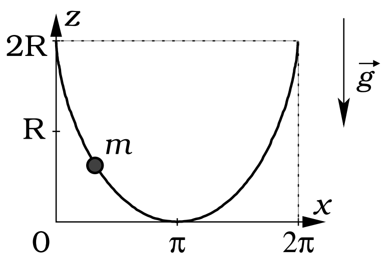
Übungsblatt 7

Lösungsvorschlag
4 Aufgaben, 11 Punkte

Aufgabe 1

3 P

Zykloidenpendel



Eine Perle gleitet unter Einfluss der Schwerkraft $g\vec{e}_z$ reibungsfrei auf einem Draht. Dieser ist als Zykloide geformt, d.h. die Bahn der Perle genügt den Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= R(\alpha - \sin\alpha) \\ z &= R(1 + \cos\alpha) \qquad \text{mit } 0 \leq \alpha \leq 2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= R(\alpha - \sin\alpha) & \dot{x} &= R(\dot\alpha - \dot\alpha\cos\alpha) \\ y &= 0 & \dot{y} &= 0 \\ z &= R(1+\cos\alpha) & \dot{z} &= -R\dot\alpha\sin\alpha \end{aligned}$$

1.a) Stelle die LAGRANGEfunktion auf.

kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}mR^2\left(\dot\alpha^2 - 2\dot\alpha^2\cos\alpha + \dot\alpha^2\cos^2\alpha + \dot\alpha^2\sin^2\alpha\right) \\ &= \frac{1}{2}mR^2\left(2\dot\alpha^2 - 2\dot\alpha^2\cos\alpha\right) \\ &= mR^2(1-\cos\alpha)\,\dot\alpha^2 \end{aligned}$$

potentielle Energie:

$$U = mgz = mgR(1+\cos\alpha)$$

LAGRANGEfunktion:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T - U \\ &= mR^2(1-\cos\alpha)\,\dot\alpha^2 - mgR(1+\cos\alpha) \\ &= mR\,(1+\cos\alpha)\left(R\dot\alpha^2 + g\right) \end{aligned}$$

1.b) Bestimme $\ddot{u}$ für $u = \sin\frac{\varphi(t)}{2}$

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{2}\dot\varphi\cos\frac{\varphi}{2} \\ \ddot{u} &= \frac{1}{2}\ddot\varphi\cos\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\dot\varphi^2\sin\frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

1.c) Bestimme die Bewegungsgleichung der Perle.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\alpha} &= \frac{d}{dt}2mR^2\left(1+\cos\alpha\right)\dot\alpha \\
&= 2mR^2\left(\ddot\alpha\left(1+\cos\alpha\right)-\dot\alpha^2\sin\alpha\right) \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} &= -mR\sin\alpha\left(R\dot\alpha^2+g\right)
\end{aligned}$$

Damit erhält man die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}
2\ddot\alpha\left(1+\cos\alpha\right)-2\dot\alpha^2\sin\alpha+\left(\dot\alpha^2+\frac{g}{R}\right)\sin\alpha &= 0 \\
2\ddot\alpha\left(1+\cos\alpha\right)-\left(\frac{g}{R}-\dot\alpha^2\right)\sin\alpha &= 0
\end{aligned}$$

mit

$$(1+\cos\varphi)=2\cos^2\frac{\varphi}{2} \qquad \sin\varphi=2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

kann man die Bewegungsgleichung als

$$2\ddot\alpha\cos\frac{\alpha}{2}-\dot\alpha^2\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{g}{R}\sin\frac{\alpha}{2} = 0$$

schreiben. Substituiert man $u=\sin\frac{\alpha}{2}$ erhält man die einfache Form:

$$\ddot u-\frac{g}{4R}u = 0$$

1.d) Löse die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen $z(0)=z_0$ und $\dot\alpha(0)=0$

Das ist die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators. Die Allgemeine Lösung ist

$$u = \mathcal{A}\sin(\omega t)+\mathcal{B}\cos(\omega t)$$

bzw.

