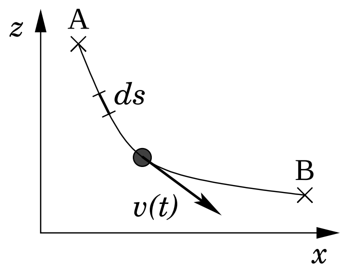
Übungsblatt 6

Lösungsvorschlag
3 Aufgaben, 9 Punkte

Aufgabe 1

3 P

Das Brachystochronenproblem



Gegeben sind zwei Punkte in der x-z-Ebene, die durch einen (fiktiven) Draht verbunden werden. Durch die Schwerkaft $g\vec{e}_z$ gleitet eine Perle auf dem Draht reibungsfrei vom höher gelegenen Punkt A zum tieferen Punkt B (Bei Punkt A hat sie eine vernachlässigbar kleine Geschwindigkeit). Bei welcher Form des Drahtes (≙Bahnkurve der Perle) ist die Zeit, die die Perle von A nach B Braucht minimal? Löse diese Aufgabe mit Hilfe der Variationsrechnung.

Hinweise: Mit der Substitution $z = \mathcal{Z} - \frac{1}{4gC^2}(1-\cos\alpha)$ lässt sich das auftretende Integral einfacher lösen. Dabei ist $\mathcal{Z}$ geeignet zu wählen und α ist der freie Parameter. C ist ein Integrationsparameter, den man anhand der Anfangsbedingungen (x_A, z_A) und (x_B, z_B) bestimmen könnte. Diese Rechnung ist jedoch etwas langatmig und wird nicht verlangt.
Die Bahnkurve braucht nicht explizit angegeben werden (Parameterdarstellung in Abh. von α reicht).

Die Zeit dt, die die Perle auf einem infinitesimalen Kurvenstück ds braucht ist:

$$dt = \frac{ds}{v(t)}$$

Die gesammte Zeit T ist das Integral

$$T = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{ds}{v(t)}$$

Mit der Definiton des Wegelementes

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2}$$

und der Energie der Perle

$$\begin{aligned} E_{kin} + E_{pot} &= E_A \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2(t) + mgz(t) &= mgz_A \\ \Leftrightarrow v^2(t) &= 2g(z_A - z(t)) \\ \Leftrightarrow v(t) &= \sqrt{2g(z_A - z(t))} \end{aligned}$$

Kann man T durch x und z ausdrücken:

$$T = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{\sqrt{dx^2 + dz^2}}{\sqrt{2g(z_A - z)}} \tag{1}$$

An dieser steht noch nicht fest, welche Variable in der Variationsrechnung unabhängig bzw. abhängig sein soll. Die Rechnung wrid vermutlich einfacher wenn man z als unabhängige Variable verwendet (Nenner von (1)!): $x = f(z)$, $dx = \frac{dx}{dy}dy = x'dy$ Dann ist die Zeit

$$\begin{aligned} T &= \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{\sqrt{(x'dz)^2 + dz^2}}{\sqrt{2g(z_A - z)}} \\ T &= \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \sqrt{\frac{x'^2 + 1}{2g(z_A - z)}} dz \end{aligned}$$

Die zu variierende Funktion ist damit

$$f(z, x, x') = \sqrt{\frac{x'^2 + 1}{2g(z_A - z)}}$$

mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x'} &= \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{x'^2 + 1}{2g(z_A - z)} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x'^2 + 1}{2g(z_A - z)} \right)^{-1/2} \frac{2x'}{2g(z_A - z)} \\ &= \left(\frac{2g(z_A - z)}{x'^2 + 1} \right)^{1/2} \frac{x'}{2g(z_A - z)} \\ &= \frac{x'}{\sqrt{(x'^2 + 1) \cdot 2g(z_A - z)}} \end{aligned}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung für das Problem ist

