Übungsblatt 0

Lösungsvorschlag
3 Aufgaben, 8 Punkte

Aufgabe 1

2 P

Bergsteiger

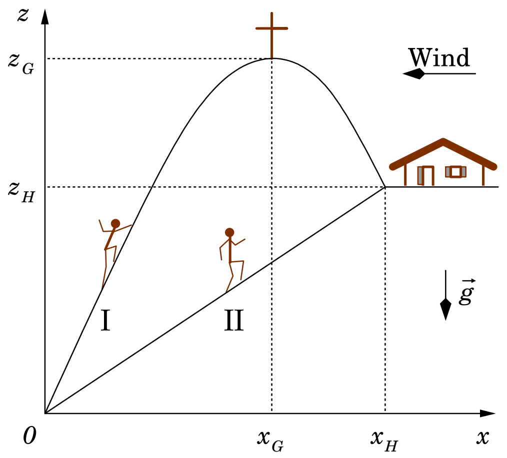


Abbildung 1: Bergsteiger

Zwei Bergsteiger, die gleich groß und schwer sind, wollen vom Tal (Ursprung) eine Hütte bei (x_H, z_H) besuchen. Bergsteiger I will über den Gipfel bei (x_G, z_G) steigen. Sein Weg kann als Parabel $z = -(x - x_G)^2 + z_G$ mit $x \in [0, x_H]$ beschrieben werden. Der Bergsteiger II hat sich für den direkten Weg zur Hütte entschieden. Momentan herrscht Windstille. Die Hütte ist in x-Richtung 1.5 mal weiter entfernt als der Gipfel.

1.a) Wähle eine geeignete Paramertisierung der Wege, und bestimme die Abhängigkeiten zwischen x_G, z_G, x_H, und z_H. Die weiteren Ergebnisse sollen – wenn möglich – in Abhängigkeit von x_G angegeben werden.

Wählt man als Parametrisierung $t = x$, so erhält man die Ortsvektoren

$$\begin{aligned}\vec{r}_{\mathrm{I}}(t) &= t\vec{e}_x + (-(t - x_G)^2 + z_G)\vec{e}_z \\ \vec{r}_{\mathrm{II}}(t) &= t\vec{e}_x + \frac{z_H}{x_H} t\vec{e}_z\end{aligned}$$

Und die Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}_{\mathrm{I}}(t) &= \vec{e}_x + 2(x_G - t)\vec{e}_z \\ \dot{\vec{r}}_{\mathrm{II}}(t) &= \vec{e}_x + \frac{z_H}{x_H}\vec{e}_z\end{aligned}$$

Da $x = t$ gewählt wurde ist der Startpunkt $t_a = 0$ und der Endpunkt $t_e = x_H$ für beide Bergsteiger

Abhängigkeiten:

$$\begin{aligned}
x_H &= \frac{3}{2}x_G \\
0 &= -(0 - x_G)^2 + z_G \\
\Rightarrow z_G &= x_G^2 \\
z_H &= -(x_H - x_G)^2 + z_G \\
&= -\frac{1}{4}x_G^2 + z_G \\
&= \frac{3}{4}x_G^2
\end{aligned}$$

1.b) Welche Arbeit muss jeder Bergsteiger verrichten?

Kurvenintegral:

$$E = \int_{t_a}^{t_e} \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{F}(\vec{r}(t))\, dt$$

Arbeit, die an Bergsteiger I „verrichtet" wird:

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{I}} &= \int_{t_a}^{t_e} \dot{\vec{r}}_{\mathrm{I}}(t) \cdot m\vec{g}\, dt \\
&= \int_0^{x_H} (\vec{e}_x + 2(x_G - t)\vec{e}_z) \cdot m(-g)\vec{e}_z\, dt \\
&= \int_0^{x_H} -2mg(x_G - t)\, dt \\
&= 2mg(\frac{1}{2}t^2 - x_G t)\Big|_0^{x_H} \\
&= 2mg(\frac{1}{2}x_H^2 - x_G x_H) \\
&= 2mg(\frac{9}{8}x_G^2 - \frac{3}{2}x_G^2) \qquad x_H = \frac{3}{2}x_G \\
&= -2mg\frac{3}{8}x_G^2 \\
&= -\frac{3}{4}mgx_G^2
\end{aligned}$$