$$\alpha = 2\arcsin(\mathcal{A}\sin(\omega t)+\mathcal{B}\cos(\omega t))$$

mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{4R}}$$

Anfangsbedingung $\dot\alpha(0)=0$:

$$\begin{aligned}
\dot\alpha(t) &= \frac{d}{dt}2\arcsin(\mathcal{A}\sin(\omega t)+\mathcal{B}\cos(\omega t)) \\
& \quad 2\frac{\mathcal{A}\cos(\omega t)-\mathcal{B}\sin(\omega t)}{\sqrt{1-\left(\mathcal{A}\sin(\omega t)+\mathcal{B}\cos(\omega t)\right)^2}} \\
\dot\alpha(0) &= 2\frac{\mathcal{A}}{\sqrt{1-\mathcal{B}^2}} = 0 \\
\Leftrightarrow \mathcal{A} &= 0
\end{aligned}$$

Anfangsbedingung $z(0)=z_0$, $\alpha(0)=\alpha_0$:

$$\begin{aligned}
z_0 &= R(1+\cos\alpha_0) \\
\Leftrightarrow \alpha_0 &= \arccos\left(\frac{z_0}{R}-1\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha(0) &= 2\arcsin(\mathcal{B})) \\
\Leftrightarrow \mathcal{B} &= 2\sin\alpha_0 \\
\mathcal{B} &= 2\sin\left(\arccos\left(\frac{z_0}{R}-1\right)\right)
\end{aligned}
$$

mit

$$
\sin(\arccos x) = -x+\frac{\pi}{2} \qquad \text{für } -1 \leq x \leq 1
$$

er hält man

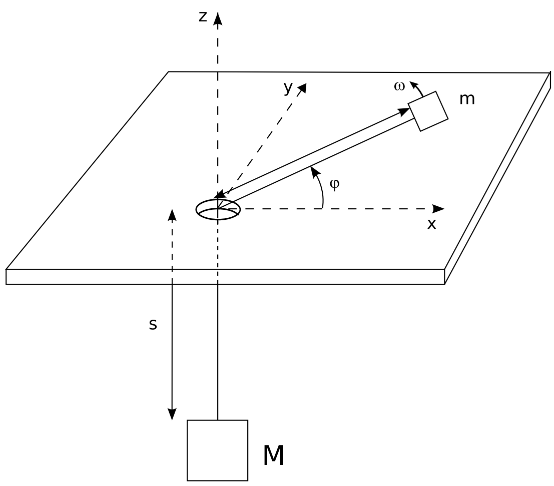
$$
\mathcal{B} = 2\left(\frac{z_0}{R}-1\right) \qquad \text{für } 0 \leq \frac{z_0}{R} \leq 2
$$

1.e) Berechne die Dauer einer Periode T in Abhängigkeit von der Auslenkung z_0 bei $\dot{\alpha}(0)=0$.

Aufgabe 2

3 P

Kraft einer rotierenden Masse



Eine Masse m rotiert reibungslos auf einer Tischplatte. Über einen Faden der Länge l $(l=r+s)$, der durch ein Loch in der Platte veräuft, ist m mit einer anderen Masse M verbunden. Es ist die Bewegung von m und M unter Einfluß der Schwerkraft $g\vec{e}_z$ zu untersuchen.

2.a) Formuliere und klassifiziere die Zwangsbedingungen.

Es gibt vier holonom-skleronome Zwangsbediengungen:

$$
\begin{aligned}
l &= r+s \\
z &= 0 \\
X &= 0 \\
Y &= 0
\end{aligned}
$$

2.b) Stelle die LAGRANGEfunktion und ihre Bewegungsgleichung auf.

Bei vier Zwangsbediengungen bleiben $6-4=2$ Freiheitsgrade. Wir brauchen also zwei generalisierte Koordinaten

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \varphi \\
q_2 &= s
\end{aligned}
$$

Die Transformation ist:

$$
\begin{aligned}
x &= r\,\cos(\varphi) \;=\; (l-s)\,\cos(\varphi) \\
y &= r\,\sin(\varphi) \;=\; (l-s)\,\sin(\varphi) \\
Z &= -s
\end{aligned}
$$

mit den Ableitungen

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -\dot{s}\,\cos(\varphi) - (l-s)\dot{\varphi}\,\sin(\varphi) \\
\dot{y} &= -\dot{s}\,\sin(\varphi) + (l-s)\dot{\varphi}\,\cos(\varphi) \\
\dot{Z} &= -\dot{s}
\end{aligned}
$$

