Übungsblatt 5

Lösungsvorschlag
4 Aufgaben, 11 Punkte

Aufgabe 1

3 P

Energie eines gedämpften harmonischen Oszillators

Es ist die Energie und der Energieverlust eines gedämpften harmonischen Oszillator zu berechnen. Dabei sind alle drei möglichen Bewegungsformen des gedämpften Oszillators zu berücksichtigen. *Vergleiche dazu R. Dreizler und C. Lüdde „Mechanik, Aufgabensammlung", Aufgabe 4.14, 2003*

1.a) Berechne die mechanischen Energie und den Energieverlust. Benutze die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ sowie $\dot{x}(0) = v_0$.

gedämpfter harmonischer Oszillator:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Dx = 0$$

mit $b = \frac{\beta}{2}m$ und $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ ist die DGL bequemer zu lösen

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Bei der Lösung sind drei verschiedene Fälle zu unterscheiden:

Fall $b < \omega_0$:

$$x = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)e^{-bt}$$

mit

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$$

Fall $b = \omega_0$:

$$x = v_0 t e^{-bt}$$

und Fall $b > \omega_0$:

$$x = \frac{v_0}{\Omega}\sinh(\Omega t)e^{-bt}$$

mit

$$\Omega = \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$$

Die mechanische Energie eines eindimensionalen, harmonischen Oszillators setzt sich aus kinetischer und potentieller Energie zusammen:

$$\begin{aligned}
E_{\text{mech}}(t) &= T(t) + U(t) \\
E_{\text{mech}}(t) &= \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{D}{2}x^2 \\
E_{\text{mech}}(t) &= \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2
\end{aligned}$$

Die Ableitung von x - Fall $b < \omega_0$:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{d}{dt}\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)e^{-bt} \\
\dot{x} &= \frac{v_0}{\omega}\left(\omega\cos(\omega t) - b\sin(\omega t)\right)e^{-bt}
\end{aligned}$$

Diese Ableitung ist auch für den 2. Fall $b = \omega_0 \Leftrightarrow \omega \to 0$ gültig:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}v_0 t e^{-bt} &= \lim_{\omega\to 0}\frac{v_0}{\omega}\left(\omega\cos(\omega t) - b\sin(\omega t)\right)e^{-bt} \\
v_0\left(e^{-bt} - bte^{-bt}\right) &= \lim_{\omega\to 0}\left(v_0\cos(\omega t) - \frac{v_0 b}{\omega}\sin(\omega t)\right)e^{-bt} \\
v_0\left(1 - bt\right)e^{-bt} &= \left(v_0 - \lim_{\omega\to 0}\frac{v_0 b}{\omega}(\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{6} + ...)\right)e^{-bt} \\
v_0\left(1 - bt\right)e^{-bt} &= \left(v_0 - v_0 bt\right)e^{-bt} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Auch für den Fall $b > \omega_0$ gilt die Ableitung, wenn man berücksichigt dass $\omega = i\Omega$ dann imaginär ist. Die mechanische Energie ist damit

$$\begin{aligned}
E_{\text{mech}}(t) &= \frac{m}{2}\frac{v_0^2}{\omega^2}\left(\omega\cos(\omega t) - b\sin(\omega t)\right)^2 e^{-2bt} + \frac{m}{2}\omega_0^2\frac{v_0^2}{\omega^2}\sin^2(\omega t)e^{-2bt} \\
E_{\text{mech}}(t) &= \frac{m}{2}\frac{v_0^2}{\omega^2}\left(\omega^2\cos(\omega t) - 2\omega b\cos(\omega t)\sin(\omega t) + b^2\sin^2(\omega t) + (\omega^2 + b^2)\sin^2(\omega t)\right)e^{-2bt} \\
E_{\text{mech}}(t) &= \frac{m}{2}\frac{v_0^2}{\omega^2}\left(\omega^2 - \omega b\sin(2\omega t) + 2b^2\sin^2(\omega t)\right)e^{-2bt} \\
E_{\text{mech}}(t) &= \frac{m}{2}v_0^2\left(1 - \frac{b}{\omega}\sin(2\omega t) + 2\frac{b^2}{\omega^2}\sin^2(\omega t)\right)e^{-2bt}
\end{aligned}$$

für den aperiodischen Grenzfall ($\omega_0 = b$, $\omega \to 0$) erhält man

$$\begin{aligned}
E_{\text{mech}}(t) &= \lim_{\omega\to 0}\frac{m}{2}v_0^2\left(1 - \frac{b}{\omega}(2\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{6} + ...) + 2\frac{b^2}{\omega^2}(\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{6} + ...)^2\right)e^{-2bt} \\
E_{\text{mech}}(t) &= \frac{m}{2}v_0^2\left(1 - 2bt + 2b^2t^2\right)e^{-2bt}
\end{aligned}$$

