Übungsblatt 9

Lösungsvorschlag
4 Aufgaben, 8 Punkte

Aufgabe 1

2 P

Dissipationsfunktionen

Berechne die Dissipationsfunktionen folgender Systeme.

1.a) Federpendel in viskoser Flüssigkeit (laminare Reibung).
Reibungswiederstand allgemein:

$$\vec{R} = -c_w(v)A\frac{\rho}{2}v^2\frac{\vec{v}}{v}$$

in mit laminarer Reibung gilt:

$$\begin{aligned} c_w(v) &\sim \frac{1}{v} \\ \Rightarrow \vec{R} &= cv\frac{\vec{v}}{v} \\ \Rightarrow \mathcal{P} &= \int_0^{|v|} cv'dv \\ &= \frac{1}{2}cv'^2\Big|_0^{|v|} \\ &= \frac{1}{2}cv^2 \end{aligned}$$

Wähle Koordinatensystem so, dass das Pendel in x-Richtung schwingt:

$$P = \frac{c}{2}\dot{x}^2$$

Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

1.b) Frei bewegliche Hantel mit zwei gleich schweren Massen in viskoser Flüssigkeit (laminare Reibung).

$$\begin{aligned} \vec{R}_i &= cv_i\frac{\vec{v}_i}{v_i} \quad i = 1, 2 \\ \mathcal{P} &= \sum_{i=1}^{2}\int_0^{|v_i|} cv_i' dv_i \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} c v_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{2} c \dot{q}_i^2 \qquad \text{da } v_i^2 = \sum_{j=0}^{2} \dot{q}_{3i-j}^2
\end{aligned}
$$

Bei laminarer Ströhmung brauchen also nur die Quadrate der Geschwindigkeitskomponenten beliebiger generalisierter Koordinaten betrachtet werden. Deshalb kann auch einfach in das Schwerpunktsystem gewechselt werden:

$$
\mathcal{P} = \frac{c}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 + \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta\right)
$$

wegen der Zwangsbedingung $r = l$ und damit $\dot{r} = 0$ vereinfacht sich die Dissipationsfunktion

$$
\mathcal{P} = \frac{c}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 + l^2\dot{\vartheta}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta\right)
$$

die LAGRANGEfunktion ist

$$
\mathcal{L} = T - U = m\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 + l^2\dot{\vartheta}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta\right) + 2mgZ
$$

1.c) Kreisförmige, homogene Scheibe, die auf einer ebenen Unterlage um ihren Schwerpunkt rotiert.

Die Reibungswiederstand eines Teilchens mit Gleitreibung ist:

$$
\vec{R} = \mu_G |\vec{N}| \frac{\vec{v}}{v}
$$

mit der Normalkraft $\vec{N}$. Die Dissipationsfunktion eines infinitesimal dünnen Kreisrings mit dem Volumen $V = h\pi r\, dr$ mit der Höhe h ist:

$$
\begin{aligned}
d\mathcal{P} &= \int_0^{|v|} \mu_G\, dv \cdot g\rho\, dV \\
&= \mu_G g\rho\, h\pi r\, dr \int_0^{|v|} dv \\
&= \mu_G g\rho\, h\pi r\, dr\, |v| \\
&= \mu_G g\rho\, h\pi r\, dr\, \dot{\varphi} r \\
&= \pi\mu_G g\rho h\omega r^2\, dr
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \mathcal{P} &= \int_0^{r} \pi\mu_G g\rho h\omega r'^2\, dr' \\
&= \frac{2}{3}\pi\mu_G g\rho h\omega r^3
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

2 P

abrutschendes Seil

Ein Seil der Länge l und der (homogen verteilten) Masse m hängt mit der Länge $a < l$ über einer Tischkante. Nach dem Loslassen zur Zeit $t = 0$ fängt das Seil an reibungsfrei über die Tischkante zu gleiten. Das System steht im homogenen Gravitationsfeld $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.

