Übungsblatt 3

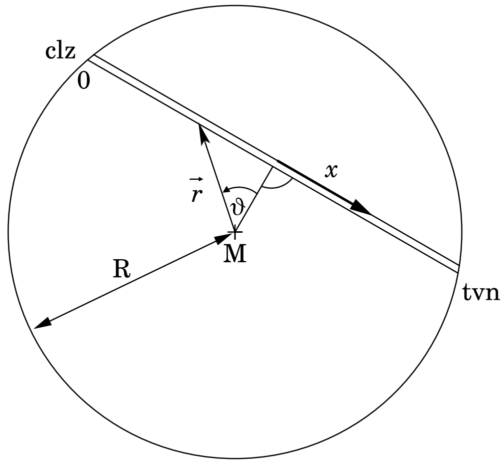
Vorrechnen & Diskussion: 23.11.2005
3 Aufgaben, 9 Punkte

Aufgabe 1

2 P

Tunnel durch die Erde

Um sich vom Clausthaler Wetter abzulenken, denkt sich ein Physiker einen geraden Tunnel von Clausthal auf die Insel Taveuni. (Diese Insel bietet neben schönen Stränden, warmen Temperaturen, sehens- und forsuchngswerten Vulkanen das Phänomen, das man sich mit einem Schritt von heute nach morgen und zurück bewegen kann.) In diesem Tunnel befindet sich eine Kapsel der Masse m, die sich im Tunnel (reibungsfrei) bewegen kann. Um dem Wetter zu entfliehen, setzt sich der Physiker einfach in die Kapsel und lässt sie fallen. Der Einfachheit halber kann die Dichte ρ der Erde als konstant angenommen werden.



1.a) Berechne die Potentielle Energie der Kapsel, in Abhängigkeit von x bezüglich eines günstigen Punktes.

Auf die Kapsel wirkt die Kraft

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \gamma \frac{Mm}{R^3} r \vec{e}_r \\ &= \gamma \frac{Mm}{R^3} \frac{x}{\sin\vartheta} \vec{e}_r \end{aligned}$$

Allerdings trägt nur der Anteil in $\vec{e}_x$-Richtung zur Bewegung bei. Die anderen Komponenten werden durch eine Kraft auf die Tunnelwand kompensiert.

$$\begin{aligned} F_x &= \vec{F}\vec{e}_x \\ &= \gamma \frac{Mm}{R^3} \frac{x}{\sin\vartheta} \vec{e}_r \vec{e}_x \\ &= \gamma \frac{Mm}{R^3} \frac{x}{\sin\vartheta} \sin\vartheta \\ &= \gamma \frac{Mm}{R^3} x \end{aligned}$$

Die Potentielle Energie in einem bestimten Punkt ist das Integral der Kraft entlang des Weges vom Bezugspunkt, bis zum Punkt. Als Bezugspunkt, wird der Punkt $x = 0$ im Tunnel gewählt (Das ist der Punkt des kleinsten Abstandes zwischen dem Erdmittelpunkt und dem Tunnel).

$$\begin{aligned} U &= \int_0^x \gamma \frac{Mm}{R^3} x dx \\ &= \frac{\gamma Mm}{2R^3} x^2 \end{aligned}$$

1.b) Stelle den Energiesatz auf. Bestimme mit seiner Hilfe Ort und Geschwindigkeit der Kapsel in abhängigkeit von der Zeit.

$$\begin{aligned} E &= T + U \\ E &= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{\gamma Mm}{2R^3} x^2 \end{aligned}$$

Die Gesammtenergie $E = \frac{\gamma Mm}{2R}$, da die Kapsel in Clausthal keine kinetische Energie hat.

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{E}{R^2} x^2 \\ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 &= E \left(1 - R^{-2} x^2\right) \\ \dot{x}^2 &= \frac{2E}{m} \left(1 - R^{-2} x^2\right) \\ \frac{dx}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{2E}{mR^2} \left(R^2 - x^2\right)} \\ \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} &= \pm \sqrt{\frac{2E}{mR^2}} dt \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung wird $\omega = \sqrt{\frac{2E}{mR^2}} = \sqrt{\frac{\gamma M}{R^3}}$ definiert. Integration (zur Zeit $t = 0$ ist die Kapsel in Clausthal $x = -R$):

$$\int_{-R}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{R^2 - x'^2}} = \int_0^t \pm \omega dt'$$

