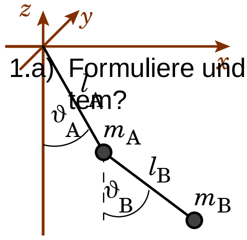
Übungsblatt 8

Lösungsvorschlag
3 Aufgaben, 11 Punkte

Aufgabe 1

4 P

Doppelpendel



In diese Aufgabe ist ein Doppelpendel im Schwerefeld der Erde $g\vec{e}_z$ mit dem LAGRANGEformalismus zu untersuchen.

1.a) Formuliere und klassifiziere die Zwangsbedingungen. Wie vieleFreiheitsgrade hat das System?

$$\begin{aligned}
y_A &= 0 && \text{ignorabel}\\
y_B &= 0 && \text{ignorabel}\\
x_A^2 + z_A^2 - l_A^2 &= 0 && \text{holonom skeleronom}\\
(x_A - x_B)^2 + (z_A - z_B) - l_B^2 &= 0 && \text{holonom skeleronom}
\end{aligned}$$

1.b) Wähle geeignete genaralisierten Koordinaten für das Doppelpendel.

geignete genaralisierten Koordinaten sind die beiden Winkel ϑ_A und ϑ_B mit ihnen lassen sich die (nicht ignorablen) kartesischen Koordinaten und iher Ableitngen darstellen als:

$$\begin{aligned}
x_A &= l_A \sin\vartheta_A & \dot{x}_A &= l_A\dot{\vartheta}_A \cos\vartheta_A\\
z_A &= -l_A \cos\vartheta_A & \dot{z}_A &= l_A\dot{\vartheta}_A \sin\vartheta_A\\
x_B &= l_A \sin\vartheta_A + l_B \sin\vartheta_B & \dot{x}_B &= l_A\dot{\vartheta}_A \cos\vartheta_A + l_B\dot{\vartheta}_B \cos\vartheta_B\\
z_B &= -l_A \cos\vartheta_A - l_B \cos\vartheta_B & \dot{z}_B &= l_A\dot{\vartheta}_A \sin\vartheta_A + l_B\dot{\vartheta}_B \sin\vartheta_B
\end{aligned}$$

1.c) Bestimme die LAGRANGEfunktion des Systems

kinetische Energie:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_A\left(\dot{x}_A^2 + \dot{z}_A^2\right) + \frac{1}{2}m_B\left(\dot{x}_B^2 + \dot{z}_B^2\right)\\
&= \frac{1}{2}m_A l_A^2\dot{\vartheta}_A^2 + \frac{1}{2}m_B l_A^2\dot{\vartheta}_A^2 + \frac{1}{2}m_B l_B^2\dot{\vartheta}_B^2 + m_B l_A\dot{\vartheta}_A\left(\cos\vartheta_A + \cos\vartheta_B\right) l_B\dot{\vartheta}_B\left(\sin\vartheta_A + \sin\vartheta_B\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(m_A + m_B\right) l_A^2\dot{\vartheta}_A^2 + \frac{1}{2}m_B l_B^2\dot{\vartheta}_B^2 + m_B l_A\dot{\vartheta}_A l_B\dot{\vartheta}_B \cos(\vartheta_A - \vartheta_B)
\end{aligned}$$

potentielle Energie:

$$\begin{aligned}
U &= m_A g z_A + m_B g z_B\\
&= -m_A g l_A \cos\vartheta_A - m_B g l_A \cos\vartheta_A - m_B g l_B \cos\vartheta_B\\
&= -\left(m_A + m_B\right) g l_A \cos\vartheta_A - m_B g l_B \cos\vartheta_B
\end{aligned}$$

LAGRANGEfunktion :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= T - U \\ &= \frac{1}{2}(m_A + m_B)\, l_A^2 \dot{\vartheta}_A^2 + \frac{1}{2} m_B l_B^2 \dot{\vartheta}_B^2 + m_B l_A \dot{\vartheta}_A l_B \dot{\vartheta}_B \cos(\vartheta_A - \vartheta_B) \\ &\quad + (m_A + m_B)\, g l_A \cos\vartheta_A + m_B g l_B \cos\vartheta_B\end{aligned}$$

1.d) Leite die Bewegungsgleichungen her.