Im Kriechfall ($\omega_0 < b$, $\omega = i\Omega$) erhält man:

$$E_{\text{mech}}(t) = \frac{m}{2}v_0^2\left(1 - \frac{b}{2i\Omega}\sin(2i\Omega t) + 2\frac{b^2}{-\Omega^2}\sin^2(i\Omega t)\right)e^{-2bt}$$

$$\begin{aligned}
\sin(i\varphi) &= \frac{i}{2}\left(e^{-ii\varphi} - e^{ii\varphi}\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(e^{\varphi} - e^{-\varphi}\right) \\
&= \frac{i}{2}\sinh(\varphi)
\end{aligned}$$

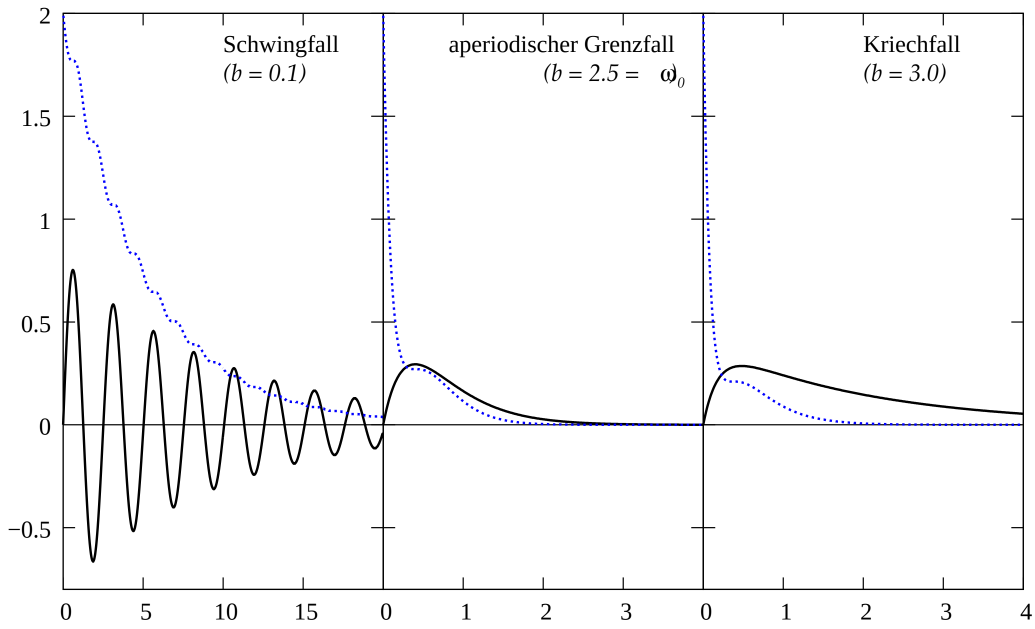


Abbildung 1: Ort $x(t)$ (—–) und Energie $E_{\rm mech}(t)$ $(\cdots)$ eines gedäpften harmonischen Oszillators für verschidene Dämpfungsparameter b. Feste Parameter: $m = 1\,\mathrm{kg}$, $\omega_0 = 2.5\,s^{-1}$, $v_0 = 2\,m/s$

$$
\begin{aligned}
E_{\rm mech}(t) &= \frac{m}{2}v_0^2\left(1-\frac{b}{2i\Omega}i\sinh(2\Omega t)+2\frac{b^2}{-\Omega^2}i^2\sinh^2(\Omega t)\right)e^{-2bt} \\
E_{\rm mech}(t) &= \frac{m}{2}v_0^2\left(1-\frac{b}{2\Omega}\sinh(2\Omega t)+2\frac{b^2}{\Omega^2}\sinh^2(\Omega t)\right)e^{-2bt}
\end{aligned}
$$

Dreizler und Lüdde (Orginal):

$$
\begin{aligned}
E_{\rm mech}(t) &= \frac{m}{2}v_0^2\Big(1+2e^{-2bt}\sinh(bt) \\
&- \frac{b}{\Omega^2}\left((\Omega-b)\,e^{-(\Omega-b)t}\sinh((\Omega-b)\,t)+(\Omega+b)\,e^{-(\Omega+b)t}\sinh((\Omega+b)\,t)\right)\Big)
\end{aligned}
$$

1.b) Vergleiche und diskutiere die Ergebnisse.