Integral Nr. 164: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$

$$\begin{aligned} \arcsin \frac{x'}{R} \bigg|_{-R}^{x} &= \pm \omega t \\ \arcsin \frac{x}{R} - \frac{\pi}{2} &= \pm \omega t \\ \arcsin \frac{x}{R} &= \frac{\pi}{2} \pm \omega t \\ x &= R \sin \left(\frac{\pi}{2} \pm \omega t\right) \\ x &= R \cos \omega t \end{aligned}$$

Die Kapsel führt eine harmonische Schwingung zwischen Clausthal und Taveuni aus. Ihre geschwindigkeit ist

$$v = \dot{x} = -\omega R \sin \omega t$$

1.c) Berechne die Zeit, die die Kapsel ($m = 438\,\mathrm{kg}$) von Clausthal nach Taveuni baucht. Clausthal liegt bei 51°48’00” N und 10°20’00” O. Der Tunnelausgang auf Taveuni liegt bei 16°49’00"S und 179°58’00"W. Die Masse der Erde $M = 5.98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ und ihr Radius $R = 6370\,\mathrm{km}$. Die Gravitationskonstante $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg\,s}^2}$.

Die Reisedauer beträgt eine halbe Periode:

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{R^3}{\gamma M}} = 2530\,\mathrm{s} \mathrel{\hat{=}} 42.2\,\mathrm{min}$$

Aufgabe 2

4 P

Raketenproblem

Eine Rakete, die unbeladen die Masse m_R hat, wird mit m_T Treibstoff beladen (Startmasse $m_S = m_R + m_T$). Nach dem Start stößt sie konstant die Gasmenge μ pro Zeiteinheit aus, bis ihr der Treibstoff ausgeht. Die Treibgase haben, von der Rakete aus gesehen, die (konstante) Durchschnittsgeschwindigkeit $\vec{v}_T$ gegen die Flugrichtung. Reibung kann vernachlässigt werden.

2.a) Stelle die Bewegungsgleichung der gestarteten Rakete im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ auf.

Die allgemeine NEWTONsche Bewegungsgelichung lautet:

$$\begin{aligned}
\vec{F}(\vec{r}) &= \dot{\vec{p}}_R(t) + \dot{\vec{p}}_T(t) \\
\vec{F}(\vec{r}) &= m\dot{\vec{v}}_R + \dot{m}\vec{v}_R + \dot{m}(\vec{v}_T - \vec{v}_R) \\
\vec{F}(\vec{r}) &= m\dot{\vec{v}}_R + \dot{m}\vec{v}_T \\
m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F}(\vec{r}) - \mu\vec{v}_T
\end{aligned}$$

Die Bewegung der Rakete ist also unabhängig von ihrer Geschwindigkeit (bezüglich irgendeinem Beobachter in einem Inertialsystem).

2.b) Betrachte eine Rakete im kräftefreien Raum. Bestimme die Geschwindigkeit der Rakete als Funktion der Zeit relativ zu Startplatz ($t = 0$, $\vec{r} = \vec{0}$, $\vec{v}_R = \vec{0}$, aufgefüllte Rakete)

BWGl:

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}} &= -\frac{\mu}{m(t)}\vec{v}_T \\
&= -\frac{\mu}{m_S - \mu t}\vec{v}_T
\end{aligned}$$

Integration

$$\begin{aligned}
\vec{v}_R &= \int_0^t -\frac{\mu}{m_S - \mu t}\vec{v}_T dt \\
&= -\mu\vec{v}_T \int_0^t \frac{1}{m_S - \mu t}\vec{v}_T dt \\
&= -\mu\vec{v}_T \frac{1}{-\mu}\ln(m_S - \mu t)\Big|_0^t \\
&= \vec{v}_T \ln\frac{m_S - \mu t}{m_S}
\end{aligned}$$

2.c) Gib die Brenndauer der Rakete an. Welche Geschwindigkeit und welche Energie hat die Rakete nach dem Ende der Brenndauer?

Die Brenndauer der Rakete ist die Zeit, in der genug Teibstoff m_T zur Verfügung steht um einen konstanten Ausstoß μ zu gewährleisten: $m_T = \mu t_B \Leftrightarrow t_B = \frac{m_T}{\mu}$. Wenn die Rakete leer ist ($t > \frac{m_T}{\mu}$) bewegt sie sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}_R = -\vec{v}_T \ln \frac{m_R}{m_S}$ weiter. Die Kinetische Energie ist dabei $E = \frac{1}{2} m_R \vec{v}_T^2 \left(\ln \frac{m_R}{m_S}\right)^2$.

