Klassische Mechanik

Gelesen von
Prof. Dr. phil. nat. Tom Kirchner

Skript zur Vorlesung

Achtung!
Diese Version befindet sich noch in Arbeit
und kann Fehler enthalten!

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

1.1 Inhaltsübersicht

1.2 Bemerkungen zum Wesen der Theoretischen Physik

Aufgaben der TP:

Formulierung, Analyse und Anwendung mathematischer Gesetze und Modelle zur Beschreibung physikalischer Phänomene und Prozesse (Mathematik ist die Sprache der Physik)

Werkzeuge der TP: Mathematik, Computer

Ziele und Nutzen der TP:

- Herausarbeiten weniger "roter Fäden" durch das Gebäude der Physik
- Auffinden allgemeiner Grundprinzipien
- Überprüfung und Interpretation empirischer Daten

"Kanon der TP":

- Klassische Mechanik → "Teilchen" ('Massenpunkte')
- Klassische Elektrodynamik → "Felder" (Wellen)
- Quantenmechanik → bewältigt Dualismus Welle-Teilchen
- Statistische Mechanik/Thermodynamik → Beschreibung von "Makrophänomenen" (typischerweise mit 10^{23} Teilchen)

1.3 Vorbemerkung zur Klassischen Mechanik

Definition:

"Mechanik ist die Lehre von der Bewegung materieller Gegenstände im Raum und den diese beherrschenden Gesetzmäßigkeiten" [Jelitto]

Analyse:

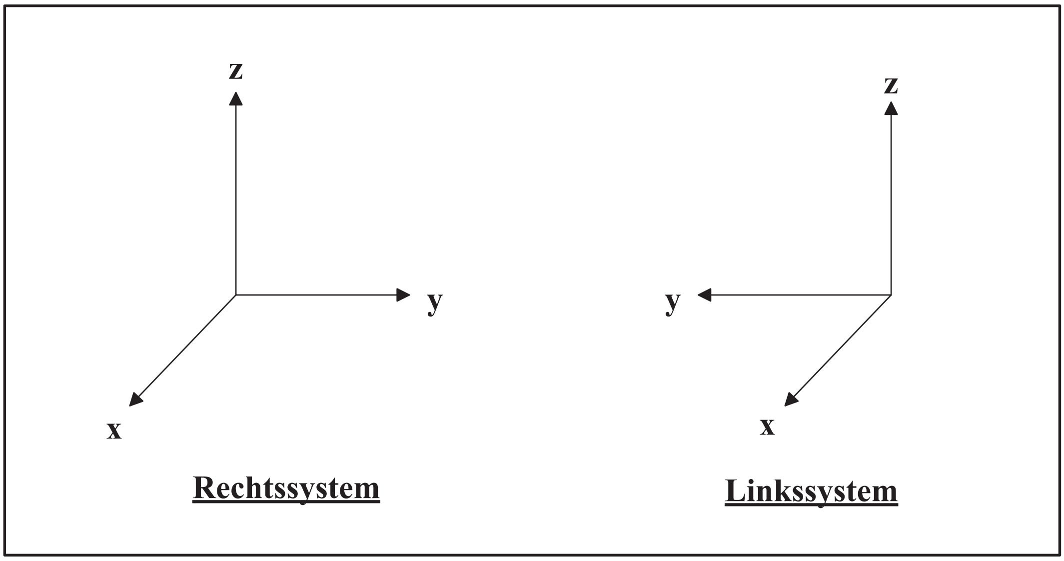
(i) Materielle Gegenstände → mit (träger) Masse ausgestattete Objekte
Massenpunkte ⇔ Punktförmige Teilchen mit Masse

(ii) Bewegung im Raum: erfordert Klärung der Begriffe Raum + Zeit

Eigenschaften des Raums: (im Rahmen der Kl. Mechanik)

- drei-dimensional
- allseitig unbegrenzt
- enthält Punkte, Geraden, Ebenen
- Parallelenaxiom
- homogen + isotrop

→ dreidimensionaler Euklidischer Raum
→ kartesische Koordinatensysteme definierbar



$\Longrightarrow$ Beschreibung von Gegebenheiten im Raum → Vektorrechnung im $\Re^3$

Eigenschaften der Zeit:

- homogener Parameter

→ Bewegung im Raum wird beschrieben durch:

- Bahnkurve (Trajektorie) $\mathbf{r}(t)$
- Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$
- Beschleunigung $\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$

⇒ 'Kinematik': mathematische Beschreibung von Bewegungen ohne Berücksichtigung der verursachenden Kräfte

<u>Erweiterungen des Raumbegriffs:</u>

- Spezielle Relativitätstheorie → 4-dim. (Raumzeit) "Minkowski" Raum
- Allgemeine Relativitätstheorie → (lokal) gekrümmte Räume
- Quantenmechanik → ∞-dim. Hilbert-Raum

(iii) Gesetzmäßigkeiten ⟶ "Dynamik":
Was bewirkt die Bewegung von Objekten?
→ Newton'sche Axiome (Kraftbegriff)
→ insbesondere Bewegungsgleichung (BWGl) $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$

$$\mathbf{F} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} \overset{DGL+AB}{\rightleftarrows} \quad \mathbf{r}(t)$$

→ weitere Grundbegriffe (Impuls, Drehimpuls, Arbeit, Energie,...)