Die Abnahme der mechanische Energie $E_{\rm mech}(t)$ wird in jedem der drei Fälle durch Exponentialfunktionen reguliert. Bei der schwachen Dämpfung ist der Abfall (wie zu erwarten) am langsamsten. Die Funktion $E_{\rm mech}(t)$ zeigt noch Andeutungen des oszillatorischen Charakters der Funktion $x(t)$ (bzw. $\dot{x}(t)$). Die Abnahme der mechanischen Energie für den aperiodischen Grenzfall und den Fall der starken Dämpfung unterscheidet sich in der Struktur nicht wesentlich. Man findet in beiden Fällen eine starke Abnahme bis in die Nähe des Zeitpunktes der Bewegungsumkehr und dann, infolge der niedrigen Geschwindigkeit des Massenpunktes (angedeutet durch die langsame Änderung der Position mit der Zeit), einen deutlich verzögerten Abfall.

Aufgabe 2

3 P

Peitsche

Eine Schnur der Länge l und der Masse M wird an einem Ende mit einem kleinen Massenstück m versehen. Die so konstruierte Peitsche wird bewegt indem das andere Ende mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$ gezogen wird. Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 & \qquad \dot{x}(0) &= v \\ y(0) &= x_0 + l & \qquad \dot{y}(0) &= 0 \end{aligned}$$

2.a) Wie groß ist die Geschwindigkeit $\dot{y}(t)$ des Massenstückes?

Es werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned} l &= l_A + l_B \\ l_A &= x - z = \frac{l + x - y}{2} \qquad (1) \\ l_B &= y - z = \frac{l - x + y}{2} \qquad (2) \\ z &= 1/2(x + y - l) \end{aligned}$$

Massendichte:

$$\mu = \frac{M}{l}$$

Impuls:

$$p = \mu l_A \dot{x} + \mu l_B \dot{y} + m\dot{y}$$

Einsetzen von (1) und (2):

$$p = \frac{\mu}{2}(l + x - y)\,\dot{x} + \frac{\mu}{2}(l - x + y)\,\dot{y} + m\dot{y} \qquad (3)$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}\mu l_A \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\mu l_B \dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

Einsetzen von (1) und (2):

$$T = \frac{\mu}{4}(l + x - y)\dot{x}^2 + \frac{\mu}{4}(l - x + y)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \qquad (4)$$

Newtonsche Gleichung:

$$\dot{p} = F \qquad (5)$$

Energieänderung:

$$\dot{T} = F\dot{x} \qquad (6)$$

Zeitableitung von (3):

$$\dot{p} = \frac{\mu}{2}\Big[(\dot{x} - \dot{y})\dot{x} + \underbrace{(l + x - y)\ddot{x}}_{=0} + (\dot{x} + \dot{y})\dot{y} + (l - x + y)\ddot{y}\Big] + m\ddot{y}$$

Einsetzen von $\dot{x} = v$ und $x = x_0 + vt$:

$$F = \dot{p} = \frac{\mu}{2}\left[(v-\dot{y})v - (v-\dot{y})\dot{y} + (l - x_0 - vt + y)\ddot{y}\right] + m\ddot{y} \tag{7}$$

Zeitableitung von (4)

$$\begin{aligned}\dot{T} &= \frac{\mu}{4}\Big[\underbrace{(l+x-y)\partial_t\dot{x}^2}_{=0} + (\dot{x}-\dot{y})\dot{x}^2 \\ &\qquad + (l-x+y)\partial_t\dot{y}^2 + (\dot{x}+\dot{y})\dot{y}^2\Big] + \frac{1}{2}m\,\partial_t\dot{y}^2 \\ &= \frac{\mu}{4}\left[(\dot{x}-\dot{y})\dot{x}^2 + (\dot{x}+\dot{y})\dot{y}^2 + 2(l-x+y)\dot{y}\ddot{y}\right] + m\dot{y}\ddot{y}\end{aligned}$$

Einsetzen in 6 unter Verwendung von $\dot{x} = v$ und $x = x_0 + vt$:

$$Fv = \dot{T} = \frac{\mu}{4}\left[(v-\dot{y})v^2 - (v-\dot{y})\dot{y}^2 + 2(l-x_0-vt+y)\dot{y}\ddot{y}\right] + m\dot{y}\ddot{y}. \tag{8}$$

Multiplizieren von 7 mit v und subtrahieren von 8:

$$\dot{p}v - \dot{T} = 0$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \frac{\mu}{4}\Big[2(v-\dot{y})v^2 - 2(v-\dot{y})v\dot{y} + (l-x_0-vt+y)\ddot{y}v - (v-\dot{y})v^2 \\ -(v-\dot{y})\dot{y}^2 + 2(l-x_0-vt+y)\dot{y}\ddot{y}\Big] + m\ddot{y}(v-\dot{y}) &= 0 \\ \frac{\mu}{4}\Big[(v-\dot{y})(v^2-2v\dot{y}-\dot{y}^2) + 2(l-x_0-vt+y)\ddot{y}(v-\dot{y})\Big] + m\ddot{y}(v-\dot{y}) &= 0 \\ \frac{\mu}{4}\Big[(v-\dot{y})(v-\dot{y})^2 + 2(l-x_0-vt+y)\,\ddot{y}\,(v-\dot{y})\Big] + m\ddot{y}(v-\dot{y}) &= 0\end{aligned}$$

