten so, wie in der Graphik angegeben. Mit der Dichte des homogenen Quaders $\frac{m}{abc}$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\Theta_{11} &= \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{m}{abc} \left(y^2 + z^2 \right) \, dz \, dy \, dx \\
&= \frac{m}{b} \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy + \frac{m}{c} \int_{-c/2}^{c/2} z^2 \, dz \, dy \\
&= \frac{m}{3b} \, y^3 \Big|_{-b/2}^{b/2} + \frac{m}{3c} \, z^3 \Big|_{-c/2}^{c/2} \\
&= \frac{m}{3b} \frac{2b^3}{8} + \frac{m}{3c} \frac{2c^3}{8} \\
&= \frac{m}{12} \left(b^2 + c^2 \right)
\end{aligned}$$

Analog dazu gilt:

$$\begin{aligned}
\Theta_{22} &= \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{m}{abc} \left(x^2 + z^2 \right) \, dz \, dy \, dx = \frac{m}{12} \left(a^2 + c^2 \right) \\
\Theta_{33} &= \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{m}{abc} \left(x^2 + y^2 \right) \, dz \, dy \, dx = \frac{m}{12} \left(a^2 + b^2 \right)
\end{aligned}$$

Deviationsmoment Θ_{12}:

$$\begin{aligned}\Theta_{12} &= \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-c/2}^{c/2}\frac{m}{abc}(-xy)\,dz\,dy\,dx\\ &= \frac{m}{ab}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}(-xy)\,dy\,dx\\ &= \frac{m}{ab}\frac{1}{4}\,x^2\Big|_{-a/2}^{a/2}\cdot y^2\Big|_{-b/2}^{b/2}\\ &= \frac{m}{ab}\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{4}\frac{b^2}{4}-\frac{a^2}{4}\frac{b^2}{4}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

Analog dazu verschwinden anderen Deviationsmomente Θ_{13} und Θ_{23}. Das bedeutet, dass die gewählten Drehachsen den Hauptträgheitsachsen entsprechen.

$$\Rightarrow \boldsymbol{\Theta} = \frac{m}{12}\begin{pmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0\\ 0 & a^2+c^2 & 0\\ 0 & 0 & a^2+b^2\end{pmatrix}$$

2.b) Zylinder mit der Höhe h und dem Radius r

Wähle Zylinderkoordinaten so dass gilt

$$\begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi\\ y &= \varrho\sin\varphi\\ z &= z\end{aligned}$$

Mit der Dichte des homogenen Zylinders $\frac{m}{\pi r^2 h}$ erhält man das Trägheitsmoment Θ_{11}:

$$\begin{aligned}\Theta_{11} &= \int_0^r\int_0^{2\pi}\int_{-h/2}^{h/2}\frac{m}{\pi r^2 h}\left(y^2+z^2\right)\,dz\,\varrho d\varphi\,d\varrho\\ &= \frac{m}{\pi r^2 h}\int_0^r\int_0^{2\pi}\int_{-h/2}^{h/2}\left(\varrho^3\,\sin^2\varphi+\varrho z^2\right)\,dz\,d\varphi\,d\varrho\\ &= \frac{m}{\pi r^2 h}\int_0^r\int_0^{2\pi}\left(h\varrho^3\,\sin^2\varphi+\varrho\frac{2h^3}{3\cdot 8}\right)\,d\varphi\,d\varrho\\ &= \frac{m}{\pi r^2}\int_0^r\left(\varrho^3\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi+2\pi\varrho\frac{h^2}{12}\right)\,d\varphi\,d\varrho\end{aligned}$$

Integral Nr. 275:

$$\int\sin^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x-\frac{1}{4a}\sin(2ax)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Theta_{11} &= \frac{m}{\pi r^2}\int_0^r\left(\varrho^3\pi+2\pi\varrho\frac{h^2}{12}\right)\,d\varrho\\ &= \frac{m}{r^2}\int_0^r\left(\varrho^3+\varrho\frac{h^2}{6}\right)\,d\varrho\\ &= \frac{m}{r^2}\left(\frac{1}{4}r^4+r^2\frac{h^2}{12}\right)\\ &= m\left(\frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{6}\right)\end{aligned}$$

