

# **Klassische Mechanik**

Gelesen von  
Prof. Dr. phil. nat. Tom Kirchner

Skript zur Vorlesung

Achtung!  
Diese Version befindet sich noch in Arbeit  
und kann Fehler enthalten!

29. November 2005

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Inhaltsübersicht . . . . .	1
1.2	Bemerkungen zum Wesen der Theoretischen Physik . . . . .	2
1.3	Vorbemerkung zur Klassischen Mechanik . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Newton'sche Mechanik</b>	<b>5</b>
2.1	Die Newton'schen Axiome (1687) . . . . .	5
2.1.1	Analyse des 1. Axioms: Inertialsystem (IS) und Galilei-Transformation (GT) . . . . .	6
2.1.2	Analyse des 2. Axioms: Grundlegende BWGl gilt im IS . . . . .	7
2.1.3	Analyse des 3. Axioms: actio = reactio . . . . .	7
2.1.4	Abschließende Diskussion . . . . .	8
2.2	Grundbegriffe und Erhaltungssätze . . . . .	9
2.2.1	Impuls . . . . .	9
2.2.2	Drehimpuls . . . . .	10
2.3	Arbeit und Energie . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Anwendungen I</b>	<b>20</b>
3.1	Elementare Bewegungsprobleme . . . . .	20
3.1.1	Eindimensionale Probleme ( $E = T + U = \text{konst.}$ ) . . . . .	20
3.1.2	Reibung ( $\dot{E} \neq 0$ ) . . . . .	29
3.1.3	Diagramme . . . . .	33
3.2	Oszillatorprobleme I . . . . .	40
3.2.1	Motive für das Studium des harmonischen Oszillators . . . . .	40
3.2.2	Der gedämpfte harmonische Oszillator (1-dim.) . . . . .	41
3.2.3	Der getriebene harmonische Oszillator - erzwungene Schwingungen . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>48</b>
<b>5</b>	<b>Wichtige Fundamental Konstanten</b>	<b>50</b>

# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 Inhaltsübersicht

I. Einführung

II. Newton'sche Mechanik

II.1 Axiome

II.2 Grundbegriffe + Erhaltungsgrößen

III. Anwendung I

III.1 Elementare Bewegungsprobleme

III.2 Oszillatorprobleme

III.3 Stoßprobleme

IV. Lagrange'sche Mechanik

IV.1 Zwangsbedingung und generalisierte Koordinaten

IV.2 Hamilton'sches Prinzip und Lagrange'sche Gleichung 2. Art

IV.3 Diskussion + Erweiterung + Ergänzung

V. Anwendung II

V.1 Keplerproblem

V.2 Beschleunigte Bezugssysteme

V.3 Starre Körper

V.4 Gekoppelte Oszillatoren

VI. Hamilton Mechanik

## 1.2 Bemerkungen zum Wesen der Theoretischen Physik

### Aufgaben der TP:

Formulierung, Analyse und Anwendung mathematischer Gesetze und Modelle zur Beschreibung physikalischer Phänomene und Prozesse (Mathematik ist die Sprache der Physik)

Werkzeuge der TP: Mathematik, Computer

Ziele und Nutzen der TP:

- Herausarbeiten weniger "roter Fäden" durch das Gebäude der Physik
- Auffinden allgemeiner Grundprinzipien
- Überprüfung und Interpretation empirischer Daten

"Kanon der TP":

- Klassische Mechanik → "Teilchen" ('Massenpunkte')
- Klassische Elektrodynamik → "Felder" (Wellen)
- Quantenmechanik → bewältigt Dualismus Welle-Teilchen
- Statistische Mechanik/Thermodynamik → Beschreibung von "Makrophänomenen" (typischerweise mit  $10^{23}$  Teilchen)

## 1.3 Vorbemerkung zur Klassischen Mechanik

### Definition:

"Mechanik ist die Lehre von der Bewegung materieller Gegenstände im Raum und den diese beherrschenden Gesetzmäßigkeiten" [3]

### Analyse:

- (i) Materielle Gegenstände → mit (träger) Masse ausgestattete Objekte  
Massenpunkte  $\Leftrightarrow$  Punktförmige Teilchen mit Masse
- (ii) Bewegung im Raum: erfordert Klärung der Begriffe Raum + Zeit

Eigenschaften des Raums: (im Rahmen der Kl. Mechanik)

- drei-dimensional
- allseitig unbegrenzt
- enthält Punkte, Geraden, Ebenen
- Parallelenaxiom
- homogen + isotrop