Durch kürzen mit $(v-\dot{y})$ gelangt man zur Differentialgleichung:

$$\frac{\mu}{4}(v-\dot{y})^2 + \ddot{y}\left[\frac{\mu}{2}(l-x_0-vt+y) + m\right] = 0 \tag{9}$$

Die DGL lässt sich durch einen trickreichen Substitutionsansatz lösen.

$$\eta = \frac{\mu}{2}(l-x_0-vt+y) + m \tag{10}$$

Wenn man η nach der Zeit ableitet sieht man das sich die anderen Terme der DGL durch die erste und zweite Ableitungen subsitutieren lassen:

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\frac{\mu}{2}(v-\dot{y}) \\ \ddot{\eta} &= \frac{\mu}{2}\ddot{y}\end{aligned}$$

In 9 einsetzen:

$$\underbrace{\frac{\mu}{4}(v-\dot{y})^2}_{\frac{1}{\mu}\dot{\eta}^2} + \underbrace{\ddot{y}}_{\frac{2}{\mu}\ddot{\eta}}\underbrace{\left[\frac{\mu}{2}(l-x_0-vt+y)+m\right]}_{\eta} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{\mu}\eta\ddot{\eta} + \frac{1}{\mu}\dot{\eta}^2 &= 0 \\ \eta\ddot{\eta} + \frac{1}{2}\dot{\eta}^2 &= 0\end{aligned}$$

Mit $\dot\eta$ erweitern:

$$\eta\dot\eta\ddot\eta + \frac{1}{2}\dot\eta^3 = 0$$

Das ist die Ableitung von $1/2\,\eta\dot\eta^2$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\eta\dot\eta^2}{2}\right) = \frac{\dot\eta^2\partial_t\eta + \eta\partial_t\dot\eta^2}{2} = \frac{\dot\eta^2\dot\eta}{2} + \frac{\eta\,2\dot\eta\,\ddot\eta}{2} = \frac{1}{2}\dot\eta^3 + \eta\dot\eta\ddot\eta$$

damit gilt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\eta\dot\eta^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow \eta\dot\eta^2 = const$$

Jetzt die Substitution 10 rückgängig machen:

$$\left[\frac{\mu}{2}(l - x_0 - vt + y) + m\right]\underbrace{\frac{\mu^2}{4}}_{const}(v - \dot y)^2 = c$$

Durch kürzen des konstanten Terms erhalten wir:

$$\left[\frac{\mu}{2}(l - x_0 - vt + y) + m\right](v - \dot y)^2 = c \tag{11}$$

Hinweis: Hier ist anscheinend ein Druckfehler im GREINER

Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen lässt sich die Konstante c bestimmen.

$$c = \left[\frac{\mu}{2}\underbrace{(l - x_0 + x_0 + l)}_{2l} + m\right]\left[v - \underbrace{\frac{d}{dt}(x_0 + li)}_{=0}\right]^2 = (m + \mu l)v^2$$

$$c = (m + M)\,v^2 \tag{12}$$

In 11 einsetzen und nach $\dot y$ Auflösen:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\mu}{2}(l - x_0 - vt + y) + m\right](v - \dot y)^2 &= (m + M)\,v^2 \\
(v - \dot y) &= \sqrt{\frac{(m + M)v^2}{m + \frac{\mu}{2}(l - x_0 - vt + y)}} \\
(v - \dot y) &= \sqrt{\frac{(m + M)v^2}{m + l_b\mu}} \\
\dot y &= -v\left(\sqrt{\frac{m + M}{m + l_B\mu}} - 1\right) \qquad (13)
\end{aligned}$$

2.b) Berechne die maximale Geschwindigkeit $\dot y_{\max}$ eines Massenstück von 5 g das an einer 2.475 m langen und 0.475 kg schweren Peitsche, die mit 3 m/s bewegt wird, hängt.