Kinetische Energie:

$$
T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}M\dot{Z}^2 \;=\; \frac{1}{2}(m+M)\dot{s}^2 + \frac{1}{2}m(l-s)^2\dot{\varphi}^2
$$

Potentielle Energie:

$$
V = MgZ \;=\; -Mgs
$$

LAGRANGEfunktion:

$$
\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}(m+M)\dot{s}^2 + \frac{1}{2}m(l-s)^2\dot{\varphi}^2 + Mgs
$$

Wir erkennen, daß die Koordinate φ zyklisch ist, d.h. dass die LAGRANGEfunktion nur von ihrer Ableitung $\dot{\varphi}$ abhängt. Dies bedeutet:

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \;=\; m(l-s)^2\dot{\varphi} \;=\; \text{const} \;=\; J\,\dot{\varphi} \;=\; L_0
$$

$$
\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{L_0}{m(l-s)^2} \;=\; \omega
$$

Dies ist der Drehimpulserhaltungssatz. Es sind zwar $J = J(t)$ und $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t)$ zeitlich verä-derliche Größen. Ihr Produkt bleibt jedoch konstant. D.h es ist

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0
$$

Für die zweite Koordinate $q_2 = s$ stellen wir die LAGRANGEsche Bewegungsgleichung auf:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} &= (m+M)\ddot{s} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} &= -m(l-s)\dot{\varphi}^2 + M\,g \;=\; -\frac{L_0^2}{m(l-s)^3} + M\,g
\end{aligned}
$$

Also ist die Bewegungsgleichung:

$$
(m+M)\ddot{s} + \frac{L_0^2}{m(l-s)^3} - Mg = 0 \tag{1}
$$

mit

$$
L_0 = m(l-s)^2\omega
$$

oder

$$\ddot{s} + \frac{m\omega^2}{(m+M)(l-s)} - \frac{Mg}{m+M} g \;=\; 0$$

Wenn die Gleichung (1) mit $\dot{s}$ multipliziert und integriert wird

$$\begin{aligned}
\int (m+M)\ddot{s}\dot{s}\,ds + \int \frac{L_0^2 \dot{s}}{m(l-s)^3}\,ds - \int Mg\dot{s}\,ds &= 0 \\
\frac{1}{2}(m+M)\dot{s}^2 - Mgs + \frac{L_0^2}{2m(l-s)^2} &= \mathrm{const}
\end{aligned}$$

sieht man die Energieerhaltung:

$$T + U + V \;=\; E \;=\; \mathrm{const}$$

2.c) Unter welchen Bedingungen rutscht die Masse M nach oben, wann nach unten?

Wenn die beiden Massen im Gleichgewicht sind, muss $\ddot{s} = 0$ gelten. Dann ist die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}
\frac{L_0^2}{m(l-s)^3} &= M\,g \\
\Rightarrow s &= l - \sqrt[3]{\frac{L_0^2}{Mm\,g}} \;=\; s_0 \;=\; \mathrm{const}
\end{aligned}$$

Die Winkelgeschwingigkeit ω_0, bei der $\ddot{s}$ verschwindet ist

$$\omega_0 \;=\; \dot{\varphi}_0 \;=\; \frac{L_0}{m(l-s_0)^2} \;=\; \sqrt{\frac{M\,g}{m(l-s_0)}}$$

Aus der Bewegungsgleichung kann man ablesen:

$$\begin{array}{lllll}
\dot{\varphi} > \omega_0 & \Leftrightarrow \; \ddot{s} < 0 & \Leftrightarrow \; \ddot{Z} > 0 & \Rightarrow & M \text{ wird nach oben gezogen} \\
\dot{\varphi} < \omega_0 & \Leftrightarrow \; \ddot{s} < 0 & \Leftrightarrow \; \ddot{Z} < 0 & \Rightarrow & M \text{ rutscht nach unten}
\end{array}$$

2.d) Diskutiere den Spezialfall $\omega = 0$.