2.d) Wann wird die kinetische Energie der Rakete maximal? Welches Verhältnis müssen m_R, m_T, μ und $\vec{v}_T$ zueinader haben, das dieses Maximum überhaupt erreicht wird? Welche Geschwindigkeit, der Masse und der kinetischen Energie hat die Rakete zu diesem Zeitpunkt?

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \\ &= \frac{m_S - \mu t}{2} \left(\vec{v}_T \ln \frac{m_S - \mu t}{m_S}\right)^2 \end{aligned}$$

Extremwert:

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= \frac{d}{dt} \vec{v}_T^2 \frac{m_S - \mu t}{2} \left(\vec{v}_T \ln \frac{m_S - \mu t}{m_S}\right)^2 \\ \dot{E}(t) &= \vec{v}_T^2 \left(\frac{-\mu}{2} \left(\ln \frac{m_S - \mu t}{m_S}\right)^2 + \frac{m_S - \mu t}{2} \cdot 2 \ln \frac{m_S - \mu t}{m_S} \cdot \frac{m_S}{m_S - \mu t} \cdot \frac{-\mu}{m_S}\right) \\ 0 &= -\vec{v}_T^2 \left(\frac{\mu}{2} \left(\ln \frac{m_S - \mu t}{m_S}\right)^2 + \mu \ln \frac{m_S}{m_S - \mu t}\right) \\ &= -\vec{v}_T^2 \mu \ln \frac{m_S - \mu t}{m_S} \cdot \left(\frac{1}{2} \ln \frac{m_S - \mu t}{m_S} + 1\right) \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist Null für

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \frac{m_S - \mu t_1}{m_S} + 1 &= 0 \\ \ln \frac{m_S - \mu t_1}{m_S} &= -2 \\ \frac{m_S - \mu t_1}{m_S} &= e^{-2} \\ \mu t_1 &= m_S - m_S e^{-2} \\ t_1 &= \frac{m_S}{\mu}(1 - e^{-2}) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \ln \frac{m_S}{m_S - \mu t_2} &= 0 \\ \frac{m_S}{m_S - \mu t_2} &= 1 \\ m_S - \mu t_2 &= m_S \\ t_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ein Plott der Funktion, (oder die Untersuchung der zweiten Ableitung) zeigt, dass das t_1 ein Maximum und t_2 ein Minimum ist. Es ist zu betachten, dass die Rakete nur die Zeit t_B

beschleunigt. Nur wenn $t_B > t_1$ ist, kann die maximale kinetische Energie erreicht werden:

$$\begin{aligned}
t_B &> t_1 \\
\frac{m_T}{\mu} &> \frac{m_S}{\mu}(1-e^{-2}) \\
m_T &> (m_T+m_R)(1-e^{-2}) \\
m_T e^{-2} &> m_R - m_R e^{-2} \\
m_T &> m_R e^2 - m_R \\
m_T &> m_R(e^2-1)
\end{aligned}$$

Die Masse des Treibstoffs muss also mindestens 6.39 mal so groß sein wie die Nutzmasse. Zur Zeit t_1 der maximalen kinetischen Energie hat die Rakete die Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_R(t_1) &= \vec{v}_T \ln \frac{m_S - \mu t_1}{m_S} \\
&= \vec{v}_T \ln \frac{m_S - \mu \cdot \frac{m_S}{\mu}(1-e^{-2})}{m_S} \\
&= \vec{v}_T \ln e^{-2} \\
&= -2\vec{v}_T
\end{aligned}$$

die Masse

$$\begin{aligned}
m(t_1) &= m_S - \mu t_1 \\
&= m_S - \mu \frac{m_S}{\mu}(1-e^{-2}) \\
&= m_S e^{-2}
\end{aligned}$$

und die Energie

$$\begin{aligned}
E(t_1) &= \frac{1}{2} m(t_1) \vec{v}_R^2(t_1) \\
E(t_1) &= 2e^{-2} m_S \vec{v}_T^2
\end{aligned}$$

2.e) Betrachte eine (Sylvester-)Rakete, im Schwerefeld $\vec{G}$ der Erde. Die Steighöhe h_s (Höhe, die nach der Brenndauer t_B erreicht wird) sei klein genug um $\vec{G} = -mg\vec{e}_z$ annehmen zu können. Stelle die Bewegungsgleichung auf. Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit die Rakete überhaupt abhebt?