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial x'}\,dy &= 0\\
\int \frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial x'}\,dy &= 0\\
\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x'} &= C\\
\frac{x'}{\sqrt{(x'^2+1)\cdot 2g(z_A-z)}} &= C\\
\Leftrightarrow \frac{x'^2}{(x'^2+1)\cdot 2g(z_A-z)} &= C^2\\
\Leftrightarrow x'^2 &= C^2\cdot(x'^2+1)\cdot 2g(z_A-z)\\
\Leftrightarrow x'^2 &= C^2\cdot 2g(z_A-z)x'^2 + C^2\cdot 2g(z_A-z)\\
(1-C^2\cdot 2g(z_A-z))x'^2 &= +C^2\cdot 2g(z_A-z)\\
x' &= \pm\sqrt{\frac{2g(z_A-z)C^2}{1-2g(z_A-z))C^2}}\\
x' &= \pm\sqrt{\frac{2gC^2z_A-2gC^2gz}{1-2gC^2z_A+2gC^2z}}\\
x' &= \pm\sqrt{\frac{z_A-z}{\frac{1-2gC^2z_A}{2gC^2}+z}}\\
x' &= \pm\sqrt{\frac{z_A-z}{\frac{1}{2gC^2}-z_A+z}}
\end{aligned}
$$

Die Lösung dieser DGL erhält man durch direkte Integration:

$$
x - x_A = \pm\int_{z_A}^{z}\sqrt{\frac{z_A-z}{\frac{1}{2gC^2}-z_A+z}}\,dz
$$

Dieses Integral läßt sich am einfachsten mit der Substitution $z = z_A - \frac{1}{4gC^2}(1-\cos\alpha)$ berechnen. Dabei sind:

$$
\begin{aligned}
dz &= \frac{d}{d\alpha}\left(z_A - \frac{1}{4gC^2}(1-\cos\alpha)\right)d\alpha\\
dz &= -\frac{1}{4gC^2}\sin\alpha\,d\alpha
\end{aligned}
$$

und die Grenzen

$$
\begin{aligned}
z_A &= z_A - \frac{1}{4gC^2}(1-\cos\alpha_A)\\
\Leftrightarrow 0 &= 1-\cos\alpha_A\\
\Leftrightarrow \alpha_A &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z &= z_A - \frac{1}{4gC^2}(1-\cos\alpha)\\
\Leftrightarrow 4gC^2(z-z_A) &= 1-\cos\alpha_A\\
\Leftrightarrow \alpha &= \arccos(1-4gC^2(z-z_A))
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
z_A - z &= \frac{1}{4gC^2}(1-\cos\alpha) \\
\frac{1}{2gC^2} - z_A + z &= \frac{1}{2gC^2} - \frac{1}{4gC^2}(1-\cos\alpha) \\
&= \frac{1}{4gC^2}(1+\cos\alpha) \\
&= \frac{1}{4gC^2}\frac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha)} \\
&= \frac{1}{4gC^2}\frac{\sin^2\alpha}{(1-\cos\alpha)}
\end{aligned}
$$

Das Integral ist nun

$$
\begin{aligned}
x - x_A &= \pm\int_0^\alpha \sqrt{\frac{\frac{1}{4gC^2}(1-\cos\alpha)}{\frac{1}{4gC^2}\frac{\sin^2\alpha}{(1-\cos\alpha)}}}\frac{-1}{4gC^2}\sin\alpha\, d\alpha \\
x - x_A &= \mp\frac{1}{4gC^2}\int_0^\alpha 1-\cos\alpha\, d\alpha \\
x &= x_A \mp \frac{\alpha-\sin\alpha}{4gC^2}
\end{aligned}
$$

Das $\mp$Vorzeichen dieser Funktion ist belanglos, da $\alpha - \sin\alpha$ symmetrisch ist:

$$
x = x_A + \frac{\alpha-\sin\alpha}{4gC^2}
$$

C^2 müsste so gewählt werden, dass

$$
x_B = x_A + \frac{\alpha_B - \sin\alpha_B}{4gC^2}
$$

mit

$$
\alpha_B = \arccos(1 - 4gC^2(z_B - z_A))
$$

erfüllt ist.

Aufgabe 2

3 P

Inhomogener Oszillator

In der letzten Übungsstunde wurde die Lösung inhomogener Differentialgleichungen mittels GREENscher Funktionen in einem Refrat vorgestellt. In dieser Aufgabe soll diese tolle Verfahren ausprobiert werden: Ein gedämpfter harmonischer Oszillator wird für eine Zeit τ mit einer konstanten Kraft F_0 angetrieben. Vor dieser Anregung befand sich der Oszillator in Ruhe.