<u>Darüber hinaus:</u>

- Alternative (äquivalente) Formulierungen der KM ("Lagrange", "Hamilton")
- beruhen auf übergeordnetem "Wirkungsprinzip" (jenseits der KM gültig)
- ebnen den Weg zur QM
- sind (teilweise) flexibler in der Handhabung und praktischen Anwendung

Kapitel 2

Newton'sche Mechanik

2.1 Die Newton'schen Axiome (1687)

Axiom: Keines Beweises bedürfender Grundsatz; Näheres: [Jelitto I, Kap. 3.1]

Lex prima: "Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seine Zustand zu ändern."

Lex secunda: "Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher die Kraft wirkt."

Lex tertia: "Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und entgegengesetzter Richtung." (actio = reactio)

Lex quarta: Kräfte addieren sich wie Vektoren (Kräfteparallelogramm)

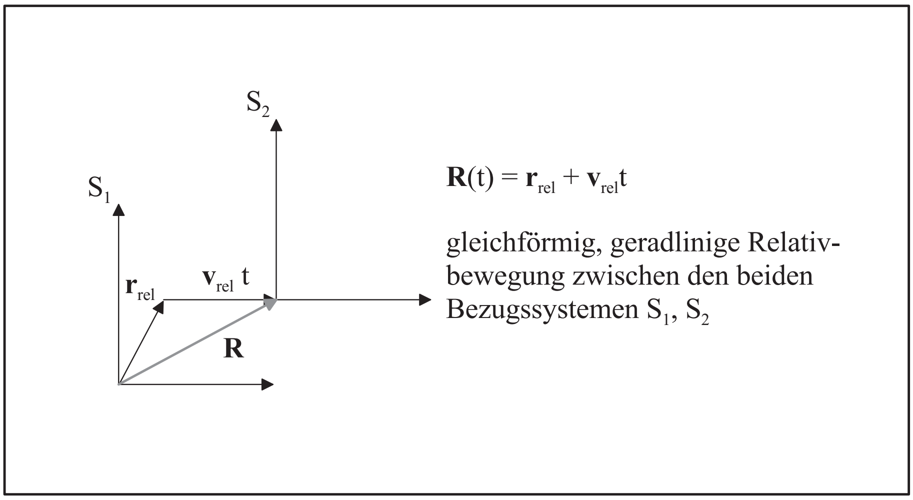
Definition: Impuls ("Bewegungsgröße"); Näheres zu Newton's Formulierung der Grundprinzipien: [Jelitto I, 3.2; Sommerfeld I, §1]

$$\mathbf{p} := m \cdot \mathbf{v}$$

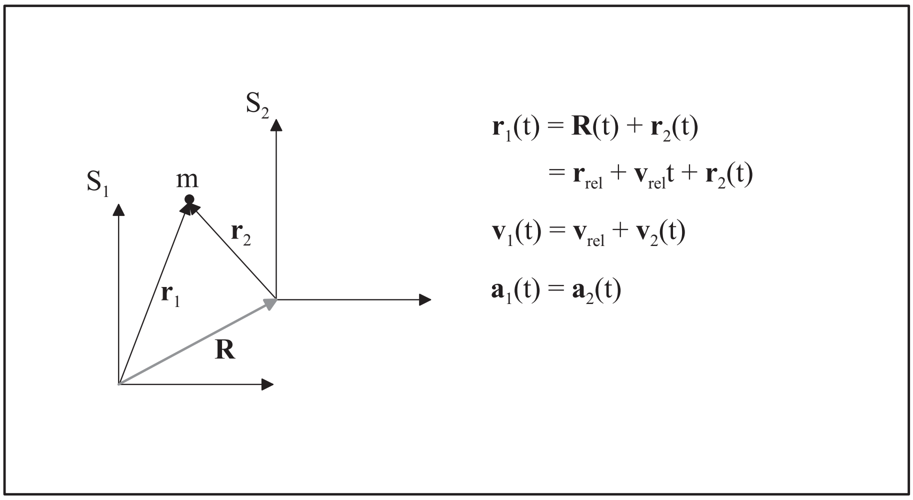
2.1.1 Analyse des 1. Axioms: Inertialsystem (IS) und Galilei-Transformation (GT)

"Galilei'sches Trägheitsprinzip"

falls $\mathbf{F} = 0 \longrightarrow \mathbf{p} = \text{konst.}$



Beschreibung eines MPs aus Sicht von S_1 und S_2:



Inertialsystem $\Longleftrightarrow$ Bezugssystem, in dem sich ein kräftefreier Körper geradlinig, gleichförmig bewegt. Falls $\mathbf{F} = 0 \longrightarrow \mathbf{a_1} = \mathbf{a_2} = 0$