BWGl einer Rakete im homogenen Schwerefeld:

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\vec{e}_z - \mu\vec{v}_T$$

Damit die Rakete überhaupt abhebt muss die z-Komponente der Beschleunigung größer Null sein. (der Raketenantrieb muss die Schwerkraft kompensieren.)

$$\begin{aligned}
m\ddot{\vec{r}}\vec{e}_z &> 0 \\
-mg\vec{e}_z\vec{e}_z - \mu\vec{v}_T\vec{e}_z &> 0 \\
-mg &> \mu\vec{v}_T\vec{e}_z
\end{aligned}$$

Das bedeutet, das die z-Komponente der Ausstoßrichtung negativ und vom Betrag größer als $m_S g/\mu$ sein muss. Definiert man ϑ als Winkel zwischen $\vec{v}_T$ und der (positiven!) z-Richtung kann man auch schreiben:

$$\begin{aligned}
\mu v_T \sin(\vartheta - \pi) &> mg \\
-\mu v_T \sin(\vartheta) &> mg
\end{aligned}$$

Anmerkung: Da die Masse m der Rakete nach dem Zünden abnimmt, kann es sein dass die Rakete verzögert startet.

2.f) Berechne die Steighöhe h_s der Rakete. Welche Geschwindigkeit hat die Rakete dann?

Die Beschleunigung der Rakete ist:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}(t) &= -g\vec{e}_z - \frac{\mu}{m(t)}\vec{v}_T \\ &= -g\vec{e}_z - \frac{\mu}{m_S - \mu t}\vec{v}_T\end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t ist: (Beachte ABn $t = 0$, $\vec{r} = \vec{0}$, $\vec{v}_R = \vec{0}$)

$$\begin{aligned}\vec{v}_R(t) &= \int_0^t \ddot{\vec{r}}(t')\,dt' \\ &= \int_0^t -g\vec{e}_z - \frac{\mu}{m_S - \mu t}\vec{v}_T\,dt' \\ &= -gt'\vec{e}_z + \vec{v}_T \ln \frac{m_S - \mu t'}{\mu}\bigg|_0^t \\ &= -gt\vec{e}_z + \vec{v}_T \ln \frac{m_S - \mu t}{\mu} - \vec{v}_T \ln \frac{m_S}{\mu} \\ &= -gt\vec{e}_z + \vec{v}_T \ln \frac{m_S - \mu t}{m_S}\end{aligned}$$

Und der Ort ist

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \int_0^t \vec{v}_R(t')\,dt' \\ &= \int_0^t -gt'\vec{e}_z + \vec{v}_T \ln \frac{m_S - \mu t'}{m_S}\,dt' \\ &= -\frac{1}{2}gt'^2\vec{e}_z + \vec{v}_T \cdot \frac{m_S - \mu t'}{m_S}\left(\ln \frac{m_S - \mu t'}{m_S} - 1\right)\frac{-\mu}{m_S}\bigg|_0^t \\ &= -\frac{1}{2}gt^2\vec{e}_z - \vec{v}_T \cdot \frac{\mu m_S - \mu^2 t}{m_S^2}\left(\ln \frac{m_S - \mu t'}{m_S} - 1\right) + \vec{v}_T \cdot \frac{\mu m_S}{m_S^2}\left(\ln \frac{m_S}{m_S} - 1\right) \\ &= -\frac{1}{2}gt^2\vec{e}_z - \vec{v}_T \cdot \frac{\mu m_S - \mu^2 t}{m_S^2}\left(\ln \frac{m_S - \mu t}{m_S} - 1\right) - \vec{v}_T \cdot \frac{\mu}{m_S} \\ &= -\frac{1}{2}gt^2\vec{e}_z + \frac{\mu}{m_S}\left(\frac{\mu t}{m_S} \cdot \left(\ln \frac{m_S - \mu t}{m_S} - 1\right) - \ln \frac{m_S - \mu t}{m_S}\right) \cdot \vec{v}_T \\ &= -\frac{1}{2}gt^2\vec{e}_z + \frac{\mu}{m_S}\left(\left(\frac{\mu t}{m_S} - 1\right) \cdot \ln \frac{m_S - \mu t}{m_S} - \frac{\mu t}{m_S}\right) \cdot \vec{v}_T \\ &= -\frac{1}{2}gt^2\vec{e}_z + \frac{\mu}{m_S}\left(\frac{\mu t - m_S}{m_S} \cdot \ln \frac{m_S - \mu t}{m_S} - \frac{\mu t}{m_S}\right) \cdot \vec{v}_T\end{aligned}$$

Die Steighöhe wird nach der Brenndauer t_B erreicht.