Analog dazu ist

$$
\begin{aligned}
\Theta_{22} &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{m}{\pi r^2 h} \left(x^2+z^2\right)\, dz\, \varrho d\varphi\, d\varrho \\
&= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{m}{\pi r^2 h} \left(\varrho^3 \cos^2\varphi + \varrho z^2\right)\, dz\, \varrho d\varphi\, d\varrho
\end{aligned}
$$

mit dem Integral Nr. 314

$$
\int \cos^2 ax\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin(2ax)
$$

gleich

$$
\Theta_{22} = m\left(\frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{6}\right) = I_{11}
$$

Trägheitsmoment Θ_{33}:

$$
\begin{aligned}
\Theta_{33} &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{m}{\pi r^2 h} \left(x^2+y^2\right)\, dz\, \varrho d\varphi\, d\varrho \\
&= \frac{m}{\pi r^2 h} \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \rho^3\, dz\, d\varphi\, d\varrho \\
&= \frac{m}{\pi r^2 h} \int_0^r 2\pi h \rho^3\, d\varrho \\
&= \frac{m}{\pi r^2 h} 2\pi h \frac{1}{4} r^4 \\
&= \frac{m}{2} r^2
\end{aligned}
$$

Die Deviationsmomente verschwinden wieder, da es sich um Hauptträgheitsachsen handelt.

$$
\Rightarrow \boldsymbol{\Theta} = \frac{m}{2} \begin{pmatrix} \frac{r^2}{2}+\frac{h^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{2}+\frac{h^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}
$$

2.c) Kugel mit dem Radius r

Wähle Kugekoordinaten so dass gilt

$$
\begin{aligned}
x &= r' \cos\varphi \sin\vartheta \\
y &= r' \sin\varphi \sin\vartheta \\
z &= r' \cos\vartheta
\end{aligned}
$$

Mit der Dichte der homogenen Kugel $\frac{3m}{4\pi r^3}$ erhält man das Trägheitsmoment I_{11}:

$$
\begin{aligned}
\Theta_{11} &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{3m}{4\pi r^3} \left(y^2+z^2\right) r'^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr' \\
&= \frac{3m}{4\pi r^3} \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(r'^2 \sin^2\varphi \sin^2\vartheta + r'^2 \cos^2\vartheta\right) r'^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr' \\
&= \frac{3m}{4\pi r^3} \int_0^r r'^4 \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \sin^2\vartheta\, d\varphi + 2\pi \cos^2\vartheta\right) \sin\vartheta\, d\vartheta\, dr' \\
&= \frac{3m}{4\pi r^3} \frac{1}{5} r^5 \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \sin^2\vartheta\, d\varphi + 2\pi \cos^2\vartheta\right) \sin^3\vartheta\, d\vartheta
\end{aligned}
$$

Integral Nr. 275:

$$\int \sin^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin(2ax)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Theta_{11} &= \frac{3m}{20\pi}r^2 \int_0^\pi \left(\pi \sin^2\vartheta\,d\varphi + 2\pi\,\cos^2\vartheta\right)\sin\vartheta\,d\vartheta \\
&= \frac{3m}{20}r^2 \int_0^\pi \left(\sin^3\vartheta\,d\vartheta + 2\,\cos^2\vartheta\sin\vartheta\right)\,d\vartheta
\end{aligned}$$

Integral Nr. 275:

$$\int \sin^3 ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + \frac{1}{3a}\cos^3(ax)$$

und Integral Nr. 357:

$$\int \sin ax\,\cos^2 ax\,dx = -\frac{\cos^{n+1} ax}{a(n+1)}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Theta_{11} &= \frac{3m}{20}r^2\left(-\cos\vartheta + \frac{1}{3}\cos^3\vartheta - 2\frac{\cos^3\vartheta}{3}\right)_0^\pi \\
&= \frac{3m}{20}r^2\left(1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{2m}{5}r^2
\end{aligned}$$