Die Gleichung wird maximal für $l_b = 0$. Die Geschwindigkeit ist also am Umkehrpunkt von B am grössten.

$$\dot y_{max} = -v\left(\sqrt{\frac{m + M}{m}} - 1\right) = 26.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{14}$$

Dort ist auch die Beschleunigung von m und damit die Kraft am Grössten. $l_B = 0$ in 9 einsetzen, und nach $\ddot y$ auflösen:

$$\ddot y\left[m + \frac{\mu}{2}\underbrace{(l - x_0 - vt + y)}_{l_B = 0}\right] = \frac{\mu}{4}(v - \dot y)^2$$

$$\ddot{y} = \frac{\mu}{4m}(v - \dot{y})^2$$

Gleichung 14 einsetzen:

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= \frac{\mu}{4m}\left[v + v\left(\sqrt{\frac{m+M}{m}} - 1\right)\right]^2 \\
&= v^2\frac{\mu}{4m}\left[\left(\sqrt{\frac{m+M}{m}} - 1 + 1\right)\right]^2 \\
\ddot{y} &= v^2\mu\frac{M+m}{4m^2}
\end{aligned}$$

Mit $\ddot{y}m = F$ ist die maximale Kraft:

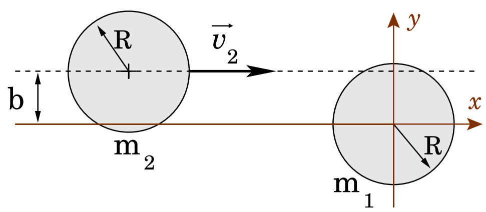
$$F_{max} = \frac{\mu}{4}v^2\frac{M+m}{m} = 41.5\,\mathrm{N} \tag{15}$$

Hinweis: Die Aufgabe ist aus „Mechanik, Teil 1“ von W. Greiner.

Aufgabe 3

3 P

Billard



Eine Kugel mit der Masse m und dem Radius R bewegt sich auf dem Billardtisch mit der Geschwindigkeit $v = p/m$ auf eine ruhende Kugel der Masse M und dem gleichen Radius R zu. Das Koordinatensystem wählt man so, dass der Mittelpunkt der ruhende Kugel im Ursprung liegt und sich der Mittelpunkt der anderen Kugel parallel zur x-Achse bewegt. Der Stoßparameter b bezeichnet den Abstand zwischen der Bahnkurve und der x-Achse. Die beiden Kugeln stoßen vollelastisch miteinander. Reibung kann vernachlässigt werden.

3.a) Berechne die Impulse $\vec{p}'$ und $\vec{P}'$ der Kugeln bezüglich des Tisches nach dem Stoß.

Es gilt Impulserhaltung:

$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{P}'$$

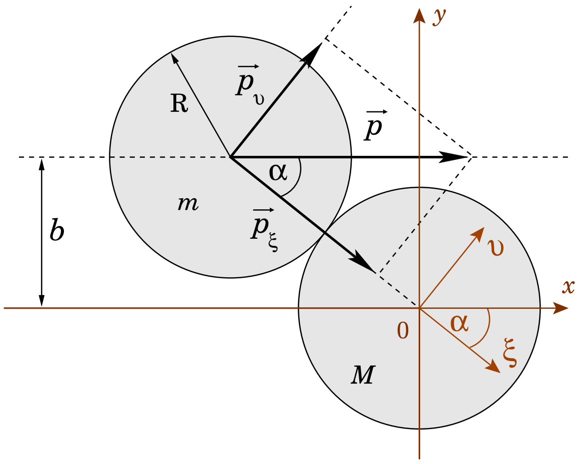
Und Energieerhaltung:

$$\begin{aligned}
E_2 &= E_1 + E_2 \\
\Leftrightarrow \frac{|\vec{p}|^2}{m} &= \frac{|\vec{p}'|^2}{m} + \frac{|\vec{P}'|^2}{M}
\end{aligned}$$

Für den Stoßwinkel α gilt:

$$\sin\alpha = \frac{b}{2R}$$

Zur einfacheren Rechnung betrachte wir die Impulse in einem um α gedrehten Bezugssys-



tem $\{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\upsilon\}$ mit:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_\xi &= \vec{e}_x \cos\alpha - \vec{e}_y \sin\alpha \\
\vec{e}_\upsilon &= \vec{e}_x \sin\alpha + \vec{e}_y \cos\alpha
\end{aligned}$$

Da ein Impulsübertrag nur in Richtung $\vec{e}_\xi$ stattfindet, gelten die drei Beziehungen

$$0 = \vec{P}' \cdot \vec{e}_\upsilon \quad \Leftrightarrow \quad P'_\upsilon = 0 \tag{16}$$

$$\Rightarrow \vec{p} \cdot \vec{e}_\upsilon = \vec{p}' \cdot \vec{e}_\upsilon \quad \Leftrightarrow \quad p'_\nu = p_\nu = p \sin\alpha \tag{17}$$

$$\vec{p} \cdot \vec{e}_\xi = (\vec{p}' + \vec{P}') \cdot \vec{e}_\xi \quad \Leftrightarrow \quad P'_\xi + p'_\xi = p_\xi = p\cos\alpha \tag{18}$$