LAGRANGEgleichung für ϑ_A:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}_A} &= \frac{d}{dt}(m_A + m_B)\, l_A^2 \dot{\vartheta}_A + \frac{d}{dt} m_B l_A l_B \dot{\vartheta}_B \cos(\vartheta_A - \vartheta_B) \\ &= (m_A + m_B)\, l_A^2 \ddot{\vartheta}_A + m_B l_A l_B \left(\ddot{\vartheta}_B \cos(\vartheta_A - \vartheta_B) - \left(\dot{\vartheta}_A \dot{\vartheta}_B - \dot{\vartheta}_B^2\right) \sin(\vartheta_A - \vartheta_B)\right) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta_A} &= -m_B l_A \dot{\vartheta}_A l_B \dot{\vartheta}_B \sin(\vartheta_A - \vartheta_B) - (m_A + m_B)\, g l_A \sin\vartheta_A \\ &= -m_B l_A l_B \dot{\vartheta}_A \dot{\vartheta}_B \sin(\vartheta_A - \vartheta_B) - (m_A + m_B)\, g l_A \sin\vartheta_A\end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichung für ϑ_A ist damit :

$$\begin{aligned}(m_A + m_B)\, l_A^2 \ddot{\vartheta}_A &+ m_B l_A l_B \ddot{\vartheta}_B \cos(\vartheta_A - \vartheta_B) - m_B l_A l_B \dot{\vartheta}_A \dot{\vartheta}_B \sin(\vartheta_A - \vartheta_B) + m_B l_A l_B \dot{\vartheta}_B^2 \sin(\vartheta_A - \vartheta_B) \\ &= -m_B l_A l_B \dot{\vartheta}_A \dot{\vartheta}_B \sin(\vartheta_A - \vartheta_B) - (m_A + m_B)\, g l_A \sin\vartheta_A\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (m_A + m_B)\, l_A^2 \ddot{\vartheta}_A + m_B l_A l_B \ddot{\vartheta}_B \cos(\vartheta_A - \vartheta_B) + m_B l_A l_B \dot{\vartheta}_B^2 \sin(\vartheta_A - \vartheta_B) + (m_A + m_B)\, g l_A \sin\vartheta_A = 0$$

LAGRANGEgleichung für ϑ_B:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}_B} &= \frac{d}{dt} m_B l_B^2 \dot{\vartheta}_B + \frac{d}{dt} m_B l_A \dot{\vartheta}_A l_B \cos(\vartheta_A - \vartheta_B) \\ &= m_B l_B^2 \ddot{\vartheta}_B + m_B l_A l_B \left(\ddot{\vartheta}_A \cos(\vartheta_A - \vartheta_B) - \left(\dot{\vartheta}_A^2 - \dot{\vartheta}_A \dot{\vartheta}_B\right) \sin(\vartheta_A - \vartheta_B)\right) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta_B} &= m_B l_A l_B \dot{\vartheta}_A \dot{\vartheta}_B \sin(\vartheta_A - \vartheta_B) - m_B g l_B \sin\vartheta_B\end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichung für ϑ_B ist damit :

$$\begin{aligned}m_B l_B^2 \ddot{\vartheta}_B &+ m_B l_A l_B \left(\ddot{\vartheta}_A \cos(\vartheta_A - \vartheta_B) - \left(\dot{\vartheta}_A^2 - \dot{\vartheta}_A \dot{\vartheta}_B\right) \sin(\vartheta_A - \vartheta_B)\right) \\ &= m_B l_A l_B \dot{\vartheta}_A \dot{\vartheta}_B \sin(\vartheta_A - \vartheta_B) - m_B g l_B \sin\vartheta_B\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow m_B l_B^2 \ddot{\vartheta}_B + m_B l_A l_B \ddot{\vartheta}_A \cos(\vartheta_A - \vartheta_B) - m_B l_A l_B \dot{\vartheta}_A^2 \sin(\vartheta_A - \vartheta_B) + m_B g l_B \sin\vartheta_B = 0$$

1.e) Bestimme die Bewegungsgleichungen eines Doppelpendel mit gleichen Stangen $l_A = l_B = l$ und gleichen Massen $m_A = m_B = m$ für kleine Auslenkungen $\vartheta_A, \vartheta_B \ll 1$ und damit kleine Geschwindigkeiten $\dot{\vartheta}_A, \dot{\vartheta}_B$.

Für gleiche Stangen und Massen vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}2ml^2 \ddot{\vartheta}_A + ml^2 \ddot{\vartheta}_B \cos(\vartheta_A - \vartheta_B) + ml^2 \dot{\vartheta}_B^2 \sin(\vartheta_A - \vartheta_B) + 2mgl_A \sin\vartheta_A &= 0 \\ ml^2 \ddot{\vartheta}_B + ml^2 \ddot{\vartheta}_A \cos(\vartheta_A - \vartheta_B) - ml^2 \dot{\vartheta}_A^2 \sin(\vartheta_A - \vartheta_B) + m_B g l_B \sin\vartheta_B &= 0\end{aligned}$$

für $\vartheta_A, \vartheta_B \ll 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\sin\vartheta_{A/B} &= \vartheta_{A/B} \\ \cos(\vartheta_A - \vartheta_B) &= 1 \\ \dot{\vartheta}_A^2 \sin(\vartheta_A - \vartheta_B) &= \dot{\vartheta}_A^2 (\vartheta_A - \vartheta_B) \approx 0\end{aligned}$$

Damit reduzieren sich die BWGLn:

$$\begin{aligned} 2ml^2\ddot{\vartheta}_A + ml^2\ddot{\vartheta}_B + 2mgl\vartheta_A &= 0 \\ ml^2\ddot{\vartheta}_B + ml^2\ddot{\vartheta}_A + mgl\vartheta_B &= 0 \end{aligned}$$