2.a) Bestimme die Bewegungsgleichung für z

kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{mz}{2l}\dot{z}^2 + \frac{mx}{2l}\dot{x}^2 \\ &= \frac{m}{2}\dot{z}^2 \quad (x = l - z,\, \dot{x} = \dot{z}) \end{aligned}$$

potentielle Energie:

$$V = -g\int_0^z \frac{m}{l} z'\, dz' = -\frac{mgz^2}{2l}$$

Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}\dot{z}^2 + \frac{mgz^2}{2l}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} &= m\ddot{z} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} &= \frac{2mgz}{2l} \end{aligned}$$

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{z} = \frac{gz}{l}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} z &= \mathcal{A}e^{\lambda t} + \mathcal{B}e^{-\lambda t} \\ \ddot{z} &= \lambda^2(\mathcal{A}e^{\lambda t} + \mathcal{B}e^{-\lambda t}) \end{aligned}$$

einsetztten:

$$\begin{aligned} \lambda^2\left(\mathcal{A}e^{\lambda t} + \mathcal{B}e^{-\lambda t}\right) &= \frac{g}{l}\left(\mathcal{A}e^{\lambda t} + \mathcal{B}e^{-\lambda t}\right) \\ \Leftrightarrow \lambda &= \sqrt{\frac{g}{l}} \end{aligned}$$

Anfangsbedingungen:

$$z(0) = -a \qquad \dot{z} = 0$$

$$\begin{aligned} -a &= \mathcal{A} + \mathcal{B} \\ 0 &= \lambda\,(\mathcal{A} - \mathcal{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{A} &= \mathcal{B} = -\frac{a}{2} \\ \Rightarrow z &= -\frac{a}{2}e^{\lambda t} - \frac{a}{2}e^{-\lambda t} = -a\cosh\sqrt{\frac{g}{l}}t \end{aligned}$$

Aufgabe 3

2 P

Perle auf rotierender Parabel

Auf einem parabelförmigen Draht, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotiert, kann sich eine Perle reibungsfrei bewegen. Zur Zeit $t = 0$ kann die Form des Drahtes durch $z = ax^2$ beschrieben werden. Die Schwerkraft wirkt in negativer z-Richtung.

3.a) Stelle die Zwangsbedingungen auf und klassifiziere sie.

Wähle den Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, z und den Winkel $\varphi = \omega t$ als generalisierte (Zylinder-)Koordinaten.
Die Perle bewegt sich auf dem Draht:

$$\begin{aligned} z &= a(x^2 + y^2) \qquad \text{holonom-skleronom} \\ \Leftrightarrow z &= ar^2 \end{aligned}$$

Der Draht rotiert mit ω:

$$\begin{aligned} x \cos \omega t &= y \sin \omega t \\ x &= y \tan \omega t \qquad \text{holonom-rheonom} \\ \Leftrightarrow \varphi &= \omega t \end{aligned}$$

3.b) Berechne die LAGRANGEfunktion.

kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right) \\ &= \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \left(\frac{d}{dt} \omega t \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} ar^2 \right)^2 \right) \\ &= \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \omega^2 + (2ar\dot{r})^2 \right) \\ &= \frac{m}{2} \left(\left(1 + 4a^2 r^2 \right) \dot{r}^2 + r^2 \omega^2 \right) \end{aligned}$$

potentielle Energie

$$\begin{aligned} V &= mgz \\ &= mgar^2 \end{aligned}$$

Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} \left(1 + 4a^2 r^2 \right) \dot{r}^2 + \frac{m}{2} \left(\omega^2 - 2ga \right) r^2$$

3.c) Zeige, dass für $\omega = \sqrt{2ag}$ die Perle im Gleichgewicht steht.