Galilei-Transformation $\Longleftrightarrow (\mathbf{r_1}, t_1) \longrightarrow (\mathbf{r_2}, t_2)$
mit $\mathbf{r_2} = \mathbf{r_1} - \mathbf{r}_{rel} - \mathbf{v}_{rel} t$ und $t_2 = t_1 = t$ (Näheres: Übung 1.4)

2.1.2 Analyse des 2. Axioms: Grundlegende BWGl gilt im IS

$$\boxed{\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}}$$

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}$$

falls $\dot{m} = 0 \longrightarrow$ $$\boxed{m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}}$$

$\dot{m} \neq 0$: z.B. klassisches Raketenproblem, spezielle Relativitätstheorie

Folgerung:

(i) $0 = \mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} \Longrightarrow \mathbf{p} =$ konst. $\longleftrightarrow$ 1. Axiom

(ii) 'Forminvarianz' der BWGl unter GTs $S_1 : m\mathbf{a_1} = \mathbf{F_1} = m\mathbf{a_2} = \mathbf{F_2} : S_2$

Beispiel: senkrechter Wurf aus fahrendem Zug ($\mathbf{v}_{Zug} =$ konst.)

$S_1 \curvearrowright$ $S_2 \updownarrow$

2.1.3 Analyse des 3. Axioms: actio = reactio

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{F}_{12}: \text{ Kraft von Teilchen 1 auf Teilchen 2} \\[1em] \mathbf{F}_{21}: \text{ Kraft von Teilchen 2 auf Teilchen 1} \end{array}\right\} \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

$$\xrightarrow{2.Axiom} \quad m_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = -m_2\mathbf{a}_2$$

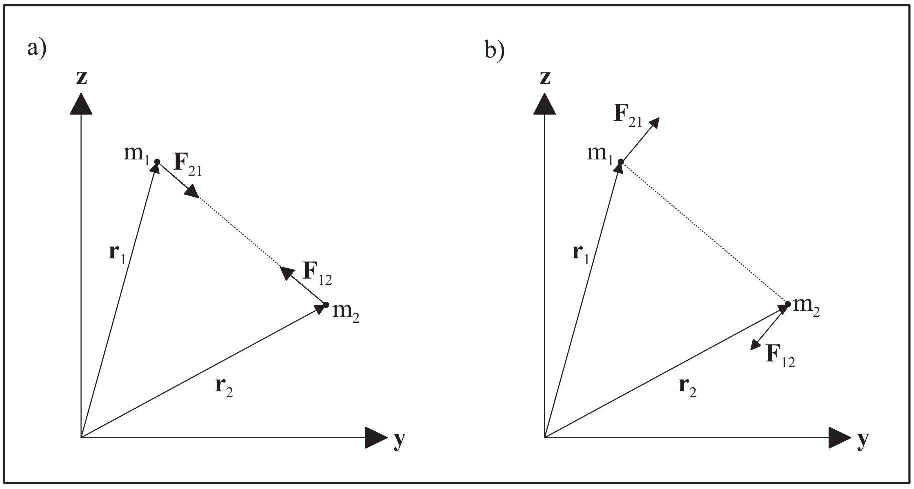
$$\Longrightarrow \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{|\mathbf{a}_2|}{|\mathbf{a}_1|} \equiv \frac{a_2}{a_1} \quad \longrightarrow \quad \text{definiertem Massenverhältnis}$$

→ absolute Skala wird durch Festlegung der Standardmasse [m] = 1kg eingeführt

→ 'träge Masse': (skalares) Maß für den Widerstand gegen Bewegungsänderung

→ Kraft: abgeleitete Größe (nach Newton II) $[\mathbf{F}] = 1\ \frac{kg \cdot m}{s^2} = 1$ N

Mögliche Situationen:



- 3. Axiom erfüllt für Gravitations- und Coulombwechselwirkung
- Darüber hinaus gilt es i.a. nur in modifizierter Form [Dreizler, Kap. 3.1.6]

2.1.4 Abschließende Diskussion

(i) Physikalischer Ursprung von Kräften wird in KM nicht behandelt

(ii) Grundproblem der KM: Lsg. der gewöhnlichen DGl 2. Ordnung $m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ (+ AB's) (Analytische Lösungsverfahren sind nur für Spezialfälle bekannt, ein numerisches Lösungsverfahren gibt es in [P. Blöchl KM, Kap. 2.3])