Oszillatorgleichung:

$$
m\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \cdot (\theta(t) - \theta(t-\tau))
$$

HEAVISIDEsche Sprungfunktion:

$$
\theta(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t')\, dt' = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}
$$

GREENS Funktion für den gedämpften harmonischen Oszillator im Schwing- und Kriechfall:

$$G(t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

sowie im aperiodischen Grenzfall:

$$G(t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{t}{m} e^{\lambda t} & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

mit

$$\lambda_{1/2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2} \qquad \lambda = -b$$

2.a) Berechne $x(t)$ für alle Fälle.

(a) $x(t)$ für Schwing- und Kriechfall

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^\infty G(t')F(t-t')\,dt' \\
x(t) &= \int_0^\infty \frac{e^{\lambda_1 t'} - e^{\lambda_2 t'}}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} F_0 \cdot (\theta(t-t') - \theta(t-t'-\tau))\ dt' \\
x(t) &= \frac{F_0}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \int_0^\infty \left(e^{\lambda_1 t'} - e^{\lambda_2 t'}\right) (1 - \theta(t'-t) - 1 + \theta(t'-t+\tau))\ dt' \\
x(t) &= \frac{F_0}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \int_0^\infty \left(e^{\lambda_1 t'} - e^{\lambda_2 t'}\right) (\theta(t'-t+\tau) - \theta(t'-t))\ dt'
\end{aligned}$$

Integral über die Sprungfunktion:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty f(t)\theta(t-t_1)\,dt &= \int_{t_1}^\infty f(t)\,dt \ = \ F(t)|_{t_1}^\infty \\
\int_0^\infty f(t)\theta(t-t_1)\,dt &= \begin{cases} \int_0^\infty f(t)\,dt \ = \ F(t)|_0^\infty & \text{für } t_1 < 0 \\ \int_{t_1}^\infty f(t)\,dt \ = \ F(t)|_{t_1}^\infty & \text{für } t_1 > 0 \end{cases} \\
\int_0^\infty f(t)\,(\theta(t-t_1) - \theta(t-t_2))\ dt &= \begin{cases} \int_0^{t_2} f(t)\,dt \ = \ F(t)|_0^{t_2} & \text{für } t_1 < 0 \\ \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt \ = \ F(t)|_{t_1}^{t_2} & \text{für } t_1 > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Für die Integration muss also eine Fallunterscheidung gemacht werden:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{F_0}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot \begin{cases} \int_0^t \left(e^{\lambda_1 t'} - e^{\lambda_2 t'}\right) dt' & \text{für } t - \tau < 0 \\ \int_{t-\tau}^t \left(e^{\lambda_1 t'} - e^{\lambda_2 t'}\right) dt' & \text{für } t - \tau > 0 \end{cases} \\
x(t) &= \frac{F_0}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot \begin{cases} \left.\frac{1}{\lambda_1} e^{\lambda_1 t'} - \frac{1}{\lambda_2} e^{\lambda_2 t'}\right|_0^t & \text{für } t < \tau \\ \left.\frac{1}{\lambda_1} e^{\lambda_1 t'} - \frac{1}{\lambda_2} e^{\lambda_2 t'}\right|_{t-\tau}^t & \text{für } t > \tau \end{cases} \\
x(t) &= \frac{F_0}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot \begin{cases} \frac{1}{\lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \frac{1}{\lambda_2} e^{\lambda_2 t} - \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} & \text{für } t < \tau \\ \frac{1}{\lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \frac{1}{\lambda_2} e^{\lambda_2 t} - \frac{1}{\lambda_1} e^{\lambda_1 (t-\tau)} + \frac{1}{\lambda_2} e^{\lambda_2 (t-\tau)} & \text{für } t > \tau \end{cases} \\
x(t) &= \frac{F_0}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot \begin{cases} \frac{e^{\lambda_1 t} - 1}{\lambda_1} - \frac{e^{\lambda_2 t} - 1}{\lambda_2} & \text{für } t < \tau \\ \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_1 (t-\tau)}}{\lambda_1} - \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_2 (t-\tau)}}{\lambda_2} & \text{für } t > \tau \end{cases} \\
x(t) &= \frac{F_0}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot \begin{cases} \lambda_1^{-1}(1 - e^{-\lambda_1 t}) e^{\lambda_1 t} - \lambda_2^{-1}(1 - e^{-\lambda_2 t}) e^{\lambda_2 t} & \text{für } t < \tau \\ \lambda_1^{-1}(1 - e^{-\lambda_1 \tau}) e^{\lambda_1 t} - \lambda_2^{-1}(1 - e^{-\lambda_2 \tau}) e^{\lambda_2 t} & \text{für } t > \tau \end{cases}
\end{aligned}$$