1.f) Löse die Bewegungsgleichungen mit dem Ansatz

$$\vartheta_A = \mathcal{C}_A e^{i\omega t} \qquad \vartheta_B = \mathcal{C}_B e^{i\omega t}$$

In Vektorschreibweise:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \vartheta_A \\ \vartheta_B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathcal{C}_A \\ \mathcal{C}_B \end{pmatrix} e^{i\omega t} \\ \vec{\vartheta} &= \vec{\mathcal{C}} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Die Ableitungen davon sind:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\vartheta}} &= i\omega\vec{\mathcal{C}} e^{i\omega t} \\ \ddot{\vec{\vartheta}} &= \vec{\mathcal{C}} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Die BWGLn kann man auch als

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\vartheta}_A \\ \ddot{\vartheta}_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_A \\ \vartheta_B \end{pmatrix} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow -\omega^2 ml \begin{pmatrix} 2l & l \\ l & l \end{pmatrix} \vec{\mathcal{C}} e^{i\omega t} + ml \begin{pmatrix} 2g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \vec{\mathcal{C}} e^{i\omega t} &= \vec{0} \\ \begin{pmatrix} 2l\omega^2 - 2g & l\omega^2 \\ l\omega^2 & l\omega^2 - g \end{pmatrix} \vec{\mathcal{C}} &= \vec{0} \end{aligned}$$

in Vektorieller Form schreiben. Für $\vec{\mathcal{C}} \neq \vec{0}$ verschwindet diese Gleichung nur wenn die Determinante der Matrix Null ist:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2l\omega^2 - 2g & l\omega^2 \\ l\omega^2 & l\omega^2 - g \end{vmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(l\omega^2 - g)^2 - (l\omega^2)^2 &= 0 \\ l^2\omega^4 - 4l\omega^2 g + 2g^2 &= 0 \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösung

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{4lg \pm \sqrt{16l^2g^2 - 8l^2g^2}}{2l^2} \\ &= \frac{4lg \pm 2gl\sqrt{2}}{2l^2} \\ &= \left(2 \pm \sqrt{2}\right) \frac{g}{l} \end{aligned}$$

1.g) Bestimme die Abhängigkeit zwischen $\mathcal{C}_A$ und $\mathcal{C}_B$

Dazu setzt man ω^2 in eine der BWGLn ein:

$$\begin{aligned} ml^2\ddot{\vartheta}_B + ml^2\ddot{\vartheta}_A + mgl\vartheta_B &= 0 \\ -\omega^2 ml^2\mathcal{C}_B e^{i\omega t} - \omega^2 ml^2 \mathcal{C}_A e^{i\omega t} + mgl\mathcal{C}_B e^{i\omega t} &= 0 \\ -\left(2 \pm \sqrt{2}\right) \frac{g}{l} l\mathcal{C}_B - \left(2 \pm \sqrt{2}\right) \frac{g}{l} l\mathcal{C}_A + g\mathcal{C}_B &= 0 \\ -\left(1 \pm \sqrt{2}\right) \mathcal{C}_B - \left(2 \pm \sqrt{2}\right) \mathcal{C}_A &= 0 \end{aligned}$$

negatives Vorzeichen:

$$\mathcal{C}_B = -\frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\mathcal{C}_A = \sqrt{2}\mathcal{C}_A \qquad \Rightarrow \text{ die Pendel schwingen in gleicher Richtung}$$

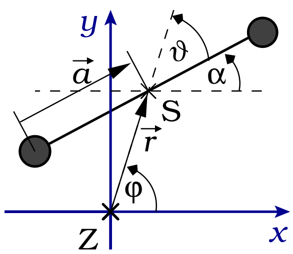
positives Vorzeichen:

$$\mathcal{C}_B = -\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\mathcal{C}_A = -\sqrt{2}\mathcal{C}_A \qquad \Rightarrow \text{ die Pendel schwingen in entgegengesetzt}$$

Aufgabe 2

3 P

Hantel II



Zwei gleich schwere Massen m sind durch eine (massenlose) Stange der Länge $2a$ miteinenander verbunden. Diese Hantel befindet sich in einem Gravitationspotential $U = -\gamma\frac{m}{r}$ mit dem Zentrum in Z. r Um die Rechnung zu vereinfachen, kann davon ausgegangen werden, dass sich die beiden Massenpunkte nur in einer Ebene, in der auch Z und der Schwerpunkt liegen, bewegen können.

2.a) Formuliere die Zwangsbedingungen und führe geeignete Koordinaten ein.

Zwangsbedingungen:

$$\begin{aligned} z_1 = z_2 &= 0 \qquad \text{(ebene Bewegung)} \\ (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 &= 4a^2 \qquad \text{(konstanter Abstand)} \end{aligned}$$

Das sind drei (holonom-skeleronome) Zwangsbedingungen; es bleiben also drei Freiheitsgrade, die durch den Ortsvektor $\vec{r}$ des Schwerpunkts in Polarkoordinaten (r, φ) und den Rotationswinkel ϑ der Stange dargestellt werden.