Der Energiesatz gilt :

$$\begin{aligned}
\frac{p^2}{m} &= \frac{{p'_\xi}^2 + {p'_\upsilon}^2}{m} + \frac{P'^2_\xi}{M} \\
p^2 &= p^2\cos^2\alpha - 2P'_\xi p\cos\alpha + P'^2_\xi + p^2\sin^2\alpha + \frac{m}{M}P'^2_\xi \\
0 &= \frac{m+M}{M}P'^2_\xi - 2pP'_\xi\cos\alpha \\
0 &= P'_\xi\left(\frac{m+M}{M}P'_\xi - 2p\cos\alpha\right)
\end{aligned}$$

Der Fall $P'_\xi = 0$ ist nicht interresant (Kein Stoß, gilt wenn $\left|\frac{b}{2R}\right| > 1$)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow P'_\xi &= \frac{2M}{m+M}p\cos\alpha \\
\Rightarrow \vec{P}' &= \frac{2M}{m+M}p\cos\alpha\vec{e}_\xi
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis in Beziehung (18) einsetzen:

$$\begin{aligned}
p\cos\alpha &= \frac{2M}{m+M}p\cos\alpha + p'_\xi \\
p'_\xi &= \left(1 - \frac{2M}{m+M}\right)p\cos\alpha \\
p'_\xi &= \frac{m-M}{m+M}p\cos\alpha
\end{aligned}$$

Mit (17) erhält man für den Impulsvektor

$$\begin{aligned}\vec{p} &= p'_\xi \vec{e}_\xi + p'_\nu \vec{e}_\upsilon \\ \vec{p} &= \frac{m-M}{m+M} p \cos\alpha \vec{e}_\xi + p \sin\alpha \vec{e}_\upsilon\end{aligned}$$

In xy-Koordinaten:

$$\begin{aligned}\vec{P}' &= \frac{2M}{m+M} p \cos\alpha \left(\vec{e}_x \cos\alpha - \vec{e}_y \sin\alpha\right) \\ \vec{P}' &= \frac{2M}{m+M} p \left(\vec{e}_x \cos^2\alpha - \vec{e}_y \frac{1}{2} \sin 2\alpha\right)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\vec{p}' &= \frac{m-M}{m+M} p \cos\alpha \left(\vec{e}_x \cos\alpha - \vec{e}_y \sin\alpha\right) + p \sin\alpha \left(\vec{e}_x \sin\alpha + \vec{e}_y \cos\alpha\right) \\ \vec{p}' &= \frac{m-M}{m+M} p \left(\vec{e}_x \cos^2\alpha - \frac{1}{2}\vec{e}_y \sin 2\alpha\right) + p \left(\vec{e}_x \sin^2\alpha + \frac{1}{2}\vec{e}_y \sin 2\alpha\right) \\ \vec{p}' &= p \left(\frac{m-M}{m+M} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) \vec{e}_x + \frac{p}{2} \sin 2\alpha \left(1 - \frac{m-M}{m+M}\right) \vec{e}_y \\ \vec{p}' &= p \left(\frac{m-M}{m+M} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) \vec{e}_x + \frac{p}{2} \frac{2M}{m+M} \sin 2\alpha \vec{e}_y\end{aligned}$$

Mit den Relationen für $a = \frac{b}{2R}$

$$\begin{aligned}\cos(\arcsin a) &= \sqrt{1-a^2} \\ \frac{1}{2}\sin(2\arcsin a) &= a\sqrt{1-a^2}\end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}\vec{p}' &= p \left(\frac{m-M}{m+M}\left(1-a^2\right) + a^2\right) \vec{e}_x + p \frac{2M}{m+M} a\sqrt{1-a^2} \vec{e}_y \\ \vec{p}' &= p \left(\frac{m-M}{m+M} + \frac{2M}{m+M} a^2\right) \vec{e}_x + p \frac{2M}{m+M} a\sqrt{1-a^2} \vec{e}_y\end{aligned}$$

und

$$\vec{P}' = \frac{2M}{m+M} p \left((1-a^2)\vec{e}_x - a\sqrt{1-a^2}\vec{e}_y\right)$$

3.b) Berechne die Impulse relativ zum Schwerpunktsystem.
Schwerpunktsystem:

$$\begin{aligned}\text{Impuls des Schwerpunktes} \quad \vec{p}_s &= \frac{\vec{P}+\vec{p}}{2} = \frac{1}{2} p \vec{e}_x = \vec{p}'_s \\ \text{relativer Impuls} \quad \vec{p}_r &= \vec{p} - \vec{P} = p\vec{e}_x\end{aligned}$$