(iii) Erhaltungssätze folgen als Konsequenz der Axiome

2.2 Grundbegriffe und Erhaltungssätze

2.2.1 Impuls

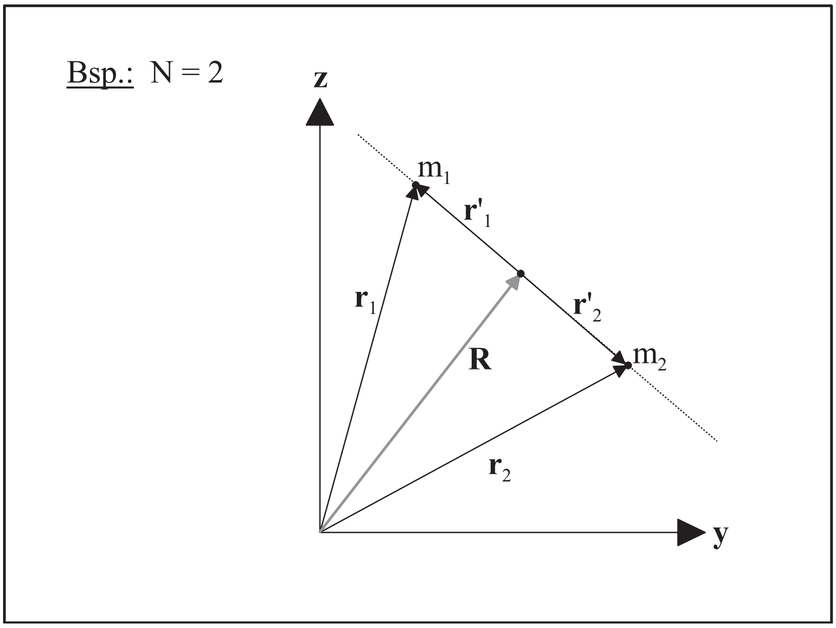
a) Einfachste Situation: <u>ein</u> kräftefreier MP:

$\mathbf{F} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{p} = \text{konst.} = m \cdot \mathbf{v}_0$ Impulserhaltung

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} \cdot t \qquad \text{geradlinig, gleichförmige Bewegung}$$

b) System von N MPs:

- 'innere Kraft' $\mathbf{f}_{ki}$: Wechselwirkung zwischen zwei MPs (Kraft von k auf i)
- 'äußere Kraft' $\mathbf{F}_i$: äußerer Einfluß auf den i-ten MP
- 'Abgeschlossenes System': Keine äußeren Kräfte ($\mathbf{F}_i = 0$ für $i = 1, ..., N$)
- 'Offenes System': $\mathbf{F}_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, ..., N\}$
- Gesamtmasse: $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$
- Position des 'Schwerpunktes' (SP) (auch Massenmittelpunkt): $\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \mathbf{r}_i$
- SP-Geschwindigkeit: $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \mathbf{v}_i$
- SP (Gesamt-) Impuls: $\mathbf{P} = M \cdot \mathbf{V} = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i$
- Position eines MPs bzgl. SP: $\mathbf{r'}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$



$\lessdot$ BWGl für k-ten MP:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_k &= \mathbf{F}_k + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{f}_{ik} \\ \text{beachte :} \qquad \mathbf{f}_{ik} &= -\mathbf{f}_{ki} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{f}_{kk} = 0 \\ \longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{N} \dot{\mathbf{p}}_k &= \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k + \sum_{i,k=1}^{N} \mathbf{f}_{ik} \\ \dot{\mathbf{P}} &= \mathbf{F}_{ext} + 0 \end{aligned}$$

"Impulssatz / SP-Satz"

Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse in ihm vereinigt wäre und alle äußeren Kräfte an ihm angreifen würden.

falls $\mathbf{F}_{ext} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\mathbf{P}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{P} = \text{konst.}$

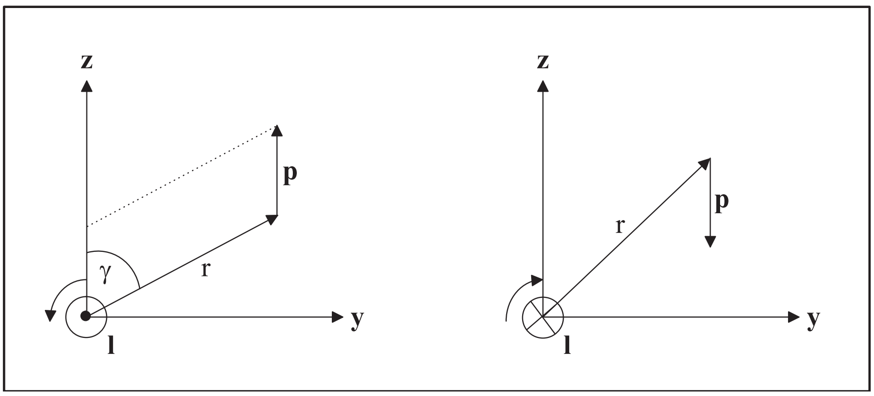
Impulserhaltung (gilt in abgeschlossenen Systemen)

In einem abgeschlossenen System kann man von einem 'raumfesten' IS durch eine GT in das (inertiale) 'SP-System' übergehen

2.2.2 Drehimpuls

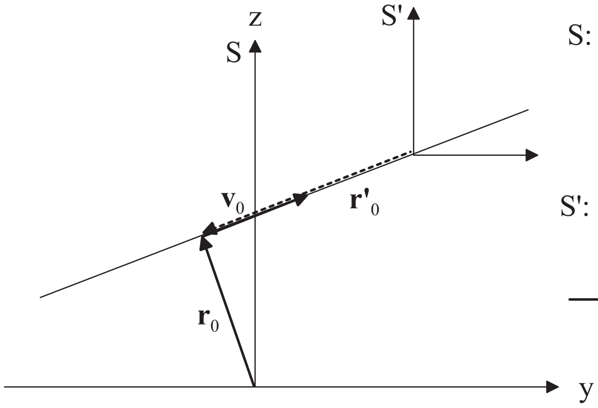
a) ein MP:
<u>Definition:</u> Drehimpuls (= Moment des Impulses)