Arbeit, die an Bergsteiger II „verrichtet" wird:

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{II}} &= \int_{t_a}^{t_e} \dot{\vec{r}}_{\mathrm{II}}(t) \cdot m\vec{g}\, dt \\
&= \int_0^{x_H} (\vec{e}_x + \frac{z_H}{x_H}\vec{e}_z) \cdot m(-g)\vec{e}_z\, dt \\
&= \int_0^{x_H} -mg\frac{z_H}{x_H}\, dt \\
&= -mgz_H \\
&= -\frac{3}{4}mgx_G^2 \qquad z_H = \frac{3}{4}x_G^2
\end{aligned}$$

Beide Bergsteiger verrichten also die gleiche Arbeit, auch wenn es I nicht so vorkommen mag.

1.c) Im Herbst wollen die Bergsteiger wieder auf ihren Wegen zur Hütte wandern. Diesmal bläßt ein Wind, der eine ständig wirkende Kraft $\vec{F}_W(z) = -F_W z\vec{e}_x$ verursacht. Welche Arbeit müssen die Bergsteiger dieses mal verrichten?

Der Wind weht nur aus der x-Richtung. Deshalb kann man die Arbeit gegen den Wind einfach zur Arbeit gegen die Schwerkraft (nur in z-Richtung) addieren um die gesammte Kraft zu erhalten. Es ist zu Beachten, dass sich die Parametrisierungen für z unterscheiden.

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{I},W} &= \int_{t_a}^{t_e} \dot{\vec{r}}_{\mathrm{I}}(t) \cdot \vec{F}_W(z)\, dt \\
&= \int_0^{x_H} (\vec{e}_x + 2(x_G - t)\vec{e}_z) \cdot (-F_W) z\vec{e}_x dt \\
&= \int_0^{x_H} -F_W(-(t - x_G)^2 + z_G) dt \\
&= F_W \int_0^{x_H} ((t - x_G)^2 - x_G^2) dt \qquad z_G = x_G^2 \\
&= F_W \int_0^{x_H} t^2 - 2tx_G dt \\
&= F_W \left(\frac{1}{3}t^3 - t^2 x_G\right)_0^{x_H} \\
&= F_W \left(\frac{1}{3}x_H^3 - x_H^2 x_G\right) \\
&= F_W \left(\frac{9}{8}x_G^3 - \frac{9}{4}x_G^2 x_G\right) \qquad x_H = \frac{3}{2}x_G \\
&= -\frac{9}{8}x_G^3 F_W
\end{aligned}$$

Insgesammt muss der Bergsteiger I $E_{\mathrm{I}} = \frac{3}{4}mgx_G^2 + \frac{9}{8}x_G^3 F_W$ Arbeit verrichten.

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{II},W} &= \int_{t_a}^{t_e} \dot{\vec{r}}_{\mathrm{II}}(t) \cdot \vec{F}_W(z)\, dt \\
&= \int_0^{x_H} \left(\vec{e}_x + \frac{z_H}{x_H}\vec{e}_z\right) \cdot (-F_W) z\vec{e}_x\, dt \\
&= \int_0^{x_H} -F_W \frac{z_H}{x_H} t\, dt \\
&= -F_W \frac{z_H}{x_H} \cdot \frac{1}{2}x_H^2 \\
&= -\frac{1}{2}F_W z_H x_H \\
&= -\frac{1}{2}F_W \frac{3}{4}x_G^2 \frac{3}{2}x_G \qquad z_H = \frac{3}{4}x_G^2,\ x_H = \frac{3}{2}x_G \\
&= -\frac{9}{16}F_W x_G^3
\end{aligned}$$

Insgesammt muss der Bergsteiger II $E_{\mathrm{II}} = \frac{3}{4}mgx_G^2 + \frac{9}{16}x_G^3 F_W$ Arbeit verrichten. Gegen die Gravitation ist die Arbeit gleich der für Bergsteiger I , aber gegen den Wind nur halb so groß.