$$\begin{aligned}h_s\vec{e}_z &= -\frac{1}{2}gt_B^2\vec{e}_z + \frac{\mu}{m_S^2}\left((\mu t_B - 1) \cdot \ln \frac{m_S - \mu t_B}{m_S} - \mu t_B\right) \cdot \vec{v}_T \\ h_s &= -\frac{1}{2}g\frac{m_T^2}{\mu^2} + \frac{\mu}{m_S^2}\left(\left(\mu\frac{m_T}{\mu} - 1\right) \cdot \ln \frac{m_S - \mu\frac{m_T}{\mu}}{m_S} - \mu\frac{m_T}{\mu}\right) \cdot \vec{v}_T \cdot \vec{e}_z \\ h_s &= -\frac{1}{2}g\frac{m_T^2}{\mu^2} + \frac{\mu}{m_S^2}\left((m_T - 1) \cdot \ln \frac{m_S - m_T}{m_S} - m_T\right) \cdot v_T \sin(\vartheta - \pi) \\ &= -\frac{1}{2}g\frac{m_T^2}{\mu^2} + \frac{\mu v_T \sin(\vartheta - \pi)}{m_S}\left(\frac{m_R}{m_S} \cdot \ln \frac{m_S}{m_R} - \frac{m_T}{m_S}\right)\end{aligned}$$

Geschwindigkeit bei Brennschluss.

$$\begin{aligned}\vec{v}_S &= -gt_B\vec{e}_z + \vec{v}_T \ln \frac{m_S - \mu t_B}{m_S} \\ &= -g\frac{m_T}{\mu}\vec{e}_z + \vec{v}_T \ln \frac{m_S - \mu \frac{m_T}{\mu}}{m_S} \\ &= -\frac{gm_T}{\mu}\vec{e}_z + \vec{v}_T \ln \frac{m_R}{m_S}\end{aligned}$$

Aufgabe 3

3 P

Reibung

In dieser Aufgabe sollen zwei unterschiedliche Modelle für Reibung zwischen einem Festkörper und einem Fluid untersucht werden. Die beiden wichtigsten Modelle sind die STOKESreibung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{\text{ext}} - \beta\dot{\vec{r}}$$

und die NEWTONreibung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{\text{ext}} - \gamma|\dot{\vec{r}}|\dot{\vec{r}}$$

Dabei ist $\vec{F}_{\text{ext}}$ die Summe aller 'externen' Kräfte, die auf den Körper wirken. β und γ sind Reibungskoeffizienen, die im wesentlichen von der Form des Körpers und der Viskosität des Fluids abhängen.

3.a) Bestimme die Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ bei beiden Modellen am Beispiel der Bewegung eines Körpers ohne externe Kräfte der relativ zum Medium eine Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ hat. Wann kommt der Körper zum Stillstand? Welche Strecke legt der Körper in der Zeit t zurück? Welche Strecke kann er Maximal zurücklegen.

Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass die Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ in x-Richtung zeigt ($\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$, $v_0 > 0$).

(a) STOKES'sche Reibung:

$$m\ddot{x} = -\beta\dot{x}$$

oder

$$m\frac{dv}{dt} = -\beta v$$

Trennung der Variablen:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\beta}{m}dt$$

Integration

$$\begin{aligned}\int_{v_0}^{v}\frac{dv'}{v'} &= -\frac{\beta}{m}\int_0^t dt' \\ \ln\frac{v}{v_0} &= -\frac{\beta}{m}t \\ \frac{v}{v_0} &= e^{-\frac{\beta}{m}t} \\ v &= v_0 e^{-\frac{\beta}{m}t} \qquad (1)\end{aligned}$$

Der Körper kommt erst nach unendliche Zeit zur Ruhe.

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v(t)dt \\ x(t) &= \int_0^t v_0 e^{-\frac{\beta}{m}t}dt \\ x(t) &= -\frac{m}{\beta}v_0 e^{-\frac{\beta}{m}t} + \frac{m}{\beta}v_0 \\ x(t) &= \frac{m}{\beta}v_0\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

Der Körper nähert sich asymptotisch der maximalen Weite $x_{\max} = \frac{m}{\beta}v_0$.