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$$



$$|\mathbf{l}| = l = r \cdot p \cdot \sin\gamma$$

Bsp. 1: geradlinig gleichförmige Bewegung



S: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t$

$\mathbf{l}(t) = m\big((\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0) + (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_0)t\big)$

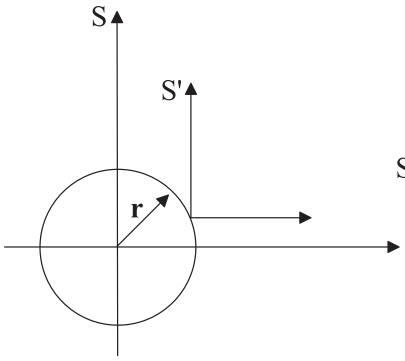
$= m(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0) = \text{konst.}$

S': $\mathbf{r'}(t) = \mathbf{r'}_0 + \mathbf{v}_0 t$

$\mathbf{r'}_0 = \alpha \mathbf{v}_0$

$\longrightarrow \mathbf{l'}(t) = 0$

Bsp. 2: Uniforme Kreisbewegung (ω = konst.)



S: $\mathbf{l} = mR^2\omega\mathbf{e}_z$

$= \text{konst.}$

$(R = |\mathbf{r}|)$

S': $\dot{\mathbf{l}}' \neq 0$

(s. Übung 0.1)

Bemerkung: Vollständige Angabe von $\mathbf{l}$ verlangt Festlegung des Bezugspunktes für die Momentbildung (gilt für jedes Moment eines Vektors)

$$\triangleleft \qquad \dot{\mathbf{l}} = \tfrac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = m(\mathbf{v} \times \mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Definition: Drehmoment $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

$$\boxed{\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{M}} \quad \text{Drehimpulssatz}$$

$$\boxed{\text{falls} \quad \mathbf{M} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\mathbf{l}} = 0,\ \mathbf{l} = \text{konst.}} \quad \text{Drehimpulserhaltung}$$

$$\begin{array}{llll} \mathbf{M} = 0 & \text{falls} & (i) & \mathbf{F} = 0 \\ & & (ii) & \mathbf{F} = F\mathbf{e}_r \ : \quad \text{Zentralkraft} \quad \mathbf{F} \parallel \mathbf{r} \end{array}$$

Zwei Aspekte der Drehimpulserhaltung:

(i) Erhaltung der Richtung $\longrightarrow$ ebene Bewegung

(ii) Erhaltung des Betrages:

$$\begin{aligned} \Delta A &\approx \frac{1}{2} \mid \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t + \Delta t) \mid \\ &= \frac{1}{2} \mid \mathbf{r}(t) \times \big[\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)\big] \mid \\ \frac{\Delta A}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \mid \big[\mathbf{r}(t) \times \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}\big] \mid \\ \xrightarrow{\Delta t \to 0} &= \frac{1}{2} \mid \mathbf{r} \times \mathbf{v} \mid \\ \dot{\mathbf{A}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{2m}\, \mathbf{l} \quad \text{(als Richtung wird die Flächennormale festgelegt)} \end{aligned}$$

'Flächengeschwindigkeit'

$\mid \dot{\mathbf{A}} \mid =$ konst. $\longrightarrow$ Flächensatz

("Gleiche Zeiten, gleiche Flächen")

b) System von N MPs:

Definition: Gesamtdrehimpuls

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}(t) &= \sum_{k=1}^{N} \mathbf{l}_k(t) \\
&= \sum_k \big(\mathbf{r}_k(t) \times \mathbf{p}_k(t)\big) \\
\longrightarrow \dot{\mathbf{L}} &= \sum_k (\mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{p}}_k) \\
&= \sum_{k=1}^{N} (\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k) + \sum_{i,k=1}^{N} (\mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_{ik})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{\text{NR :}} \qquad \sum_{i,k} (\mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_{ik}) &= \sum_{i,k} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ki}) \;=\; \frac{1}{2} \sum_{i,k} \big\{ (\mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_{ik}) + (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ki}) \big\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \big\{ (\mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_{ik}) - (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ik}) \big\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \big\{ (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{f}_{ik} \big\} = 0, \quad \text{falls} \\
\mathbf{f}_{ik} &= \mathrm{f}_{ik} \cdot (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)
\end{aligned}
$$

($\mathbf{f}_{ik}$ zeigt in Richtung von $(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)$; vgl. Skizze auf Seite 8)

$$\text{Gesamtdrehmoment} \quad \mathbf{M} = \sum_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k) = \sum_k \mathbf{M}_k$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}} \qquad \text{Drehimpulserhaltung}$$

$$\text{falls } \mathbf{M} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{L}} = 0 \\[2ex] \mathbf{L} = \mathit{konst.} \end{array} \right\} \quad \text{Drehimpulserhaltung}$$