2.b) Stelle die LAGRANGEfunktion auf und leite die Bewegungsgleichungen her.

Die kinetische Energie setzt sich aus der Bewegung des Schwerpunkts und Eigendrehung zusammen:

$$\begin{aligned} T &= T_S + T_E \\ T_S &= \frac{1}{2}\cdot 2m\dot{\vec{r}}^2 \\ &= m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\varphi}^2 \\ T_E &= 2\cdot\frac{1}{2}m\dot{\vec{a}}^2 \\ &= m\dot{a}^2 + ma^2\dot{\alpha}^2 \\ &= ma^2\left(\dot{\varphi} - \dot{\vartheta}\right)^2 \end{aligned}$$

(Benutze die Ausdücke für die kinetische Energie in Polarkoordinaten.)
Die Potentielle Energie (Coulombpotential) ist in den gewählten Koordinaten nicht so einfach auszudrücken:

$$V = -m\gamma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

mit

$$
\begin{aligned}
r_1 &= |\vec{r}-\vec{a}| = \sqrt{r^2+a^2-2ar\,\cos\vartheta} \\
r_2 &= |\vec{r}+\vec{a}| = \sqrt{r^2+a^2+2ar\,\cos\vartheta}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow V = -m\gamma\left(r^2+a^2-2ar\,\cos\vartheta\right)^{-1/2} - m\gamma\left(r^2+a^2+2ar\,\cos\vartheta\right)^{-1/2}
$$

Lagrangefunktion:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= T-V \\
&= m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\varphi}^2 + ma^2\left(\dot{\varphi}-\dot{\vartheta}\right)^2 + m\gamma\left(r^2+a^2-2ar\,\cos\vartheta\right)^{-1/2} + m\gamma\left(r^2+a^2+2ar\,\cos\vartheta\right)^{-1/2}
\end{aligned}
$$

Bewegungsgleichung für r:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} &= 2m\ddot{r} \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} &= 2mr\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}m\gamma\left(r^2+a^2-2ar\,\cos\vartheta\right)^{-3/2}(2r-2a\,\cos\vartheta) \\
&\quad -\frac{1}{2}m\gamma\left(r^2+a^2+2ar\,\cos\vartheta\right)^{-3/2}(2r+2a\,\cos\vartheta) \\
&= 2mr\dot{\varphi}^2 - m\gamma\frac{r-a\,\cos\vartheta}{\left(r^2+a^2-2ar\,\cos\vartheta\right)^{3/2}} - m\gamma\frac{r+a\,\cos\vartheta}{\left(r^2+a^2+2ar\,\cos\vartheta\right)^{3/2}} \\
\Rightarrow \ddot{r} &= r\dot{\varphi}^2 - m\gamma\frac{r-a\,\cos\vartheta}{\left(r^2+a^2-2ar\,\cos\vartheta\right)^{3/2}} - m\gamma\frac{r+a\,\cos\vartheta}{\left(r^2+a^2+2ar\,\cos\vartheta\right)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

Bewegungsgleichung für φ:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} &= 0 \\
\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} &= 2mr^2\ddot{\varphi} + 2ma^2\left(\ddot{\varphi}-\ddot{\vartheta}\right) = 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ φ ist zyklisch!

$$
p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = 2mr^2\dot{\varphi} + 2ma^2\left(\dot{\varphi}-\dot{\vartheta}\right) = \text{const.}
$$

Bewegungsgleichung für ϑ:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vartheta}} &= -2ma^2\left(\ddot{\varphi}-\ddot{\vartheta}\right) \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vartheta} &= -\frac{1}{2}m\gamma\left(r^2+a^2-2ar\,\cos\vartheta\right)^{-3/2}2ar\,\sin\vartheta + \frac{1}{2}m\gamma\left(r^2+a^2+2ar\,\cos\vartheta\right)^{-3/2}2ar\,\sin\vartheta \\
&= -m\gamma\frac{ar\,\sin\vartheta}{\left(r^2+a^2-2ar\,\cos\vartheta\right)^{3/2}} + m\gamma\frac{ar\,\sin\vartheta}{\left(r^2+a^2+2ar\,\cos\vartheta\right)^{3/2}} \\
\Rightarrow \ddot{\vartheta} &= \ddot{\varphi} + \frac{\gamma r}{2a}\left(\frac{\sin\vartheta}{\left(r^2+a^2+2ar\,\cos\vartheta\right)^{3/2}} - \frac{\sin\vartheta}{\left(r^2+a^2-2ar\,\cos\vartheta\right)^{3/2}}\right)
\end{aligned}
$$

2.c) Definiere Eigen-, Bahn- und Gesamtdrehimpuls. Welche dieser Größen sind konstant und warum?