Für $\omega = 0$ ist verschwindet auch der Drehimpuls L_0. Die Bewegungsgleichung ist damit

$$\ddot{s} = \frac{M}{m+M}\,g$$

Das ist der verzögerte, freie Fall der Masse M.

Aufgabe 3

2 P

Zwangsbedingungen

3.a) Zeige dass die differentiellen Zwangsbedingungen für das in der Ebene rollende Rad nicht-holonom sind.

Fährt das Rad auf der $x_1 - x_2$-Ebene, so gilt die Zwangsbedingung:

$$\begin{aligned}
\cos\vartheta(x_1,x_2)\,dx_1 + \sin\vartheta(x,y)\,dx_2 &= 0 \\
\Leftrightarrow dx_1 - \tan\vartheta(x_1,x_2)\,dx_2 &= 0
\end{aligned}$$

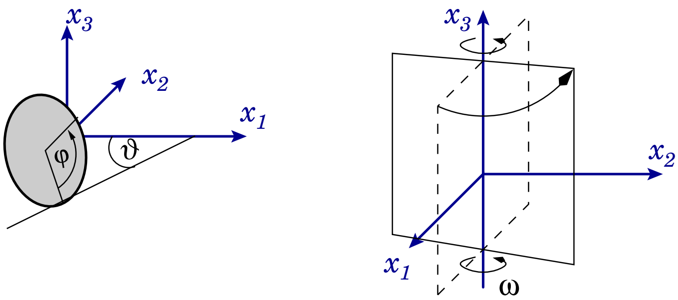


Abbildung 1: Rad (links) und rotierende Ebene.

Die allgemeine Formel für Differentielle ZB:

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dx_i - a_{it} dt \quad = \quad 0$$

hier:

$$a_{11} - 1 = \qquad a_{12} = \tan\varphi(x_1, x_2) \qquad a_{1t} = 0$$

Die Zwangsbedingungen sind integrabel, wenn die Ableitungen vertauschen:

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l} = \frac{\partial a_{il}}{\partial x_j} \qquad\qquad \frac{\partial a_{it}}{\partial x_j} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{11}}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial a_{12}}{\partial x_1} &= \frac{1}{\cos^2\varphi(x_1, x_2)} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{aligned}$$

Die beiden Ableitungen vertauschen nicht, deshalb ist die Zwangsbedingung nicht integrabel.

3.b) Überprüfe die Integrabilitätsbedingung für die Zwangsbedingung einer uniform rotierenden schiefen Ebene. Die Rotationsachse liegt in der Ebene.

$$\begin{aligned} f_1 &= \sin(\omega t)\, x_1 - \cos(\omega t)\, x_2 \\ \Leftrightarrow f_1 &= \tan(\omega t)\, x_1 - x_2 \; = \; 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \tan(\omega t) \qquad \tfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = -1 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\omega x_1}{\cos^2(\omega t)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0 = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial t} &= 0 = \frac{\partial^2 f_1}{\partial t \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial t} &= \frac{\omega}{\cos^2(\omega t)} \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial t \partial x_1} &= \frac{\omega}{\cos^2(\omega t)} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial t} \end{aligned}$$

Alle Ableitungen vertauschen. Das bedeutet, das die Zwangsbedingung holonam ist. Das ist auch zu erwarten, da $f_1(x_1, x_2, t) = 0$ existiert.

Aufgabe 4

3 P

Krummlinige Koordinatensysteme

Viele Probleme in der Physik lassen sich durch die Wahl geeigneter krummliniger Koordinaten wesentlich vereinfachen. Am haufig sind Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten geeignet, da viele physikalische Probleme zylinder- oder kugelsymmetrisch sind. In dieser Aufgabe soll die Bewegung eines Massenpunkts in diesen Darstellungen bestimmt werden. Die dadurch gewonnen Erkenntnisse können sicher bei einigen Problemen gut zu gebrauchen sein.