(gilt in abgeschlossenen Systemen)

<u>Drehimpuls + Schwerpunkt:</u> (vgl. Skizze Seite 9)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_k = \mathbf{r}'_k + \mathbf{R} \quad ; &\quad \mathbf{v}_k = \mathbf{v}'_k + \mathbf{V} \\
\longrightarrow \mathbf{L} &= \sum_k m_k(\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k) \\
&= \sum_k m_k\big\{(\mathbf{r}'_k + \mathbf{R}) \times (\mathbf{v}'_k + \mathbf{V})\big\} \\
&= \underbrace{\sum_k m_k(\mathbf{R} \times \mathbf{V})}_{\hookrightarrow M(\mathbf{R}\times\mathbf{V}) = \mathbf{R}\times\mathbf{P} \equiv \mathbf{L}_{SP}} + (\mathbf{R} + \mathbf{v}'_k) + (\mathbf{r}'_k \times \mathbf{V}) + (\mathbf{r}'_k \times \mathbf{v}'_k) \\
\sphericalangle \ \sum_k m_k \mathbf{r}'_k &= \sum_k m_k(\mathbf{r}_k - \mathbf{R}) \ = \ \sum_k m_k \mathbf{r}_k - M\mathbf{R} \ = \ M\mathbf{R} - M\mathbf{R} \ = \ 0 \\
\longrightarrow \sum_k m_k \mathbf{v}'_k &= \frac{d}{dt}\sum_k m_k \mathbf{r}'_k = 0
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{L}_{SP} + \mathbf{L}'}$ wobei $\mathbf{L}_{SP} = \mathbf{R} \times \mathbf{P}, \ \mathbf{L}' = \sum \mathbf{l}'_k = \sum m_k(\mathbf{r}'_k \times \mathbf{v}'_k)$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\mathbf{M} = \sum_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k) &= \sum_k \big\{(\mathbf{R} + \mathbf{r}'_k) \times \mathbf{F}_k\big\} \\
&= \mathbf{R} \times \sum_k \mathbf{F}_k + \sum_k (\mathbf{r}'_k \times \mathbf{F}_k) = \mathbf{R} \times \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{M}'_{ext} \\
&= \mathbf{M}_{SP} + \mathbf{M}'_{ext}
\end{aligned}
}
$$

$$
\overset{Drehimpulssatz}{\Longrightarrow} \quad \dot{\mathbf{L}}_{SP} + \dot{\mathbf{L}}_{ext} = \mathbf{M}_{SP} + \mathbf{M}_{ext}
$$

Wegen $\dot{\mathbf{L}}_{SP} = M(\mathbf{R} \times \mathbf{V}) = \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{P}} \overset{SP-Satz}{=} \mathbf{R} \times \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{M}_{SP}$ folgt

$\boxed{\dot{\mathbf{L}}_{SP} = \mathbf{M}_{SP}}$ Drehimpulssatz für SP

$\boxed{\dot{\mathbf{L}}' = \mathbf{M}'_{ext}}$ Drehimpulssatz für Teilchensystem bzgl. SP

(hat die selbe Form wie der ursprüngliche Drehimpulssatz, obwohl das SP-System i.a. kein Inertialsystem ist)

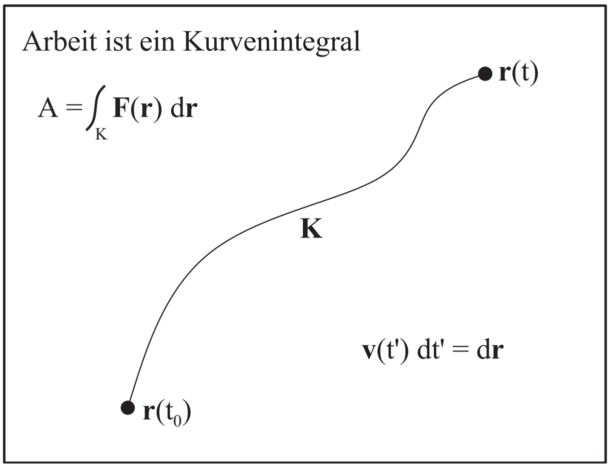
2.3 Arbeit und Energie

a) Ein MP:

Definition: Sei $\mathbf{r}(t)$ die in $[t_0,\ t]$ durchlaufene Bahn

$$A := \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t'),\ \mathbf{v}(t'),\ t'\big) \cdot \mathbf{v}(t')\ dt' \qquad \text{Arbeit}$$

Falls Kraft "Vektorfeld" $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r)$ ist: [Lücke, Kap. 4.2]



Diskussion:

(i) Falls $\mathbf{F} =$ konst. und Weg geradlinig $\longrightarrow A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$

(ii) $A = 0$ falls $\mathbf{F} \perp \mathbf{r}$

Beispiel 1: Anheben einer Masse m $\perp$ zur Äquipotentialfläche des Schwerefeldes
$\longrightarrow A = 0 \quad$ bei $\quad v_{\|} = 0$