Der Bahndrehimpuls ist der Drehimpuls des Schwerpunkts bezüglich des Ursprungs:

$$
\begin{aligned}
\vec{L}_B &= \vec{r} \times 2m\dot{\vec{r}} \\
&= \begin{pmatrix} r\,\cos\varphi \\ r\,\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times 2m \begin{pmatrix} \dot{r}\,\cos\varphi - r\dot{\varphi}\,\sin\varphi \\ \dot{r}\,\sin\varphi + r\dot{\varphi}\,\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 2m\left(r\dot{r}\,\cos\varphi\,\sin\varphi + r^2\dot{\varphi}\,\cos^2\varphi - r\dot{r}\,\sin\varphi\,\cos\varphi + r^2\dot{\varphi}\,\sin^2\varphi\right)\vec{e}_z \\
&= 2mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z
\end{aligned}
$$

Der Eigendrehimpuls ist der Drehimpuls der Massen bezüglich des Schwerpunktes:

$$
\begin{aligned}
\vec{L}_E &= 2\cdot\vec{a}\times m\dot{\vec{a}} \\
&= 2m \begin{pmatrix} a\,\cos\alpha \\ a\,\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a\dot{\alpha}\,\sin\alpha \\ a\dot{\alpha}\,\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 2m\left(a^2\dot{\alpha}\,\cos\alpha + a^2\dot{\alpha}\,\cos\alpha\right)\vec{e}_z \\
&= 2ma^2\left(\dot{\varphi} - \dot{\vartheta}\right)\vec{e}_z
\end{aligned}
$$

Der Gesamtdrehimpuls ist die Summe der beiden:

$$
\begin{aligned}
\vec{L} &= \vec{L}_B + \vec{L}_E \\
&= 2mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z + 2ma^2\left(\dot{\varphi} - \dot{\vartheta}\right)\vec{e}_z \\
&= p_\varphi\vec{e}_z \\
\Rightarrow \vec{L} &= \text{const.}
\end{aligned}
$$

Der Gesamtdrehimpuls ist konstant, da φ eine zyklische Variable ist.

2.d) Entwickle die LAGRANGEgleichungen nach Potenzen von a/r bis zur 2. Ordnung.
Es ist die TAYLORentwicklung

$$
(1+x)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 - \frac{35}{16}x^3 + ...
$$

entscheidend.
Betrachte

$$
\begin{aligned}
r_{2,1} &= \sqrt{r^2 + a^2 \pm 2ar\,\cos\vartheta} \\
&= r\sqrt{1 + \frac{a^2}{r^2} \pm \frac{2a}{r}\,\cos\vartheta} \\
\Rightarrow \frac{1}{r_{2,1}^3} &= \frac{1}{r^3}\left(1 + \frac{a^2}{r^2} \pm \frac{2a}{r}\,\cos\vartheta\right)^{-3/2} \\
&= \frac{1}{r^3}\left\{1 - \frac{3}{2}\left(\frac{a^2}{r^2} \pm \frac{2a}{r}\,\cos\vartheta\right) + \frac{15}{8}\left(\frac{a^4}{r^4} \pm \frac{4a^3}{r^3}\,\cos\vartheta + \frac{4a^2}{r^2}\,\cos^2\vartheta\right)\right. \\
&\quad \left. -\frac{35}{16}\left(\frac{a^6}{r^6} \pm \frac{6a^5}{r^5}\,\cos\vartheta + \frac{12a^4}{r^4}\,\cos^2\vartheta \pm \frac{8a^3}{r^3}\,\cos^3\vartheta\right) + ...\right\} \\
&\approx \frac{1}{r^3}\left(1 \mp \frac{a}{r}3\cos\vartheta + \frac{a^2}{r^2}\left(-\frac{3}{2} + \frac{15}{2}\,\cos^2\vartheta\right) + \frac{a^3}{r^3}\left(\pm\frac{15}{2}\,\cos\vartheta \mp \frac{35}{2}\,\cos^3\vartheta\right)\right) \\
&= \frac{1}{r^3}\left(1 \mp 3\frac{a}{r}\,\cos\vartheta + \frac{3}{2}\frac{a^2}{r^2}\left(5\,\cos^2\vartheta - 1\right) \pm \frac{5}{2}\frac{a^3}{r^3}\left(3\,\cos\vartheta - 7\,\cos^3\vartheta\right)\right)
\end{aligned}
$$