(b) NEWTON'sche Reibung

$$m\ddot{x} = -\gamma|\dot{x}|\dot{x}$$

oder

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= -\gamma|v|v \\ \frac{dv}{|v|v} &= -\frac{\gamma}{m}dt \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit ist zu jeden Zeitpunkt positiv (wegen posiver v_0 und $F = -\beta v = 0$ für $v = 0$). $\Rightarrow |v|v = v^2$

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^{v}\frac{dv'}{v'^2} &= -\frac{\gamma}{m}\int_0^t dt' \\ -\frac{1}{v} + \frac{1}{v_o} &= -\frac{\gamma}{m}t \\ -\frac{1}{v} &= -\frac{\gamma}{m}t - \frac{1}{v_o} \\ v &= \frac{1}{\frac{\gamma}{m}t + \frac{1}{v_o}} \\ v &= \frac{v_o m}{\gamma v_0 t + m} \end{aligned}$$

Auch bei NEWTON'scher Reibung kommt der körper nicht zum Stillstand, auch wenn $v \to 0$ für $t \to 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{v_o m}{\gamma v_0 t' + m}dt' \\ &= v_o m\int_0^t \frac{1}{\gamma v_0 t' + m}dt' \end{aligned}$$

Integral Nr. 2: $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln(ax+b)$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_o m}{\gamma v_0}\left(\ln(\gamma v_0 t + m) - \ln(m)\right) \\ x(t) &= \frac{m}{\gamma}\ln\frac{\gamma v_0 t + m}{m} \end{aligned}$$

In der NEWTONschen Reibung kommt der Körper beliebig weit.

Das STOKE'sche Modell wird zur Beschreibung von laminarer Strömung verwendet, während turbulente Strömung nach NEWTON beschrieben wird. Zur Charakterisierung der Strömung wird gerne die REYNOLD'sche Zahl $\mathit{Re} = vL/\nu$ verwendet. L ist dabei die charakteristische Länge eines Körpers (z.B. $2R$ bei einer Kugel) und νdie kinematische Viskosität des Mediums (z.B. $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$ für Luft). Ist die $\mathit{Re}_L \lessapprox 10^3$, so geht man von laminarer Strömung aus, bei $\mathit{Re}_T \gtrapprox 10^4$ verwendet man NEWTONS Modell. Diese Werte hängen von der Geometrie des Körpers ab und müssen experimentell bestimmt werden. Des weiteren gibt es eine Übergangsform zwischen den beiden Grenzen.

3.b) Ein Köper bewegt sich zur Zeit $t = 0$ mit einer Geschwindigkeit v_0 durch ein Medium. v_0 ist ausreichend hoch um eine turbulente Strömung der Flüssigkeit um den Körper zu verursachen. Auf den Körper wirken keine Kräfte. Besrechne Ort und Geschwindigkeit des Körpers. Nimm an, dass die Strömung des Körpers schlagartig laminar wird, wenn seine REYNOLDSzahl einen kritischen Wert Re_k unterschreitet.

Die Geschwindigkeit, bei der die kritische REYNOLDSzahl unterschritten wird ist

$$v_k = \frac{\mathit{Re}_k \nu}{L}$$

Die Zeit bis diese Geschwindigkeit erreicht wird ist.

$$\begin{aligned}
v_k &= \frac{v_o m}{\gamma v_0 t_k + m} \\
\gamma v_0 t_k v_k + m v_k &= v_o m \\
\gamma v_0 t_k v_k &= v_o m - m v_k \\
t_k &= \frac{m}{\gamma} \frac{v_o - v_k}{v_0 v_k} \\
t_k &= \frac{m}{\gamma} \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_0} \right) \\
t_k &= \frac{m}{\gamma} \left(\frac{L}{\mathit{Re}_k \nu} - \frac{1}{v_0} \right)
\end{aligned}$$

Der Weg, den der Körper bis dahin zurücklegt ist

$$\begin{aligned}
x_k &= \frac{m}{\gamma} \ln \frac{\gamma v_0 t_k + m}{m} \\
x_k &= \frac{m}{\gamma} \ln \frac{\gamma v_0 \frac{m}{\gamma} \left(\frac{L}{\mathit{Re}_k \nu} - \frac{1}{v_0} \right) + m}{m} \\
x_k &= \frac{m}{\gamma} \ln \left(\frac{v_0 L}{\mathit{Re}_k \nu} - \frac{v_0}{v_0} + 1 \right) \\
x_k &= \frac{m}{\gamma} \ln \frac{v_0 L}{\mathit{Re}_k \nu}
\end{aligned}$$

Nach t_k gilt die STOKESreibung. Das bedeutet, dass bei den Gleichungen (1) und (2) verwendet werden. Es muss jedoch Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = v_k$ eingesetzt und t durch $t - t_k$ ersetzt werden:

$$\begin{aligned}
v(t > t_k) &= v_k e^{-\frac{\beta}{m}(t - t_k)} \\
v(t > t_k) &= \frac{\mathit{Re}_k \nu}{L} \cdot e^{-\frac{\beta}{m} t + \frac{\beta}{m} \frac{m}{\gamma} \left(\frac{L}{\mathit{Re}_k \nu} - \frac{1}{v_0} \right)} \\
v(t > t_k) &= \frac{\mathit{Re}_k \nu}{L} \cdot e^{-\frac{\beta}{m} t + \frac{\beta L}{\gamma \mathit{Re}_k \nu} - \frac{\beta 1}{\gamma v_0}}
\end{aligned}$$