4.a) Zylinderkoordinaten:

(a) Stelle den Ort eines Massenpunktes in Zylinderkoordinaten (Einheitsvektoren) dar.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi &= \tan\tfrac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= r\,\cos\varphi \\ y &= r\,\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

Einheitsvektoren:

$$\begin{aligned} \vec{e}_z &= \vec{e}_z \\ \vec{e}_r &= \vec{e}_x \cos\varphi + \vec{e}_y \sin\varphi \\ \vec{e}_\varphi &= \vec{e}_z \times \vec{e}_r \\ &= \vec{e}_z \times \vec{e}_x \cos\varphi + \vec{e}_z \times \vec{e}_y \sin\varphi \\ &= \vec{e}_y \cos\varphi - \vec{e}_x \sin\varphi \end{aligned}$$

Der Ort eines Punktes in Zylinderkoordinaten ist

$$\vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

(b) Berechne die Ableitung der Einheitsvektoren allgemein.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_z &= \vec{e}_z \\ \dot{\vec{e}}_r &= \frac{d}{dt}\vec{e}_x \cos\varphi + \frac{d}{dt}\vec{e}_y \sin\varphi \\ &= -\dot{\varphi}\vec{e}_x \sin\varphi + \dot{\varphi}\vec{e}_y \cos\varphi \\ &= -\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\ \dot{\vec{e}}_\varphi &= \frac{d}{dt}\vec{e}_y \cos\varphi - \frac{d}{dt}\vec{e}_x \sin\varphi \\ &= -\dot{\varphi}\vec{e}_y \sin\varphi - \dot{\varphi}\vec{e}_x \cos\varphi \\ &= -\dot{\varphi}\vec{e}_r \end{aligned}$$

(c) Berechne Geschwindigkeit und kinetische Energie eines beliebig beschleunigten Massenpunktes.

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{\vec{r}} \\ &= \frac{d}{dt}\left(r\vec{e}_r + \dot{z}\vec{e}_z\right) \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r + \dot{z}\vec{e}_z \\ &= \dot{r}\vec{e}_r - r\dot{\varphi}\vec{e}_r + \dot{z}\vec{e}_z \\ T &= \frac{m}{2}\vec{v}^2 \\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{r}\vec{e}_r - r\dot{\varphi}\vec{e}_r + \dot{z}\vec{e}_z\right)^2 \\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) \end{aligned}$$

(d) Berechne Geschwindigkeit und kinetische Energie eines Massenpunktes, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t)$ und der Geschwindigkeit $\dot{z}$auf einem Zylindermantel bewegt.
Hier kann das Ergebnis der vorherigen Aufgabe übernommen werden, wenn

$$r(t) = R = \text{konst} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{r} = 0$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= -r\dot{\varphi}\vec{e}_r + \dot{z}\vec{e}_z \\ T &= \frac{m}{2}\left(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) \end{aligned}$$

4.b) Kugelkoordinaten:

(a) Stelle den Ort eines Massenpunktes in Kugelkoordinaten (Einheitsvektoren) dar.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi &= \tan\tfrac{y}{x} \\ \vartheta &= \tan\tfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= r\,\cos\varphi\,\sin\vartheta \\ y &= r\,\sin\varphi\,\sin\vartheta \\ z &= r\,\cos\vartheta \end{aligned}$$

Einheitsvektoren:

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \vec{e}_x\cos\varphi\,\sin\vartheta + \vec{e}_y\sin\varphi\,\sin\vartheta + \vec{e}_z\cos\vartheta \\ \vec{e}_\varphi &= -\vec{e}_x\sin\varphi + \vec{e}_y\cos\varphi \\ \vec{e}_\vartheta &= \vec{e}_\varphi\times\vec{e}_r \\ &= \vec{e}_y\times\vec{e}_x\cos^2\varphi\,\sin\vartheta + \vec{e}_y\times\vec{e}_z\cos\varphi\,\cos\vartheta - \vec{e}_x\times\vec{e}_y\sin\varphi^2\,\sin\vartheta - \vec{e}_x\times\vec{e}_z\sin\varphi\,\cos\vartheta \\ &= \vec{e}_z(-\cos^2\varphi\,\sin\vartheta - \sin\varphi^2\,\sin\vartheta) + \vec{e}_x\cos\varphi\,\cos\vartheta + \vec{e}_y\sin\varphi\,\cos\vartheta \\ &= \vec{e}_x\cos\varphi\,\cos\vartheta + \vec{e}_y\sin\varphi\,\cos\vartheta - \vec{e}_z\sin\vartheta \end{aligned}$$