Analog dazu ist

$$\begin{aligned}
\Theta_{22} &= \int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \frac{3m}{4\pi r^3}\left(y^2+z^2\right)\,r'^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,dr' \\
&= \frac{3m}{4\pi r^3}\int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \left(r'^2\,\cos^2\varphi\,\sin^2\vartheta + r'^2\,\cos^2\vartheta\right)\,r'^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,dr'
\end{aligned}$$

mit dem Integral Nr. 314

$$\int \cos^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin(2ax)$$

gleich

$$\Theta_{22} = \frac{2m}{5}r^2 = \Theta_{11}$$

Trägheitsmoment Θ_{33}:

$$\begin{aligned}
\Theta_{33} &= \int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \frac{3m}{4\pi r^3}\left(x^2+y^2\right)\,r'^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,dr' \\
&= \frac{3m}{4\pi r^3}\int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \left(r'^2\,\sin^2\vartheta\right)\,r'^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,dr' \\
&= \frac{3m}{4\pi r^3}\int_0^r 2\pi\int_0^\pi r'^4\sin^3\vartheta\,d\vartheta\,dr' \\
&= \frac{3m}{2r^3}\frac{1}{5}r^5\int_0^\pi \sin^3\vartheta\,d\vartheta
\end{aligned}$$

Integral Nr. 275:

$$\int \sin^3 ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + \frac{1}{3a}\cos^3(ax)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Theta_{33} &= \frac{3m}{10}r^2\left(-\cos\vartheta + \frac{1}{3}\cos^3\vartheta)\right)_0^\pi \\
&= \frac{3m}{10}r^2\left(2 - \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{2m}{5}r^2
\end{aligned}$$

Die Deviationsmomente verschwinden wieder, da es sich um Hauptträgheitsachsen handelt. (Alle Achsen, die durch den Kugelmittelpunkt laufen, sind Hauptträgheitsachsen)

$$\Rightarrow \mathbf{\Theta} = \frac{2m}{5}r^2\mathbf{1}$$

2.d) dünner Reifen mit dem Radius r

Wähle Zylinderkoordinaten so dass gilt

$$\begin{aligned}
x &= r\,\cos\varphi \\
y &= r\,\sin\varphi \\
z &= z
\end{aligned}$$

Mit der Dichte des dünnen Reifens $\frac{m}{2\pi r}$ erhält man das Trägheitsmoment I_{11}:

$$\Theta_{11} = \int_0^{2\pi} \frac{m}{2\pi r}\left(y^2 + z^2\right) r\,d\varphi$$

$z = 0$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Theta_{11} &= \int_0^{2\pi} \frac{m}{2\pi r}\left(r\,\sin\varphi\right)^2 r\,d\varphi \\
&= \frac{m}{2\pi}r^2\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi
\end{aligned}$$

Integral Nr. 275:

$$\int \sin^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin(2ax)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Theta_{11} &= \frac{m}{2\pi}r^2\pi \\
&= \frac{m}{2}r^2
\end{aligned}$$

Analog dazu ist

$$\Theta_{22} = \frac{m}{2}r^2$$

Trägheitsmoment Θ_{33}:

$$\begin{aligned}
\Theta_{33} &= \int_0^{2\pi} \frac{m}{2\pi r}\left(x^2 + y^2\right) r\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{m}{2\pi}r^2\,d\varphi \\
&= mr^2
\end{aligned}$$

Die Deviationsmomente verschwinden wieder, da es sich um Hauptträgheitsachsen handelt.

$$\Rightarrow \mathbf{\Theta} \quad = \quad \frac{m}{2}\begin{pmatrix} \varrho^2 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\varrho^2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

3 P

Satz von Steiner

Ein Trägheitstensor $\mathbf{\Theta}$ ist bezüglich eines körperfesten Bezugsystem $S: \ (x_1, x_2, x_3)$ mit dem Ursprung im Schwerpunkt gegeben. Mit Hilfe des Satzes von STEINER kann man daraus den Trägheitstensor $\mathbf{\Theta}'$ bezüglich eines um $\vec{a}$ verschobenen Bezugssystems $S': \ (x_1', x_2', x_3')$ berechnen. (Die beiden Koordinatensysteme sind nich ineinander verdreht)