1.d) Jeder Bergsteiger wiegt (mit Gepäck) $83.4\,\mathrm{kg}$, der Gipfel ist $1141\,\mathrm{m}$ hoch. Die Schwerebeschleunigung beträgt $9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ in $-z$-Richtung. Die Windstärke[1] beträgt $F_W = 2.31\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$.

[1] Die hier eingeführte Windstärke ist natürlich keine brauchbare physikalische Größe.

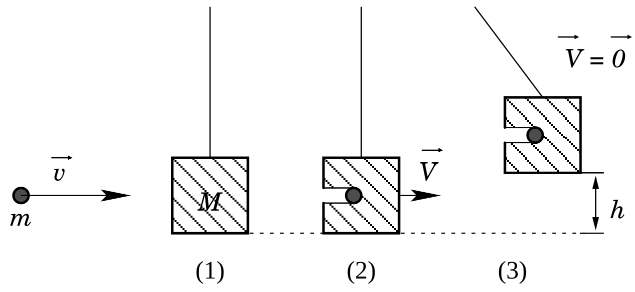


Abbildung 2: Ballistisches Pendel vor (1) und während (2) dem Stoß sowie beim Umkehrpunkt (3)

Ohne Wind: $E_{\mathrm{I}} = E_{\mathrm{II}} = 700\,k\mathrm{J}$
gegen den Wind: $E_{\mathrm{I},W} = 100\,k\mathrm{J}$ bzw. $E_{\mathrm{I},W} = 50.0\,k\mathrm{J}$
gesammt: $E_{\mathrm{I},g} = 800\,k\mathrm{J}$ bzw. $E_{\mathrm{I},g} = 750\,k\mathrm{J}$

Aufgabe 2

3 P

Ballistisches Pendel

Eine Kugel mit der Masse m trifft mit der Geschwindigkeit v senkrecht auf den Schwerpunkt eines ruhenden Klotzes mit der Masse M. Dieser ist als ballistisches Pendel aufgehängt (siehe Abb. 2). Infolge des Rückstoßes (mit der Geschwindigkeit V) wird der Klotz auf die Höhe h angehoben. Führe die Rechnungen jeweils für

- den inelastischer Stoß (die Kugel bleibt im Klotz stecken)

  Es gilt Impulserhaltung:

$$\begin{aligned} mv &= (m+M)V \\ V &= \frac{mv}{m+M} \end{aligned}$$

  Die kinetische Energie wird in potentielle umgewandelt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(m+M)V^2 &= (m+M)gh \\ h &= \frac{V^2}{2g} \\ h &= \frac{m^2v^2}{2g\,(m+M)^2} \end{aligned}$$

  weitere Umformungen:

$$v = \frac{M+m}{m}V$$

$$M = \frac{v-V}{V}m$$

- und den elastischen Stoß: (Die Kugel prallt vom Klotz ab)

Es gilt Impulserhaltung:

$$\begin{aligned} mv &= MV + mv' \\ v' &= v - \frac{M}{m}V \end{aligned}$$

und Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv'^2 \\ mv^2 &= MV^2 + m\left(v - \frac{M}{m}V\right)^2 \\ mv^2 &= MV^2 + mv^2 - 2MvV + \frac{M^2}{m}V^2 \\ 0 &= V^2 + \frac{M}{m}V^2 - 2vV \\ 0 &= V\left(\frac{M+m}{m}V - 2v\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V = \frac{2mv}{M+m}$$