Der Ort eines Punktes in Kugelkoordinaten ist

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

(b) Berechne die Ableitung der Einheitsvektoren allgemein.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_r &= \frac{d}{dt}\vec{e}_x\cos\varphi\,\sin\vartheta + \frac{d}{dt}\vec{e}_y\sin\varphi\,\sin\vartheta + \frac{d}{dt}\vec{e}_z\cos\vartheta \\ &= \vec{e}_x\left(\dot{\vartheta}\,\cos\varphi\,\cos\vartheta - \dot{\varphi}\,\sin\varphi\,\sin\vartheta\right) + \vec{e}_y\left(\dot{\vartheta}\,\sin\varphi\,\cos\vartheta + \dot{\varphi}\,\cos\varphi\,\sin\vartheta\right) - \vec{e}_z\sin\vartheta \\ &= \dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\sin\vartheta \\ \dot{\vec{e}}_\vartheta &= \frac{d}{dt}\vec{e}_x\cos\varphi\,\cos\vartheta + \frac{d}{dt}\vec{e}_y\sin\varphi\,\cos\vartheta - \frac{d}{dt}\vec{e}_z\cos\vartheta \\ &= \vec{e}_x\left(-\dot{\vartheta}\,\cos\varphi\,\sin\vartheta - \dot{\varphi}\,\sin\varphi\,\cos\vartheta\right) + \vec{e}_y\left(-\dot{\vartheta}\,\sin\varphi\,\sin\vartheta + \dot{\varphi}\,\cos\varphi\,\cos\vartheta\right) - \vec{e}_z\cos\vartheta \\ &= -\dot{\vartheta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\cos\vartheta \\ \dot{\vec{e}}_\varphi &= -\frac{d}{dt}\vec{e}_x\sin\varphi + \frac{d}{dt}\vec{e}_y\cos\varphi \\ &= -\vec{e}_x\dot{\varphi}\,\cos\varphi - \vec{e}_y\dot{\varphi}\,\sin\varphi \\ &= -\dot{\varphi}\vec{e}_\varrho \end{aligned}$$

mit

$$\vec{e}_\varrho = \vec{e}_x\cos\varphi + \vec{e}_y\sin\varphi$$

betrachte

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_r \sin\vartheta + \vec{e}_\vartheta \cos\vartheta &= \vec{e}_x \cos\varphi\,(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta) + \vec{e}_y \sin\varphi + (\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta) \\
&+ \vec{e}_z(\cos\vartheta\,\sin\vartheta - \sin\vartheta\,\cos\vartheta) \\
&= \vec{e}_x \cos\varphi + \vec{e}_y \sin\varphi \;=\; \vec{e}_\varrho
\end{aligned}
$$

Die Ableitungen der Eintheitsvektoren sind damit:

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{e}}_r &= \dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \sin\vartheta \\
\dot{\vec{e}}_\vartheta &= -\dot{\vartheta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \cos\vartheta \\
\dot{\vec{e}}_\varphi &= -\dot{\varphi}\,(\vec{e}_r \sin\vartheta + \vec{e}_\vartheta \cos\vartheta)
\end{aligned}
$$

(c) Berechne Geschwindigkeit und kinetische Energie eines beliebig beschleunigten Massenpunktes.

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= \dot{\vec{r}} \\
&= \frac{d}{dt} r\vec{e}_r \\
&= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r \\
&= \dot{r}\vec{e}_r + r\left(\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \sin\vartheta\right) \\
T &= \frac{m}{2}\vec{v}^2 \\
&= \frac{m}{2}\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\left(\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \sin\vartheta\right)\right)^2 \\
&= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin\vartheta\right)\right)
\end{aligned}
$$

(d) Berechne Geschwindigkeit und kinetische Energie eines Massenpunktes, der sich mit den Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}(t)$ und $\dot{\vartheta}$ auf einer Kugeloberfläche bewegt.
Hier kann das Ergebnis der vorherigen Aufgabe übernommen werden, wenn

$$
r(t) = R = \text{konst} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{r} = 0
$$

gesetzt wird:

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= r\left(\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \sin\vartheta\right) \\
T &= \frac{m}{2} r^2 \left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta\right)
\end{aligned}
$$