3.a) Beweise den Satz von STEINER:

$$\Theta'_{ij} \quad = \quad \Theta_{ij} + m\left(\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3} a_k^2 - a_k a_j\right)$$

Trägheitstensor:

$$\begin{aligned}
\Theta'_{ij} &= \int_V \rho\left(\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3} x'^2_k - x'_i x'_j\right) dV \\
&= \int_V \rho\left(\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3} (x_k + a_k)^2 - (x_i + a_i)(x_j + a_j)\right) dV \\
&= \int_V \rho\left(\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3} \left(x_k^2 + 2x_k a_k + a_k^2\right) - x_i x_j - x_i a_j - a_i x_j - a_i a_j\right) dV \\
&= \int_V \rho\left(\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3} x_k^2 - x_i x_j + \delta_{ij}\sum_{k=1}^{3} a_k^2 - a_i a_j + \delta_{ij}\sum_{k=1}^{3} 2x_k a_k - x_i a_j - a_i x_j\right) dV \\
&= \int_V \rho\left(\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3} x_k^2 - x_i x_j\right) dV + \int_V \rho\left(\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3} x_k^2 - x_i x_j\right) dV \\
&\quad + \int_V \rho\left(\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3} 2x_k a_k - x_i a_j - a_i x_j\right) dV \\
&= \Theta_{ij} + m\left(\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3} a_k^2 - a_k a_j\right) + \int_V \rho\left(\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3} 2x_k a_k - x_i a_j - a_i x_j\right) dV
\end{aligned}$$

Der letzte Term kann in mehrere Teilintegrale $a_j \int_V \rho x_i dV$ zerlegt werden. Das sind Integrale der mit ihrer Masse gewichteten Abstände der (infinitesimalen) Teilbereiche des Körpers. Sie verschwinden per Definition für ein Schwerpunktsystem (wie S).

3.b) Berechne $\mathbf{\Theta}$ für einen homogenen Würfel der Kantenlänge s bezüglich eines Bezugsystems in einer Ecke des Würfels.

Der Trägheitstensor eines Quaders bezüglich seines Schwerpunktes wurde in der vorhergehenden Aufgabe berechnet:

$$\Rightarrow \mathbf{\Theta} \quad = \quad \frac{m}{12}\begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

Damit gilt für den Würfel $\Theta_{ij} = \frac{m}{6}s^2\delta_{ij}$. Betrachte eine Verschiebung des Bezugsystems um $\vec{a} = -\sum_{i=1}^{3} s/2\vec{e}_i$ auf eine Ecke. Mit dem Satz von STEINER erhält man:

$$\begin{aligned}
\Theta'_{ij} &= \Theta_{ij} + m\left(\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3} a_k^2 - a_k a_j\right) \\
&= \frac{m}{6}s^2\delta_{ij} + m\left(\delta_{ij}\frac{3}{4}s^2 - \frac{1}{4}s^2\right) \\
&= \frac{11m}{12}s^2\delta_{ij} - \frac{3m}{12}s^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{\Theta} = \frac{ms^2}{12}\begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Theta'_{ii} = \frac{2}{3}ms^2 \qquad \Theta'_{ij} = -\frac{1}{4}ms^2 \ (i \neq j)$$

3.c) Finde die Hauptträgheitsmomente von $\mathbf{\Theta}$ des Würfels durch Diagonalisieren.

Die Eigenwerte $E = \lambda \cdot \frac{ms^2}{12}$ werden berechnet durch

$$\begin{aligned}
\det\left(\mathbf{\Theta} - E_i\right) &= 0 \\
\det\begin{pmatrix} 8-\lambda & -3 & -3 \\ -3 & 8-\lambda & -3 \\ -3 & -3 & 8-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\
(8-\lambda)^3 + 2(-3)^3 - 3(8-\lambda)(-3)^2 &= 0 \\
512 - 192\lambda + 24\lambda^2 - \lambda^3 - 54 - 216 + 27\lambda &= 0 \\
-\lambda^3 + 24\lambda^2 - 165\lambda + 242 &= 0
\end{aligned}$$

Nummerisches Wurzelfinden:

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 11$$

$$\Rightarrow \mathbf{\Theta} = \frac{ms^2}{12}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$