Es ist jedoch zu beachten, dass $x(t) = 0$ für $t < 0$ gilt. Deshalb ist die vollständige Beschreibung:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \lambda_1^{-1}(e^{\lambda_1 t} - 1) - \lambda_2^{-1}(e^{\lambda_2 t} - 1) & \text{für } 0 < t < \tau \\ \lambda_1^{-1}e^{\lambda_1 t}(1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \lambda_2^{-1}e^{\lambda_2 t}(1 - e^{-\lambda_2 \tau}) & \text{für } t > \tau \end{cases}$$

oder

$$x(t) = \frac{F_0\theta(t)}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(\lambda_1^{-1}e^{\lambda_1 t}(1 - e^{-\lambda_1 \min(t,\tau)}) - \lambda_2^{-1}e^{\lambda_2 t}(1 - e^{-\lambda_2 \min(t,\tau)})\right)$$

(b) $x(t)$ für den aperiodischen Grenzfall:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^\infty G(t')F(t-t')\,dt' \\ x(t) &= \int_0^\infty \frac{t}{m}e^{\lambda t}F_0 \cdot (\theta(t-t') - \theta(t-t'-\tau))\,dt' \\ x(t) &= \frac{F_0}{m}\int_0^\infty te^{\lambda t}\,(\theta(t'-t+\tau) - \theta(t'-t))\,dt' \end{aligned}$$

Es muss wieder eine Fallunterscheidung gemacht werden:

$$x(t) = \frac{F_0}{m} \cdot \begin{cases} \int_0^t te^{\lambda t}\,dt' & \text{für } t < \tau \\ \int_{t-\tau}^t te^{\lambda t}\,dt' & \text{für } t > \tau \end{cases}$$

Integral Nr. 448

$$\int xe^{ax} = \frac{ax-1}{a^2}e^{ax}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m} \cdot \begin{cases} \left.\frac{\lambda t'-1}{\lambda^2}e^{\lambda t'}\right|_0^t & \text{für } t < \tau \\ \left.\frac{\lambda t'-1}{\lambda^2}e^{\lambda t'}\right|_{t-\tau}^t & \text{für } t > \tau \end{cases} \\ x(t) &= \frac{F_0}{m\lambda^2} \cdot \begin{cases} (\lambda t - 1)\,e^{\lambda t} + 1 & \text{für } t < \tau \\ (\lambda t - 1)\,e^{\lambda t} - (\lambda t - \lambda\tau - 1)\,e^{\lambda(t-\tau)} & \text{für } t > \tau \end{cases} \end{aligned}$$

Es ist wieder zu beachten, dass $x(t) = 0$ für $t < 0$ gilt. Deshalb ist die vollständige Beschreibung:

$$x(t) = \frac{F_0}{m\lambda^2} \cdot \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ (\lambda t - 1)\,e^{\lambda t} + 1 & \text{für } 0 < t < \tau \\ (\lambda t - 1)\,e^{\lambda t} - (\lambda t - \lambda\tau - 1)\,e^{\lambda(t-\tau)} & \text{für } t > \tau \end{cases}$$

oder

$$x(t) = \frac{F_0\theta(t)}{m\lambda^2}\left((\lambda t - 1)\,e^{\lambda t} + (1 - \theta(t-\tau)) - (\lambda t - \lambda\tau - 1)\,e^{\lambda(t-\tau)}\theta(t-\tau)\right)$$

2.b) Diskutiere $x(t)$ für die Zeitintervalle $t < 0$, $0 \leq t \leq \tau$ und $t > \tau$.