Die Höhe erhält man wieder aus

$$\begin{aligned} h &= \frac{V^2}{2g} \\ h &= \frac{2m^2v^2}{g\left(M+m\right)^2} \end{aligned}$$

weitere Umformungen:

$$v = \frac{M+m}{2m}V$$

$$M = \frac{2v-V}{V}m$$

aus. Berechne die folgenden Größen aus den jeweiligen Angaben:

	gegeben	gesucht	inelastischer Stoß		elastischer Stoß	
2.a)	m, M, v	V, h	$V = \frac{mv}{m+M}$	$h = \frac{m^2v^2}{2g(m+M)^2}$	$V = \frac{2mv}{m+M}$	$h = \frac{2m^2v^2}{g(m+M)^2}$
2.b)	m, M, h	v, V	$v = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gh}$	$V = \sqrt{2gh}$	$v = \frac{M+m}{m}\sqrt{\frac{gh}{2}}$	$V = \sqrt{2gh}$
2.c)	v, V, h	m, M	keine Lösung möglich		keine Lösung möglich	
2.d)	m, v, h	M, V	$M = \frac{v-\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gh}}m$	$V = \sqrt{2gh}$	$M = \frac{2v-\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gh}}m$	$V = \sqrt{2gh}$
2.e)	m, M, V	v, h	$v = \frac{M+m}{m}V$	$h = \frac{V^2}{2g}$	$v = \frac{M+m}{2m}V$	$h = \frac{V^2}{2g}$
2.f)	M, V, h	m, v	keine Lösung möglich		keine Lösung möglich	

Es ist zu beachten, dass V und h über Konstanten ineinander umgeformt werden können und deshalb nicht voneinander unabhängig sind. Eine Lösung ist deshalb nicht möglich wenn beide vorgegeben werden.

Aufgabe 3

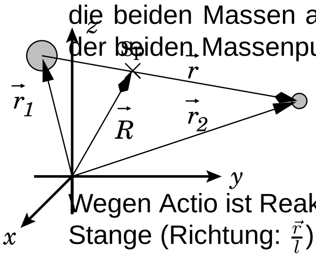
3 P

Hantel

Zwei Massen m_1 und m_2 sind durch eine (massenlose) Stange der Länge l miteinenander verbunden. Jemand wirft diese Hantel irgentwan in eine beliebige Richtung.

3.a) Formuliere die Bewegungsgleichung für die Hantel im Schwerefeld der Erde

Auf die Massen wirken zwei Kräfte: die Schwerkraft der Erde $\vec{F}_g = mg\vec{e}_z$ und die Kraft $\vec{F}$, die die beiden Massen auf einen festen Abstand zueinader hält. Die Bewegungsgleichungen der beiden Massenpunkte sind deshalb



$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{\vec{r}}_1 &= m_1 g\vec{e}_z + \vec{F}_{2\to 1} \\
m_2\ddot{\vec{r}}_2 &= m_2 g\vec{e}_z + \vec{F}_{1\to 2}
\end{aligned}
$$

Wegen Actio ist Reaktio muss $\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 2} = \vec{F}$ gelten. Da die Kräfte immer entlang der Stange (Richtung: $\frac{\vec{r}}{l}$) wirken ist die Kraft

$$
\vec{F} = \mathcal{F} \cdot \vec{r}
$$

Abbildung 3: Hantel

also können die BWGln geschrieben werden als:

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{\vec{r}}_1 &= -m_1 g\vec{e}_z + \mathcal{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\
m_2\ddot{\vec{r}}_2 &= -m_2 g\vec{e}_z - \mathcal{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)
\end{aligned}
$$

Es handelt sich um zwei gekoppelte DGln zweiter Ordnung.

3.b) Transformiere die Bewegungsgleichung in das Schwerpunktsystem.