Die Perle steht im Gleichgewicht wenn $\dot{r} = 0$. Dann ist die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}_{GG} = \frac{m}{2} \left(\omega^2 - 2ga \right) r^2$$

Gleichgewichtsbedingung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{GG}}{\partial r} &= 0 \\ mr \left(\omega^2 - 2ga \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \omega &= \sqrt{2ag} \end{aligned}$$

3.d) Stelle die Bewegungsgleichungen auf und Zeige das die Gesamtenergie

$$E = \frac{m}{2}\left(1+4a^2r^2\right)\dot{r}^2 - \frac{m}{2}\left(\omega^2-2ga\right)r^2$$

erhalten bleibt.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} &= m\left(1+4a^2r^2\right)\ddot{r} \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} &= 4ma^2r\dot{r}^2 + m\left(\omega^2-2ga\right)r \end{aligned}$$

$\Rightarrow$Bewegungsgleichung

$$\left(1+4a^2r^2\right)\ddot{r} - 4a^2r\dot{r}^2 - \left(\omega^2-2ga\right)r = 0$$

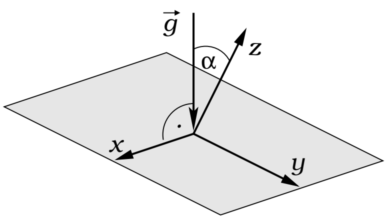
multipliziere mit $\dot{r}$:

$$\begin{aligned} \left(1+4a^2r^2\right)\dot{r}\ddot{r} - 4a^2r\dot{r}^3 - \left(\omega^2-2ga\right)r\dot{r} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\left(1+4a^2r^2\right)\dot{r}^2 - \left(\omega^2-2ga\right)r^2\right) &= 0 \\ \Rightarrow \left(1+4a^2r^2\right)\dot{r}^2 - \left(\omega^2-2ga\right)r^2 &= \text{const} \\ \Rightarrow E &= \text{const} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

2 P

Teilchen auf geneigter Ebene



Bestimme die Bewegungsgleichungen eines Teilchens, das auf einer um α geneigten Ebene mit Reibung gleitet. (Bei $\alpha = 0$ ist der Normalenvektor der Ebene genau antiparallel zur Gravitationskraft)

Wähle Koordinatesystem so, dass die Schiefe Ebene durch $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ aufgespannt wird und $\vec{e}_x$ immer senkrecht auf $\vec{g}$ steht.

$\Rightarrow$ Zwangsbedingung

$$z = 0$$

kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)$$

potentielle Energie:

$$\begin{aligned} V &= m\left(\vec{x}\cdot\vec{g} + \vec{y}\cdot\vec{g}\right) \\ &= -mgy\sin\alpha \end{aligned}$$

LAGRANGEfunktion:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) + mgy\sin\alpha$$

Reibungskraft:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \mu_G|\vec{N}|\frac{\vec{v}}{v} \\ &= \mu_G m\vec{e}_z\cdot\vec{g}\,\frac{\vec{v}}{v} \\ &= -\mu_G mg\,\cos\alpha\,\frac{\vec{v}}{v}\end{aligned}$$

Dissipationsfunktion:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \int_0^{|v|}\mu_G mg\,\cos\alpha\,dv \\ &= \mu_G mgv\,\cos\alpha \\ &= \mu_G mg\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\cos\alpha\end{aligned}$$

LAGRANGEgleichungen:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\dot{x}} \\ 0 &= \frac{m}{2}\ddot{x}+\frac{\mu_G mg\dot{x}\,\cos\alpha}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \\ \ddot{x} &= -\frac{\mu_G g\dot{x}\,\cos\alpha}{2\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\dot{y}} &= 0 \\ \frac{m}{2}\ddot{y}-mg\,\sin\alpha+\frac{\mu_G mg\dot{y}\,\cos\alpha}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} &= 0\end{aligned}$$

Das Problem besteht also aus zwei gekoppelten DGLn und ist nicht einfach zu lösen. Für den Spezialfall konstanter x-Koordinate separiert jedoch das Problem:

$$\frac{m}{2}\ddot{y}-mg\,\sin(\alpha)+\mu_G mg\,\mathrm{sign}(\dot{y})\,\cos(\alpha) = 0$$