Die Bewegungsgleichungen für r sind damit

$$\begin{aligned}
\ddot{r} &= r\dot{\varphi}^2 + m\gamma\left(\frac{r + a\,\cos\vartheta}{r_2^3} - \frac{r - a\,\cos\vartheta}{r_1^3}\right)\\
&\approx r\dot{\varphi}^2 - m\gamma\left(\frac{1}{r^2}\left(2 + 3\frac{a^2}{r^2}\left(5\,\cos^2\vartheta - 1\right)\right) + \frac{a\,\cos\vartheta}{r^3}\left(-6\frac{a}{r}\cos\vartheta + 5\frac{a^3}{r^3}\left(3\,\cos\vartheta - 7\,\cos^3\vartheta\right)\right)\right)\\
&= r\dot{\varphi}^2 - m\gamma\left(\frac{2}{r^2} + 3\frac{a^2}{r^4}\left(5\,\cos^2\vartheta - 1\right) - 6\frac{a^2}{r^4}\cos^2\vartheta + 5\frac{a^4}{r^6}\left(3\,\cos^2\vartheta - 7\,\cos^4\vartheta\right)\right)\\
&= r\dot{\varphi}^2 - m\gamma\left(\frac{2}{r^2} + 3\frac{a^2}{r^4}\left(3\,\cos^2\vartheta - 1\right) + 5\frac{a^4}{r^6}\,\cos^2\vartheta\left(3 - 7\,\cos^2\vartheta\right)\right)
\end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen für φ bleiben unverändert:

$$r^2\ddot{\varphi} + a^2\left(\ddot{\varphi} - \ddot{\vartheta}\right) = 0$$

Die Bewegungsgleichungen für ϑ sind:

$$\begin{aligned}
\ddot{\vartheta} &= \ddot{\varphi} + \frac{\gamma r}{2a}\left(\frac{\sin\vartheta}{r_2^3} - \frac{\sin\vartheta}{r_1^3}\right)\\
&\approx \ddot{\varphi} + \frac{\gamma r}{2a}\frac{\sin\vartheta}{r^3}\left(-6\frac{a}{r}\cos\vartheta + 5\frac{a^3}{r^3}\left(3\,\cos\vartheta - 7\,\cos^3\vartheta\right)\right)\\
&= \ddot{\varphi} - \frac{3\gamma}{2r^3}\sin 2\vartheta + \frac{5\gamma a^2}{4r^5}\sin 2\vartheta\left(3 - 7\,\cos^2\vartheta\right)
\end{aligned}$$

2.e) Zeige, dass für $a/r \ll 1$ die Bahnbewegung von der Eigendrehbewegung (näherungsweise) entkoppelt.

Für $a/r \to 0$ vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen zu:

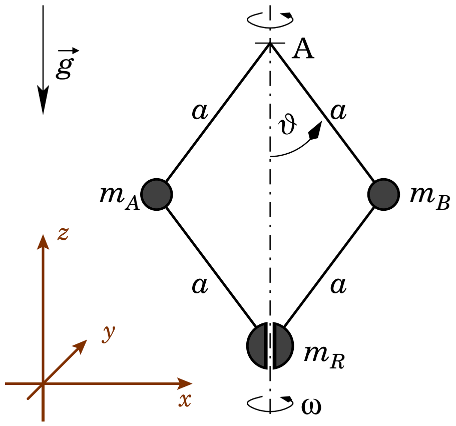
$$\begin{aligned}
\ddot{r} &\approx r\dot{\varphi}^2 - \frac{2m\gamma}{r^2}\\
r^2\ddot{\varphi} &\approx 0\\
\ddot{\vartheta} &\approx \ddot{\varphi} - \frac{3\gamma}{2r^3}\sin 2\vartheta
\end{aligned}$$

die Gleichungen für $\ddot{r}$ und $\ddot{\varphi}$ enthalten keine Abhängigkeiten von ϑ mehr. Die Bahnbewegung (chrakterisiert durch r und φ) ist deshalb unabhängig von der Eigendrehung (ϑ). Andererseits ist die Eigendrehung nicht von der Bahnbewegung unabhängig.

Aufgabe 3

4 P

Fliehkraftregler



Ein Fliehkraftregler ist ein mechanisches Instrument, das in vielen technischen Anwendungen eingesetzt wurde (wird). Die Arbeitsweise beruht darauf, dass sich bei der Rotation von zwei Massen an gelenkig befestigten Stangen eine von der Rotationsgeschwindigkeit abhängige Gleichgewichtsposition einstellt. Mittels geeigneter Vorrichtungen, die auf diese Positionen ansprechen, kann man in Abhängigkeit von der Rotationsgeschwindigkeit die Arbeitsweise von Maschinen regulieren.

Zwei (gewichtslose, starre) Stangen der Länge a sind an einem vertikalen, uniform rotierenden Stab gelenkig befestigt. Sie liegen in einer Ebene. Am Ende jeder Stange sitzt eine Fliehmasse $m_A = m_B = m$. Gelenkig verbunden sind zwei weitere Stangen der Länge a, die an einem Reiter mit der Masse m_R befestigt sind. Der Reiter kann sich (reibungsfrei) entlang der Vertikalen ($\vec{e}_z$) bewegen. Alle drei Massen werden als punktförmig behandelt. Das ganze System dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Vertikale, die Massen sind der einfachen Gravitation $g\vec{e}_z$ ausgesetzt.

3.a) Zeige, dass das System nur einen Freiheitsgrad hat.