Relativvektor

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\
\text{mit } |\vec{r}| &= l
\end{aligned}
$$

Schwerpunkt bzgl. Abwurfpunkt:

$$
\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}
$$

Inverse Transformation:

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_2 &= \vec{r}_1 + \vec{r} \\
\Rightarrow \vec{R} &= \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2(\vec{r}_1 + \vec{r})}{m_1 + m_2} \\
\vec{R} &= \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \\
\Leftrightarrow \vec{r}_1 &= \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \\
\Rightarrow \vec{r}_2 &= \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} + \vec{r} \\
\vec{r}_2 &= \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}
\end{aligned}
$$

⇒BWGln:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{R} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}\right) & = -m_1 g \vec{e}_z + \mathcal{F}(\vec{r}) \\ m_2 \frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{R} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}\right) & = -m_2 g \vec{e}_z + \mathcal{F}(\vec{r}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{R}} + \mu \ddot{\vec{r}} & = -m_1 g \vec{e}_z + \mathcal{F}\vec{r} \\ m_2 \ddot{\vec{R}} + \mu \ddot{\vec{r}} & = -m_2 g \vec{e}_z + \mathcal{F}\vec{r} \end{cases} \quad \text{mit } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\text{Subtraktion :} \qquad m_1 \ddot{\vec{R}} - m_2 \ddot{\vec{R}} = -m_1 g \vec{e}_z + m_2 g \vec{e}_z$$

⇒ BWGl des Schwerpunktes

$$\ddot{\vec{R}} = -g\vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} \text{Addition :} \quad (m_1+m_2)\ddot{\vec{R}} + 2\mu\ddot{\vec{r}} &= -(m_1+m_2) g \vec{e}_z + 2\mathcal{F}\vec{r} \\ -(m_1+m_2) g \vec{e}_z + 2\mu\ddot{\vec{r}} &= -(m_1+m_2) g \vec{e}_z + 2\mathcal{F}\vec{r} \end{aligned}$$

⇒ BWGl des Abstandes

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \mathcal{F}\vec{r}$$

3.c) Löse die Bewegungsgleichungen.

Der Schwerpunkt wird durch eine BWGl eines freien Massenpunktes beschrieben. Wählt man die Anfangsbedingungen $\vec{R}(0) = \vec{R}_0$ und $\dot{\vec{R}}(0) = \vec{V}_0$ erhält man:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{R}} &= -g\vec{e}_z \\ \hookrightarrow \dot{\vec{R}} &= -g\vec{e}_z + \vec{V}_0 \\ \hookrightarrow \vec{R}(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 \vec{e}_z + \vec{V}_0 t + \vec{R}_0 \end{aligned}$$

Für die Relativbewegung, kann man den Ansatz machen:

$$\vec{r}(t) = \vec{A}\cos(\omega t) + \vec{B}\sin(\omega t)$$

mit

$$\omega^2 = -\frac{\mathcal{F}}{\mu}$$

Wegen der starren Stange ($|\vec{r}(t)| = l = \text{const}$) muss gelten:

$$\begin{aligned} l^2 &= \left(\vec{A}\cos(\omega t) + \vec{B}\sin(\omega t)\right)^2 \\ l^2 &= \vec{A}^2\cos^2(\omega t) + \vec{B}^2\sin^2(\omega t) + \vec{A}\vec{B}\sin(\omega t)\cos(\omega t) \end{aligned}$$

Das ist erfüllbar wenn $\vec{A}^2 = \vec{B}^2 = l^2$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = l\left(\vec{e}_A\cos(\omega t) + \vec{e}_B\sin(\omega t)\right)$$

Dabei sind $\vec{e}_A = \frac{\vec{A}}{A}$ und $\vec{e}_B = \frac{\vec{B}}{B}$ die Richtungsvektoren der Anfangsbedingungen.

3.d) Welche Bahnkurve beschreibt der Relativvektor?