Nach dem Stoß haben die beiden Kugel den Impuls

$$\begin{aligned}\vec{p}'_r &= \vec{p}' - \vec{P}' \\ \vec{p}'_r &= p \left(\frac{m-M}{m+M} + \frac{2M}{m+M} a^2\right) \vec{e}_x + p \frac{2M}{m+M} a\sqrt{1-a^2} \vec{e}_y \\ &- \frac{2M}{m+M} p \left((1-a^2)\vec{e}_x - a\sqrt{1-a^2}\vec{e}_y\right) \\ \vec{p}'_r &= p \left(\frac{m-3M}{m+M} + \frac{4M}{m+M} a^2\right) \vec{e}_x + p \frac{4M}{m+M} a\sqrt{1-a^2} \vec{e}_y \quad \text{mit } a = \frac{b}{2R}\end{aligned}$$

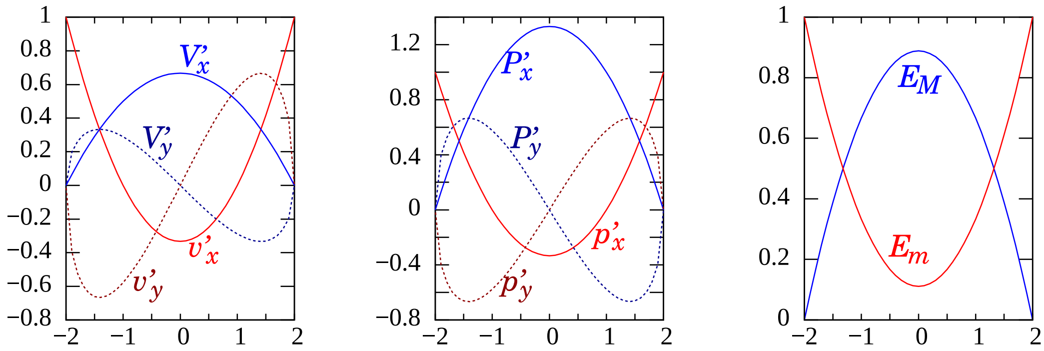


Abbildung 2: x, y-Komponenten der Geschwindigkeiten $\vec{v}'$, $\vec{V}'$ (links) und der Impulse p' , $\vec{P}'$ (Mitte) für $m = 1$, $M = 2$, $p = 1$ und $R = 1$ in Abhängigkeit von b. Rechts sind die Energien $E_m = p^2/m$ und $E_M = P^2/P$ der Kugeln in Abhängigkeit von b.

relativ zueinander. Gegentest:

$$\begin{aligned}
\vec{p}'_s &= \frac{\vec{P}' + \vec{p}'}{2} \\
2\vec{p}'_s &= p\left(\frac{m-M}{m+M} + \frac{2M}{m+M}a^2\right)\vec{e}_x + p\frac{2M}{m+M}a\sqrt{1-a^2}\vec{e}_y \\
&+ \frac{2M}{m+M}p\left((1-a^2)\vec{e}_x - a\sqrt{1-a^2}\vec{e}_y\right) \\
\vec{p}'_s &= \frac{1}{2}\left(\frac{m-M}{m+M} + \frac{2M}{m+M}\right)p\vec{e}_x \\
\vec{p}'_s &= \frac{1}{2}p\vec{e}_x \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Hinweis: Die Teilaufgabe a gestaltet sich einfacher wenn man ein gedrehtes Koordinatensystem einführt.

Werkzeug:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

Aufgabe 4

2 P

Rennwagen

Bei Sprintrennen wird ein Rennwagen benötigt, der möglichst gut beschleunigen (und anschließend wieder gut bremsen) kann. Ein Problem ist dabei, dass die Reifen durchdrehen, wenn die Kraft der Reifenoberfläche auf den Straßenbelag F_b zu groß wird (es gilt dann nicht mehr Haftreibung, sondern Gleitreibung). Die „maximale“ Beschleunigungskraft $F_\mathrm{b} = \mu F_\mathrm{h}$. Dabei ist μ der Haftreibungskoiffizient und F_h die Kraft auf die Hinterräder. Der Wagen hat die Masse m. Es wirkt die Schwerebeschleunigung der Erde.