Wähle den Aufhängepunkt als Ursprung. Die Fliehmasse A hat die ZBs:

$$\begin{aligned} x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - a^2 &= 0 \\ \frac{y_A}{x_A} - \tan \omega t &= 0 \end{aligned}$$

Die andere Fliehmasse B steht immer gegenüber von A:

$$\begin{aligned} x_A + x_B &= 0 \\ y_A + y_B &= 0 \\ z_A - z_B &= 0 \end{aligned}$$

Der Reiter kann sich nur auf der Achse bewegen

$$x_R = y_R = 0$$

und schränkt die Bewegung der Fliehmassen ein:

$$(x_{A,B} - x_R)^2 + (y_{A,B} - y_R)^2 + (z_{A,B} - z_R)^2 - a^2 = 0$$

Damit hat man 8 Zwangsbedingungen und 9-8=1 Freiheitsgrad.

3.b) Welche generalisierten Koordinaten könnten geeignet sein?

Der Winkel ϑ und die z-Koordinate z_R des Reiters wären gute generalisierten Koordinaten, da sich das System damit eindeutig beschreiben lässt. (Der aktuelle Ratationswinkel wird durch ωt vorgegeben.) Eventell könnte man auch den Abstand einer Fliehmasse zur Drehachse nehmen.

3.c) Stelle die kartesischen Koordinaten der Massenpunkte und ihre Ableitungen in Abhängigkeit von ϑ auf.

$$\begin{array}{rclrcl}
x_A &=& a\sin\vartheta\,\cos\omega t & \dot{x}_A &=& -a\dot{\vartheta}\cos\vartheta\,\cos\omega t - a\omega\sin\vartheta\,\sin\omega t \\
y_A &=& a\sin\vartheta\,\sin\omega t & \dot{y}_A &=& -a\dot{\vartheta}\cos\vartheta\,\sin\omega t + a\omega\sin\vartheta\,\cos\omega t \\
z_A &=& a\cos\vartheta & \dot{z}_A &=& a\dot{\vartheta}\sin\vartheta \\
x_B &=& -a\sin\vartheta\,\cos\omega t & \dot{x}_B &=& a\dot{\vartheta}\cos\vartheta\,\cos\omega t + a\omega\sin\vartheta\,\sin\omega t \\
y_B &=& -a\sin\vartheta\,\sin\omega t & \dot{y}_B &=& a\dot{\vartheta}\cos\vartheta\,\sin\omega t - a\omega\sin\vartheta\,\cos\omega t \\
z_B &=& a\cos\vartheta & \dot{z}_B &=& a\dot{\vartheta}\sin\vartheta \\
x_R &=& 0 & \dot{x}_R &=& 0 \\
y_R &=& 0 & \dot{y}_R &=& 0 \\
z_R &=& 2a\cos\vartheta & \dot{z}_R &=& 2a\dot{\vartheta}\sin\vartheta
\end{array}$$

3.d) Stelle die LAGRANGEfunktion mit ϑ als generalisierte Koordinate auf.

kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}Mv_R^2 = mv_A^2 + \frac{1}{2}M\dot{z}_R^2$$

verwendet man die kinetische Energie in Kugelkoordinaten

$$T = \frac{m}{2}r^2\left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta\right)$$

von „Krummlinige Koordinatensysteme“ (Blatt 7) erhält man für die kinetische Energie:

$$T = ma^2\left(\dot{\vartheta}^2 + \omega^2\sin^2\vartheta\right) + 2Ma^2\dot{\vartheta}^2\sin^2\vartheta$$

potentielle Einergie:

$$\begin{aligned}
U &= mgz_A + mgz_B + Mgz_R \\
&= 2mga\cos\vartheta + Mg2a\cos\vartheta \\
&= 2(m+M)ga\cos\vartheta
\end{aligned}$$

LAGRANGEfunktion:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= T - U \\
&= ma^2\left(\dot{\vartheta}^2 + \omega^2\sin^2\vartheta\right) + 2Ma^2\dot{\vartheta}^2\sin^2\vartheta - 2(m+M)ga\cos\vartheta
\end{aligned}$$

oder mit

$$\begin{aligned}
ma^2\left(\dot{\vartheta}^2 + \omega^2\sin^2\vartheta\right) &= \frac{ma^2\dot{\vartheta}^2\sin^2\vartheta}{\sin^2\vartheta} + ma^2\omega^2\sin^2\vartheta \\
&= \frac{m\dot{z}_R^2}{4(1-\cos^2\vartheta)} + ma^2\omega^2(1-\cos^2\vartheta) \\
&= \frac{m\dot{z}_R^2}{4\left(1-\frac{z_R^2}{4a^2}\right)} + ma^2\omega^2\left(1-\frac{z_R^2}{4a^2}\right) \\
&= \frac{a^2m\dot{z}_R^2}{4a^2-z_R^2} + \frac{m}{4}\omega^2\left(4a^2-z_R^2\right)
\end{aligned}$$

kann mann die Lagrangegleichung auch in abhängigkeit von z_R darstellen:

$$\mathcal{L} = \frac{a^2m}{4a^2-z_R^2}\dot{z}_R^2 + \frac{M}{2}\dot{z}_R^2 + \frac{m}{4}\omega^2\left(4a^2-z_R^2\right) - (m+M)gz_R$$

3.e) Bestimme die Gleichgewichtssituationen, die bei der uniformen Drehung auftreten können.