Beispiel 2: Uniforme Kreisbewegung

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= (R \cdot \cos \omega t,\ R \cdot \sin \omega t) \\
\mathbf{v} &= (-R \cdot \omega \cdot \sin \omega t,\ R \cdot \omega \cdot \cos \omega t) \\
\mathbf{a} &= (-R \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t,\ -R \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t) \\
&= -\omega^2 \cdot \mathbf{r} \\
\longrightarrow m \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{F}(\mathbf{r}) \\
&= -m \cdot \omega^2 \cdot \mathbf{r} \\
\longrightarrow \ \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0 &\iff \mathbf{F} \perp \mathbf{v} \implies A = 0
\end{aligned}$$

(iii) "Arbeit" $[A] = 1\frac{kgm^2}{s^2} = 1Nm = 1\text{Joule}$

(iv) $P := \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t'), t'\big) \cdot \mathbf{v}(t')dt' = \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t\big) \cdot \mathbf{v}(t)$

"Leistung" $[P] = 1\frac{J}{s} = 1\text{Watt}$

$$\begin{aligned} \lhd \qquad A &= \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t'), t'\big) \cdot \mathbf{v}(t')\ dt' \\ &= m\int_{t_0}^{t} \dot{\mathbf{v}}(t') \cdot \mathbf{v}(t')\ dt' \\ &= \frac{m}{2}\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt'}\big(v^2(t')\big)\ dt' \\ &= \frac{m}{2}\big(v^2(t) - v^2(t_0)\big) \\ &= \frac{1}{2m}\big(\mathbf{p}^2(t) - \mathbf{p}^2(t_0)\big) \end{aligned}$$

Definition: kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{p^2}{2m} \geq 0$$

$$\boxed{\longrightarrow \quad T(t) = T_0(t) + A(t_0 \to t)} \quad \text{'A-T-Relation'}$$

Definition: konservatives Kraftfeld

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &:= -\nabla U(\mathbf{r}) \\ \Longleftrightarrow \int_{K1} \mathbf{F}(\mathbf{r}')\ d\mathbf{r}' &= \int_{K2} \mathbf{F}(\mathbf{r}')\ d\mathbf{r}' \\ \Longleftrightarrow \oint_{K} \mathbf{F}(\mathbf{r}')\ d\mathbf{r}' &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \overset{'Beweis'}{\Longrightarrow} \int_{K1} \mathbf{F}(\mathbf{r}')\ d\mathbf{r}' &= -\int_{K1} \nabla U(\mathbf{r}')\ d\mathbf{r}' \\ = -\int_{r_0}^{r} dU &= U(\mathbf{r}_0) - U(\mathbf{r}) \end{aligned}}$$

Rückweg wird gezeigt unter der Zuhilfenahme des Mittelwertsatzes. Außerdem folgt:

$$rot\ \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = 0$$

Rückweg wir gezeigt mit dem Integralsatz von Stokes:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F})\ d\mathbf{A} = \oint_K \mathbf{F}\ d\mathbf{r} \qquad \text{[Lücke, Kap. 4.3]}$$

Konservatives Kraftfeld:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbf{F} = -\nabla U & \Longleftrightarrow & \nabla \times \mathbf{F} = 0 \\ \Updownarrow & \nwarrow\searrow & \Updownarrow \\ \int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} & \Longleftrightarrow & \oint_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \end{array}}$$

$$U(\mathbf{r}) = -\int^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r} \quad \text{"potentielle Energie"}$$

Übliche Festlegung der unbestimmten Konstanten durch $U(\mathbf{r}) \overset{\mathbf{r}\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \quad A = U(1) - U(2) &= T(2) - T(1) \\ \Longleftrightarrow \quad T(1) + U(1) &= T(2) + U(2) \end{aligned}$$

$$\boxed{E = T + U = \text{konst.}} \quad \text{Energieerhaltung}$$

Allgemeine Situation:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_{konservativ} + \mathbf{F}_{dissipativ} \\ \nabla \times \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F}_{diss} \neq 0 \end{aligned}$$

$\lhd$ Newton II:

$$\begin{aligned} m \cdot \dot{\mathbf{v}} &= -\nabla U(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_{diss} \\ \mathbf{F}_{diss} &= m \cdot \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \nabla U \cdot \mathbf{v} \\ \Longleftrightarrow \mathbf{F}_{diss} &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{m}{2}v^2 + U(\mathbf{r}(t))\Big) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\Big(T + U\Big) = \frac{dE}{dt} = \mathbf{F}_{diss} \cdot \mathbf{v}} \quad \text{"allg. Energiesatz"}$$

Definition: $A_{diss} = \int \mathbf{F}_{diss} \cdot \mathbf{v}\ dt \ \longrightarrow\ \frac{dA_{diss}}{dt} = \mathbf{F}_{diss} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{P}_{diss}$

b) System von N MPs:
Ausgangspunkt: BWGl für k-ten MP: $\dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{F}_k + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{ik}$
Einschränkungen:

(i) $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k(\mathbf{r}_k) = -\nabla_k \cdot U_k(\mathbf{r}_k)$ (äußere Kräfte sind konservativ)