Betrachtet man den Drehimpuls

$$\begin{aligned}\vec{L}_R &= \mu\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\\ &= \mu l\left(\vec{e}_A\cos(\omega t)+\vec{e}_B\sin(\omega t)\right)\times\left(-\omega\vec{e}_A\sin(\omega t)+\omega\vec{e}_B\cos(\omega t)\right)\\ &= \mu l\left(\vec{e}_A\times\vec{e}_B\omega\cos^2(\omega t)+\vec{e}_A\times\vec{e}_B\omega\sin^2(\omega t)\right)\\ &= \mu\omega l\vec{e}_A\times\vec{e}_B \qquad \Rightarrow \dot{\vec{L}}_R=\vec{0}\end{aligned}$$

so stellt man fest, dass die Relativbewegung eine Rotation um eine zur $\vec{e}_A, \vec{e}_B$-Ebene senkrechte Achse ist. (Die Ableitung $\dot{\vec{L}}_R$ des Drehimpulses verschwindet.) Die Einheitsvektoren $\vec{e}_A$ und $\vec{e}_B$ können als Anfangsbedingung festgelegt werden.

3.e) Bestimme den Bahndrehimpuls des Schwerpunktes der Hantel bezüglich des Abwurfpunktes und seine Ableitung. Unter welcher Bedingung verschwinden beide?

Der Drehimpuls ist definiert als $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$

$$\begin{aligned}\vec{L}_S &= (m_1+m_2)\vec{R}\times\dot{\vec{R}}\\ &= (m_1+m_2)\left(-\frac{1}{2}gt^2\vec{e}_z+\vec{V}_0t+\vec{R}_0\right)\times\left(-gt\vec{e}_z+\vec{V}_0\right)\\ &= (m_1+m_2)\left(-\frac{1}{2}gt^2\vec{e}_z\times\vec{V}_0-gt\vec{e}_z\times\vec{V}_0t-\vec{R}_0\times gt\vec{e}_z+\vec{R}_0\times\vec{V}_0\right)\\ &= (m_1+m_2)\left(-\frac{3}{2}gt^2\vec{e}_z\times\vec{V}_0+\vec{R}_0\times(\vec{V}_0-gt\vec{e}_z)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{L}_S &= (m_1+m_2)\frac{d}{dt}\vec{R}\times\dot{\vec{R}}\\ &= (m_1+m_2)\left(\underbrace{\dot{\vec{R}}\times\dot{\vec{R}}}_{0}+\vec{R}\times\ddot{\vec{R}}\right)\\ &= (m_1+m_2)\vec{R}\times\ddot{\vec{R}}\\ &= (m_1+m_2)g\left(t\vec{V}_0\times\vec{e}_z+\vec{R}_0\times\vec{e}_z\right)\end{aligned}$$

Falls $\vec{V}_0\sim\vec{e}_z$ und $\vec{R}_0\sim\vec{e}_z$ (senkrechter Wurf über dem Abwurfpunkt) so verschwindet der Drehimpuls und seine Ableitung.

3.f) Berechne die Bahnkurven der beiden Massenpunkte bezüglich des Schwerpunktes und beschreibe sie.

Zur Beschreibung der Bewegung beider Massen um den Schwerpunkt führt man am besten folgende Vektoren ein:

$$\begin{aligned}\vec{r}_I &= \vec{r}_1-\vec{R} \qquad & \vec{r}_{II} &= \vec{r}_2-\vec{R}\\ &= -\tfrac{\mu}{m_1}\vec{r} & &= \tfrac{\mu}{m_2}\vec{r}\end{aligned}$$

Damit findet man die Bewegung um den Schwerpunkt:

$$\begin{aligned}\vec{r}_I(t) &= -\frac{\mu}{m_1}l\left(\vec{e}_A\cos(\omega t)+\vec{e}_B\sin(\omega t)\right)\\ \vec{r}_{II}(t) &= \frac{\mu}{m_2}l\left(\vec{e}_A\cos(\omega t)+\vec{e}_B\sin(\omega t)\right)\end{aligned}$$

Das sind Kreisbahnen mit den Radien $r_I=\frac{\mu}{m_1}l$ und $r_{II}=\frac{\mu}{m_2}l$