Für $t < 0$ ist der Oszillator immer in Ruhe, was auch den Anfangsbedingungen entspricht. Bei $t = 0$ wird er durch die Kraft ausgelenkt. Anschließent schwingt (oder kricht) er sich

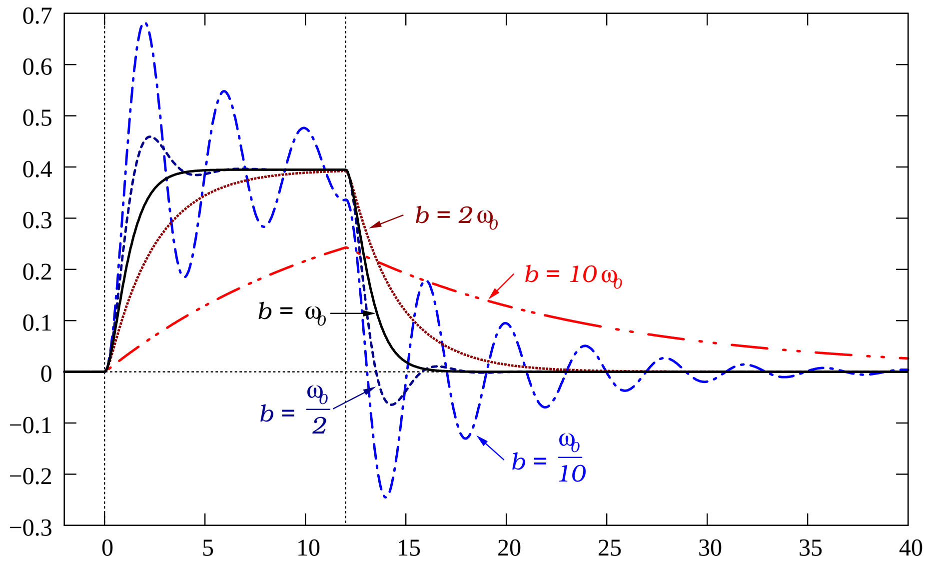


Abbildung 1: Auslenkung eines gedämften harmonischen Oszillator, der durch einen Rechteckkraftstoß angeregt wird in Abhängigkeit von der Zeit. Parameter: $F_0 = 1\,\mathrm{N}$, $\tau = 12\,\mathrm{s}$, $w_0 = 5/\pi\,\mathrm{s}^{-1}$, $m = 1\,\mathrm{kg}$ und $x_\infty = \pi^2/25 = 0.395$

auf eine konstante Auslenkung x_∞ ein. Dabei nähert er sich x_∞ um so schneller je kleiner $b^2 - \omega_0^2$ ist. Die Auslenkung x_∞ ist der Grenzwert für $t = \tau \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
x_\infty &= \lim_{t\to\infty} \frac{F_0}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(\lambda_1^{-1}(e^{\lambda_1 t} - 1) - \lambda_2^{-1}(e^{\lambda_2 t} - 1)\right) \\
x_\infty &= \lim_{t\to\infty} \frac{F_0}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(\lambda_1^{-1}(e^{-bt} e^{\sqrt{b^2-\omega_0^2}t} - 1) - \lambda_2^{-1}(e^{-bt} e^{-\sqrt{b^2-\omega_0^2}t} - 1)\right) \\
x_\infty &= \frac{F_0}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(-\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) \qquad \text{da}\, b > 0 \\
x_\infty &= \frac{F_0}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2}\right) \\
x_\infty &= \frac{F_0}{m\lambda_1\lambda_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_1\lambda_2 &= \left(-b + \sqrt{b^2 - \omega_0^2}\right)\left(-b - \sqrt{b^2 - \omega_0^2}\right) \\
\lambda_1\lambda_2 &= b^2 - (b^2 - \omega_0^2) \;=\; \omega_0^2
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow x_\infty = \frac{F_0}{m\omega_0^2}
$$

Nach dem zur Zeit $t = \tau$ die Kraft aufgehöhrt hat zu wirken schwingt sich der Oszillator wieder in die Ruhelage ein.

Aufgabe 3

3 P

Perle am rotierenden Ring

Eine Perle der Masse m kann reibungslos auf einem Ring mit dem Radius R gleiten. Nun soll die

Bewegung der Perle im Schwerefeld $\vec{g}$ untersucht werden, wenn sich der Ring um eine Drehachse parallel zu $\vec{g}$ dreht. Die Drehachse soll oben und unten durch den Ring gehen.