(ii) $\mathbf{f}_{ik} = \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) = \mathbf{f}_{ki}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)$ (hängen nur jeweils von $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)$ ab)

(iii) $\nabla_k \times \mathbf{f}_{ik} = \nabla_i \times \mathbf{f}_{ki} = 0$ (sind konservativ)

$$\longrightarrow \quad \mathbf{f}_{ik} = -\nabla_k V_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k),\ \mathbf{f}_{ki} = -\nabla_i V_{ki}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)$$

Konservative innere Kräfte zwischen zwei MPs können auf ein gemeinsames Potential zurückgeführt werden (d.h $V_{ik} = V_{ki}$)

$$\boxed{\nabla_k V_{ik} = -\nabla_k V_{ki}} \qquad \text{"zwei Teilchen WW"}$$

$$\begin{array}{rrcl}
\triangleleft & \dot{\mathbf{p}}_k & = & \mathbf{F}_k + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{f}_{ik} \\
\longrightarrow & \sum_k \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)\cdot \mathbf{v}_k & = & \sum_k m_k \cdot \dot{\mathbf{v}}_k \cdot \mathbf{v}_k - \sum_k \mathbf{F}_k \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{v}_k \\
 & RS: & = & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_k m_k \mathbf{v}_k^2 + \sum_k \nabla_k U_k(\mathbf{v}_k)\cdot \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} \\
 & & = & \frac{d}{dt}\sum_k \Big(\frac{m_k}{2}\mathbf{v^2}_k + U_k(\mathbf{r}_k(t))\Big) \\
 & & = & \frac{d}{dt}\sum_k \Big(T_k + U_k\Big) \ = \ \frac{d}{dt}\Big(T+U\Big) \\
 & LS: & = & \frac{1}{2}\sum_{i,k}\Big(\mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)\cdot \mathbf{v}_k + \mathbf{f}_{ki}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)\cdot \mathbf{v}_i\Big) \\
 & & = & \frac{1}{2}\sum_{i\neq k}\Big(\mathbf{f}_{ik}\cdot \mathbf{v}_k - \mathbf{f}_{ik}\cdot \mathbf{v}_i\Big) \\
 & & = & \frac{1}{2}\sum_{i\neq k}\mathbf{f}_{ik}\cdot\big(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i\big)
\end{array}$$

$$\text{Angewandte Transformation :}\quad \begin{aligned} \mathbf{r}_{ik} &:= \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k \\ \mathbf{v}_{ik} &:= \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_i V_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) &= \nabla_{ik} V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) = -\nabla_k V_{ik} \\ \hookrightarrow \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) &= -\nabla_k V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) = \nabla_{ik} V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \quad RS: \quad &= -\frac{1}{2}\sum_{i\neq k} \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) \cdot \mathbf{v}_{ik} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i\neq k} \nabla_{ik} V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) \cdot \frac{d\mathbf{r}_{ik}}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sum_{i\neq k} V_{ik}\big(\mathbf{r}_{ik}(t)\big) \\ &= -\frac{d}{dt} V \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(T + U + V\Big) &= 0 \\ T + U + V = \text{konst.} & \end{aligned}} \longrightarrow \text{Energieerhaltung}$$

Die Beträge der ges. Energie E:

- $T = \sum_k T_k$: kinetische Energie des Teilchensystems
- $U = \sum_k U_k$: potentielle Energie aufgrund äußerer Kräfte
- $V = \frac{1}{2}\sum_{i\neq k} V_{ik} = \sum_{i<k} V_{ik}$: 'interne' WW-Energie

<u>Beispiele:</u>

$$\begin{aligned} \underline{N=2:} \qquad V &= \frac{1}{2}\big(V_{12} + V_{21}\big) \overset{V_{12}=V_{21}}{=} V_{12} \\ \underline{\mathrm{N}=3:} \qquad V &= \frac{1}{2}\big(V_{12} + V_{13} + V_{23} + V_{21} + V_{31} + V_{32}\big) \\ &= \underbrace{V_{12} + V_{13} + V_{23}}_{\Longrightarrow \sum_{i<k} V_{ik}} \end{aligned}$$

Kapitel 3

Symbolverzeichnis

1 Abkürzungen

1.1 Lateinisch

a	Beschleunigung
A	Fläche, Arbeit
e, exp	Exponentialfunktion, Eulerzahl
E	Energie
f	innere Kräfte
F	Kraft
h	Höhe
l	Drehimpuls eines MP
L	Drehimpuls eines Teilchensystems
m	Masse
P	Leistung
r, R	Radius, Weg
$\Re$	Reelle Zahlen
s, S	Abstand
t	Zeit
T	kinetische Energie
U	potentielle Energie
v	Geschwindigkeit
V	Potential (aufgrund innerer Kräfte)
x, y	Abstand, Entfernung

1.2 Griechisch

Δ	Differenz, Laplace Operator
∇	Nabla Operator
ω	Winkelgeschwindigkeit

2 Indizes

0	Ursprung, Beginn
1, 2	Ort, Zeitpunkt
i, k	Laufvariablen
diss	dissipativ
ext	extern
kin	kinetisch
SP	Schwerpunkt