4.a) Stelle die Gleichung für das Gleichgewicht der Kräfte auf.

$$mg = F_\mathrm{v} + F_\mathrm{h}$$

4.b) Stelle die Gleichung für das Momentgleichgewicht um eine Drehachse auf, die duch die Auflagepunkte der Hinterräder läuft. Es ist zu berücksichtigen, dass die Beschleunigungskraft am Schwerpunkt angreift.

$$
\begin{aligned}
\vec{M}_{\mathrm{v}} + \vec{M}_{\mathrm{b}} + \vec{M}_{\mathrm{g}} + \vec{M}_{\mathrm{h}} &= 0 \\
(l_{\mathrm{v}} + l_{\mathrm{h}})\vec{e}_x \times \vec{F}_{\mathrm{v}} + (l_{\mathrm{h}}\vec{e}_x + h\vec{e}_y) \times \vec{F}_{\mathrm{b}} + (l_{\mathrm{h}}\vec{e}_x + h\vec{e}_y) \times (-\vec{F}_{\mathrm{g}}) + \vec{0} \times \vec{F}_{\mathrm{v}} &= 0 \\
((l_{\mathrm{v}} + l_{\mathrm{h}})F_{\mathrm{v}} + hF_{\mathrm{b}} - l_{\mathrm{h}}F_{\mathrm{g}})\,\vec{e}_z &= 0 \\
(l_{\mathrm{v}} + l_{\mathrm{h}})F_{\mathrm{v}} + hF_{\mathrm{b}} &= l_{\mathrm{h}}F_{\mathrm{g}} \\
(l_{\mathrm{v}} + l_{\mathrm{h}})F_{\mathrm{v}} + hF_{\mathrm{b}} &= l_{\mathrm{h}}mg
\end{aligned}
$$

4.c) Wie groß sind die Normalkräfte F_{v} und F_{h} auf den Straßenbelag.

$$
F_b = \mu F_{\mathrm{h}} \qquad F_{\mathrm{v}} = mg - F_{\mathrm{h}}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow (l_{\mathrm{v}} + l_{\mathrm{h}})(mg - F_{\mathrm{h}}) + \mu h F_{\mathrm{h}} &= l_{\mathrm{h}}mg \\
(\mu h - l_{\mathrm{v}} - l_{\mathrm{h}})F_{\mathrm{h}} &= (l_{\mathrm{h}} - l_{\mathrm{v}} - l_{\mathrm{h}})mg \\
F_{\mathrm{h}} &= \frac{-l_{\mathrm{v}}}{\mu h - l_{\mathrm{v}} - l_{\mathrm{h}}}mg \\
F_{\mathrm{h}} &= \frac{l_{\mathrm{v}}}{l_{\mathrm{v}} + l_{\mathrm{h}} - \mu h}mg
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{\mathrm{v}} &= mg - F_{\mathrm{h}} \\
F_{\mathrm{v}} &= \left(1 - \frac{l_{\mathrm{v}}}{l_{\mathrm{v}} + l_{\mathrm{h}} - \mu h}\right)mg \\
F_{\mathrm{v}} &= \frac{l_{\mathrm{h}} - \mu h}{l_{\mathrm{v}} + l_{\mathrm{h}} - \mu h}mg
\end{aligned}
$$

4.d) Die maximale Beschleunigung kann man erreichen wenn $F_{\mathrm{v}} \to 0$. Warum? Was ist unter Berücksichtigung dieser Bedingung die maximal mögliche Beschleunigung b? Wie muss dafür das Auto konstruiert sein? (Beziehung zwischen l_{h}, h und μ).

Wenn die Kraft F_{v} negativ wird, überschlägt sich das Fahrzeug.

$$
\begin{aligned}
F_{\mathrm{v}} \to 0 \;\Rightarrow\; F_{\mathrm{h}} &= mg \\
\Rightarrow mb &= \mu mg \\
\Leftrightarrow b &= \mu g
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{\mathrm{h}} &= mg \\
\Leftrightarrow \frac{l_{\mathrm{v}}}{l_{\mathrm{v}} + l_{\mathrm{h}} - \mu h}mg &= mg \\
\Leftrightarrow \frac{l_{\mathrm{v}}}{l_{\mathrm{v}} + l_{\mathrm{h}} - \mu h} &= 1 \\
\Leftrightarrow l_{\mathrm{h}} - \mu h &= 0 \\
l_{\mathrm{h}} &= \mu h
\end{aligned}
$$

4.e) In welcher Zeit kann der Rennwagen aus dem Stand eine Geschwindigkeit von $100\,\mathrm{km/h}$ erreichen, wenn zwischen Hinterreifen und Straße ein Haftreibungskoiffizient von $\mu = 0.9$ herrscht? Welche Strecke legt er dabei zurück?

$$\begin{aligned} v &= bt \\ \Rightarrow t &= \frac{v}{\mu g} \\ t &= 3.15\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}\mu g t^2 \\ s &= 43.8\,\mathrm{m} \end{aligned}$$