Im Gleichgewicht ändert sich die Position des Fliehkraftreglers nicht: $\dot{\vartheta} = 0$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{GG} = ma^2\omega^2 \sin^2\vartheta - 2(m+M)ga\cos\vartheta$$

Für die „Bewegungs“gleichung braucht man nur

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{GG}}{\partial \vartheta} &= 0 \\ ma^2\omega^2 2\sin\vartheta\,\cos\vartheta - 2(m+M)ga\sin\vartheta &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos\vartheta &= \frac{(m+M)g}{ma\omega^2} \end{aligned}$$

zu betrachten. z_R ist dabei

$$\begin{aligned} z_R &= 2a\cos\vartheta \\ &= \frac{2(m+M)g}{m\omega^2} \end{aligned}$$

3.f) Bestimme die Bewegungsgleichung des Fliekraftreglers.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} &= \frac{d}{dt}2ma^2\dot{\vartheta} + \frac{d}{dt}4Ma^2\dot{\vartheta}\sin^2\vartheta \\ &= 2ma^2\ddot{\vartheta} + 4Ma^2\left(\ddot{\vartheta}\sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2 2\sin\vartheta\cos\vartheta\right) \\ &= 2\left(m + 2M\sin^2\vartheta\right)a^2\ddot{\vartheta} + 8Ma^2\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta\cos\vartheta \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} &= ma^2\omega^2 2\sin\vartheta\cos\vartheta + 2Ma^2\dot{\vartheta}^2 2\sin\vartheta\cos\vartheta - 2(m+M)ga\sin\vartheta \\ & \quad 2\left(m\omega^2 + 2M\dot{\vartheta}^2\right)\sin\vartheta\cos\vartheta - 2(m+M)ga\sin\vartheta \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichung ist damit:

$$\begin{aligned} 2\left(m + M\sin^2\vartheta\right)a^2\ddot{\vartheta} + 8Ma^2\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta\cos\vartheta - \left(4M\dot{\vartheta}^2 + 2m\omega^2\right)\sin\vartheta\cos\vartheta + 2(m+M)ga\sin\vartheta &= 0 \\ \Leftrightarrow 2a^2\left(m + M\sin^2\vartheta\right)\ddot{\vartheta} + \left(4M\dot{\vartheta}^2 - 2m\omega^2\right)\sin\vartheta\cos\vartheta + 2(m+M)ga\sin\vartheta &= 0 \end{aligned}$$

oder in Abh. von z_R (laut Dreizler und Lüdde):

$$\left(M + \frac{2ma^2}{4a^2 - z_R^2}\right)\ddot{z}_R + \frac{2ma^2 z_R}{\left(4a^2 - z_R^2\right)^2}\dot{z}_R^2 + \frac{m}{2}\omega^2 z_R - (m+M)g = 0$$

3.g) Untersuche die Bewegung des Fliehkraftreglers für kleine Auslenkungen $z_R = z_0 + \delta z$ aus dem Gleichgewicht:

$$\left(M + \frac{2ma^2}{4a^2 - (z_0 + \delta z)^2}\right)\ddot{\delta z} + \frac{2ma^2 z_R}{\left(4a^2 - (z_0+\delta z)^2\right)^2}\dot{\delta z}^2 + \frac{m}{2}\omega^2(z_0 + \delta z) - (m+M)g = 0$$

Vernachlässigt man die Terme höherer Ordnung ($\dot{\delta z}^2 \approx 0$ und $(z_0 + \delta z)^2 \approx z_0^2$), erhält man:

$$\left(M + \frac{2ma^2}{4a^2 - z_0^2}\right)\ddot{\delta z} + \frac{m}{2}\omega^2(z_0 + \delta z) - (m+M)g = 0$$

Der Gleichgewichtspunkt ist:

$$z_0 = \frac{2(m+M)g}{m\omega^2}$$

$$\begin{aligned}\left(M + \frac{2ma^2}{4a^2 - z_0^2}\right)\ddot{\delta z} + \frac{m}{2}\omega^2\left(\frac{2(m+M)g}{m\omega^2} + \delta z\right) - (m+M)g &= 0 \\ \ddot{\delta z} + \frac{m\omega^2}{2M + \frac{4ma^2}{4a^2 - z_0^2}}\delta z &= 0\end{aligned}$$

Das ist eine Schwingungsbewegung mit der Frequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m\omega^2\left(4a^2 - z_0^2\right)}{2M\left(4a^2 - z_0^2\right) + 4ma^2}}$$