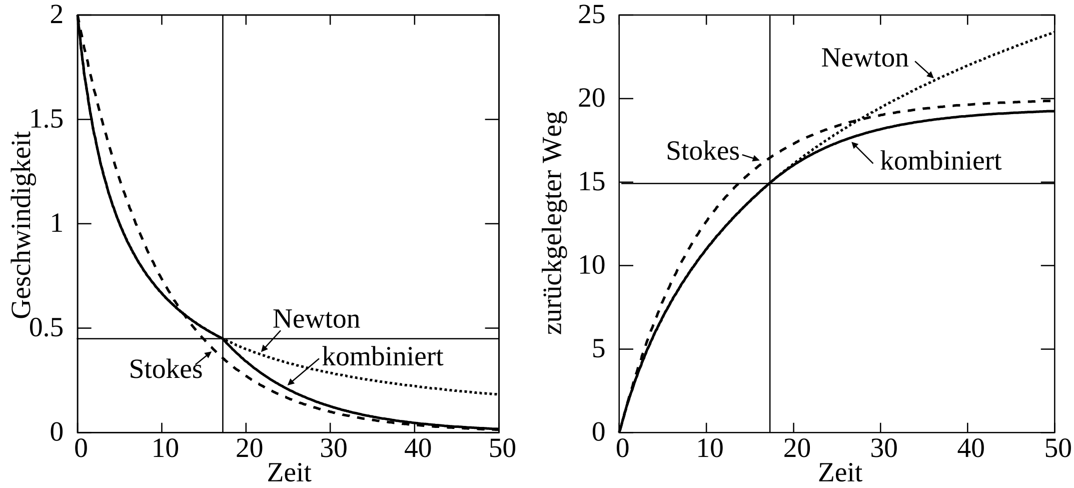


Abbildung 1: Geschwindigkeit und Ort eines Körpers auf den Reibung wirkt. Parameter: $m = 1$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.1$, $v_0 = 2$, $v_k = 0.45$ Es wirken keine äußern Kräfte auf den Körper.

Zum Ort (2) muss außerdem noch x_k addiert werden:

$$\begin{aligned} x(t > t_k) &= x_k + x(t - t_k) \\ &= \frac{m}{\gamma} \ln \frac{v_0 L}{Re_k \nu} + \frac{m}{\beta} \frac{Re_k \nu}{L} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}(t - t_k)}\right) \\ &= \frac{m}{\gamma} \ln \frac{v_0 L}{Re_k \nu} + \frac{m}{\beta} \frac{Re_k \nu}{L} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t + \frac{\beta L}{\gamma Re_k \nu} - \frac{\beta 1}{\gamma v_0}}\right) \end{aligned}$$

Ort und Geschwindigkeit für den Körper können damit durch

$$x(t) = \begin{cases} \frac{m}{\gamma} \ln \frac{\gamma v_0 t + m}{m} & \text{für } t < t_k \\ \frac{m}{\gamma} \ln \frac{v_0 L}{Re_k \nu} + \frac{m}{\beta} \frac{Re_k \nu}{L} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t + \frac{\beta L}{\gamma Re_k \nu} - \frac{\beta 1}{\gamma v_0}}\right) & \text{für } t > t_k \end{cases}$$

$$v(t) = \begin{cases} \frac{v_o m}{\gamma v_0 t + m} & \text{für } t < t_k \\ \frac{Re_k \nu}{L} \cdot e^{-\frac{\beta}{m}t + \frac{\beta L}{\gamma Re_k \nu} - \frac{\beta 1}{\gamma v_0}} & \text{für } t > t_k \end{cases}$$

angegeben werden. *Korrekturhinweis: Formen mit v_k, x_k und t_k sind auch o.k. da sie übersichtlicher sind*:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{m}{\gamma} \ln \frac{\gamma v_0 t + m}{m} & \text{für } t < t_k \\ x_k + \frac{m}{\beta} v_k \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}(t - t_k)}\right) & \text{für } t > t_k \end{cases}$$

$$v(t) = \begin{cases} \frac{v_o m}{\gamma v_0 t + m} & \text{für } t < t_k \\ v_k e^{-\frac{\beta}{m}(t - t_k)} & \text{für } t > t_k \end{cases}$$

3.c) Bestimme die Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ bei beiden Modellen am Beispiel des freien Falls ($\vec{F}_{\text{ext}} = -mg\vec{e}_z$) eines Körpers aus der Ruhe ($\vec{v}_0 = \vec{0}$). Betrachte den Grenzfall $t \to \infty$.