3.a) Formuliere die Zwangsbedingungen.

Die x- und y-Koordinaten der Perle sind durch die Drehbewegung miteinander verknüpft:

$$\frac{y}{x} = \tan \omega t$$

(das ist eine holonom-rheonome Zwangsbedingung). Die Perle kann sich nur auf der Kugeloberfläche bewergen, die durch die Drehbewegung des Ringes aufgespannt wird.

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

(das ist eine holonom-skeleronome Zwangsbedingung). Die Perle hat also nur einen Freiheitsgrad, der durch am besten durch den Winke ϑ dargestellt werden kann ($q = \vartheta$). Die karthesischen Koordinaten können durch Kugelkoordinaten dargestellt werden:

$$\begin{aligned} x &= R \sin\vartheta \cos\omega t & \dot{x} &= R\dot{\vartheta} \cos\vartheta \cos\omega t - R\omega \sin\vartheta \sin\omega t \\ y &= R \sin\vartheta \sin\omega t & \dot{y} &= R\dot{\vartheta} \cos\vartheta \sin\omega t + R\omega \sin\vartheta \cos\omega t \\ z &= R \cos\vartheta & \dot{z} &= -R\dot{\vartheta} \sin\vartheta \end{aligned}$$

3.b) Wie lautet die LAGRANGEsche Bewegungsgleichung

Kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\vec{v}^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) \\ T &= \frac{m}{2}R^2\left(\dot{\vartheta}^2 \cos^2\vartheta \cos^2\omega t - 2\dot{\vartheta}\omega \cos\vartheta \cos\omega t \sin\vartheta \sin\omega t + \omega^2 \sin^2\vartheta \sin^2\omega t\right) \\ &+ \frac{m}{2}R^2\left(\dot{\vartheta}^2 \cos^2\vartheta \sin^2\omega t + 2\dot{\vartheta}\omega \cos\vartheta \sin\omega t \sin\vartheta \cos\omega t + \omega^2 \sin^2\vartheta \cos^2\omega t\right) \\ &+ \frac{m}{2}R^2\dot{\vartheta}^2 \sin^2\vartheta \\ T &= \frac{m}{2}R^2\left(\dot{\vartheta}^2 \cos^2\vartheta + \omega^2 \sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2 \sin^2\vartheta\right) \\ T &= \frac{m}{2}R^2\left(\omega^2 \sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2\right) \end{aligned}$$

Die kinetische Energie setzt sich der Rotation um die z-Achse und der Bewegung auf dem Ring zusammen. Und die potentielle Energie ist nur durch die Schwerkraft gegeben:

$$U = -mgz = mgR \cos\vartheta$$

⇒ die LAGRANGEfunktion:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T - U \\ &= \frac{m}{2}R^2\left(\omega^2 \sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2\right) - mgR \cos\vartheta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vartheta}} &= \frac{d}{dt}\frac{m}{2}R^2 2\dot{\vartheta} = mR^2\ddot{\vartheta} \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vartheta} &= \frac{m}{2}R^2\omega^2 2 \sin\vartheta \cos\vartheta + mgR \sin\vartheta \\ &= mR^2(\omega^2 \cos\vartheta + \frac{g}{R}) \sin\vartheta \end{aligned}$$

Damit sind die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vartheta}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vartheta} &= 0 \\ \ddot{\vartheta} &= (\omega^2 \cos\vartheta + \frac{g}{R}) \sin\vartheta \end{aligned}$$

3.c) Integriere die Bewegungsgleichung für kleine ϑ.

Für kleine ϑ gilt:

$$\begin{aligned}\cos\vartheta &\approx 1\\ \sin\vartheta &\approx \vartheta\end{aligned}$$

Damit ist die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vartheta} = (\omega^2 + \frac{g}{R})\vartheta$$

Das ist die Gleichung eines ungedämpften harmonischen Oszillators mit der Eigenfrequenz $\omega_0^2 = \omega^2 + \frac{g}{R}$. Die allgemeine Lösung dieses Problems ist

$$\vartheta = \mathcal{A}\cos\omega_0 t + \mathcal{B}\sin\omega_0 t = \mathcal{C}e^{i\omega_0 t + i\varphi}$$