Die Bewegung im freien Fall ohne Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ spielt sich nur entlang der z-Koordinate ab. Deshalb wird die Rechnung eindimensional durchgeführt. Bei der NEWTON'schen Reibung ist jedoch auf das Vorzeichen der Geschwindigkeit in z-Richtung zu beachten.

(a) STOKES'sche Reibung:

$$m\ddot{z} = -mg - \beta\dot{z}$$

oder

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \beta v$$

Trennung der Variablen:

$$\frac{mdv}{mg+\beta v} = -dt$$

Integration

$$m\int_0^v \frac{dv'}{mg+\beta v'} = \int_0^t -dt'$$

Integral Nr. 2: $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln(ax+b)$

$$\begin{aligned}
\frac{m}{\beta}\ln(\beta v' + mg)\Big|_0^v &= -t \\
\frac{m}{\beta}\ln\frac{\beta v + mg}{mg} &= -t \\
\Leftrightarrow \ln\frac{\beta v + mg}{mg} &= -\frac{\beta}{m}t \\
\frac{\beta v + mg}{mg} &= e^{-\frac{\beta}{m}t} \\
\Leftrightarrow \frac{\beta}{mg}v &= e^{-\frac{\beta}{m}t} - 1 \\
\Leftrightarrow v &= \frac{mg}{\beta}\left(e^{-\frac{\beta}{m}t} - 1\right)
\end{aligned}$$

Für $t \to \infty$ hat der Körper die Geschwindigkeit $v = -\frac{mg}{\beta}$.

(b) NEWTON'sche Reibung

$$m\ddot{z} = -mg - \gamma|\dot{z}|\dot{z}$$

oder

$$\begin{aligned}
m\frac{dv}{dt} &= -mg - \gamma|v|v \\
m\frac{dv}{mg+\gamma|v|v} &= -dt
\end{aligned}$$

Integration

$$m\int_0^v \frac{dv'}{mg+\gamma|v'|v'} = -\int_0^t dt'$$

Es gibt das Integral Nr. 57:

$$\int \frac{dx}{a^2+|x|x} = \frac{1}{a}\begin{cases} \operatorname{arctan}\frac{x}{a} & \text{für } 0 < x \\ \operatorname{arctanh}\frac{x}{a} & \text{für } -|a| < x < 0 \\ \operatorname{arccoth}\frac{x}{a} & \text{für } x < -a \end{cases}$$

Zur leichtern Integration wird die Größe $v_S = \sqrt{\frac{mg}{\gamma}}$ eingeführt:

$$m \int_0^v \frac{dv'}{mg + \gamma |v'| v'} = \frac{m}{\gamma} \int_0^v \frac{dv'}{\frac{mg}{\gamma} + |v'| v'} = \frac{v_S^2}{g} \int_0^v \frac{dv'}{v_S^2 + |v'| v'}$$

$$\Rightarrow v_S^2 \int_0^v \frac{dv'}{v_S^2 + |v'| v'} = -g \int_0^t dt'$$

Da der Körper aus der Ruhe fallen gelassen wird, ist seine Geschwindigkeit immer negativ (es bleiben also nur die beiden Fälle mit den hyperbolischen Funktionen). Zunächst ist seine Geschwindigkeit sehr klein (also $-\frac{mg}{\gamma} < v < 0$).

$$\begin{aligned}
\Rightarrow v_S^2 \frac{1}{v_S} \operatorname{arctanh} \frac{v'}{v_S}\bigg|_0^v &= -gt \\
\operatorname{arctanh} \frac{v}{v_S} &= \frac{-gt}{v_S} \\
\frac{v}{v_S} &= \tanh \frac{-gt}{v_S} \\
v(t) &= -v_S \cdot \tanh \frac{gt}{v_S}
\end{aligned}$$

Der hyperbolische Tangens ist für $t = 0$ gleich null, wächst monoton und sterbt für $t \to \infty$ asymptotisch gegen 1. Deshalb kann auch der Fall $v > v_S$ nicht erreicht werden. Für $t \to \infty$ nächert sich also $v(t)$ asymptotisch an w. Der Körper fällt mit konstanter Geschwindigkeit $v_S = \sqrt{\frac{mg}{\gamma}}$, der “stationären Sinkgeschwindigkeit”.