→ dreidimensionaler Euklidischer Raum

→ kartesische Koordinatensysteme definierbar

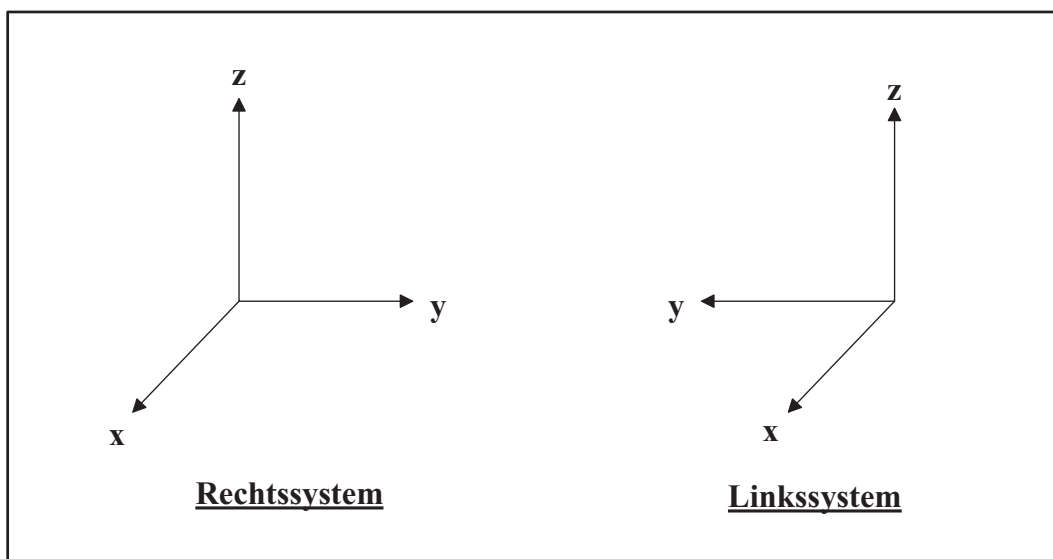


Abbildung 1.1: Kartesisches Rechts- / Linkssystem

⇒ Beschreibung von Gegebenheiten im Raum → Vektorrechnung im  $\mathcal{R}^3$

Eigenschaften der Zeit:

- homogener Parameter

→ Bewegung im Raum wird beschrieben durch:

- Bahnkurve (Trajektorie)  $\mathbf{r}(t)$
- Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$
- Beschleunigung  $\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$

⇒ 'Kinematik': mathematische Beschreibung von Bewegungen ohne Berücksichtigung der verursachenden Kräfte

Erweiterungen des Raumbegriffs:

- Spezielle Relativitätstheorie  $\rightarrow$  4-dim. (Raumzeit) "Minkowski" Raum
- Allgemeine Relativitätstheorie  $\rightarrow$  (lokal) gekrümmte Räume
- Quantenmechanik  $\rightarrow$   $\infty$ -dim. Hilbert-Raum

(iii) Gesetzmäßigkeiten  $\rightarrow$  "Dynamik":

Was bewirkt die Bewegung von Objekten?

$\rightarrow$  Newton'sche Axiome (Kraftbegriff)

$\rightarrow$  insbesondere Bewegungsgleichung (BWGl)  $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$

$$\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} \stackrel{DGL+AB}{\Leftrightarrow} \mathbf{r}(t)$$

$\rightarrow$  weitere Grundbegriffe (Impuls, Drehimpuls, Arbeit, Energie,...)

Darüber hinaus:

- Alternative (äquivalente) Formulierungen der KM ("Lagrange", "Hamilton")
- beruhen auf übergeordnetem "Wirkungsprinzip" (jenseits der KM gültig)
- ebnen den Weg zur QM
- sind (teilweise) flexibler in der Handhabung und praktischen Anwendung

# Kapitel 2

## Newton'sche Mechanik

### 2.1 Die Newton'schen Axiome (1687)

**Axiom:** Keines Beweises bedürftiger Grundsatz; Näheres: [3], Kap. 3.1

**Lex prima:** "Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seine Zustand zu ändern."

**Lex secunda:** "Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher die Kraft wirkt."

**Lex tertia:** "Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und entgegengesetzter Richtung."  
(actio = reactio)

**Lex quarta:** Kräfte addieren sich wie Vektoren (Kräfteparallelogramm)

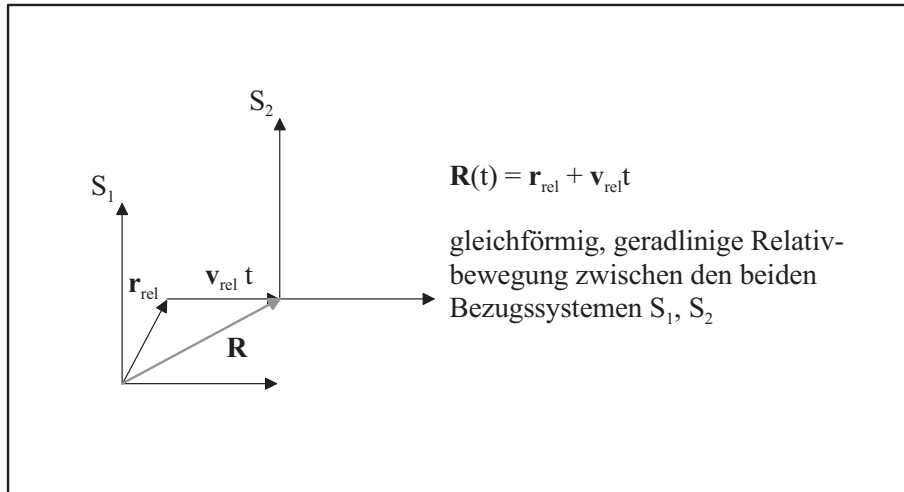
**Definition:** Impuls ("Bewegungsgröße"); Näheres zu Newton's Formulierung der Grundprinzipien: [3], Kap. 3.2; [6], §1

$$\mathbf{p} := m \cdot \mathbf{v}$$

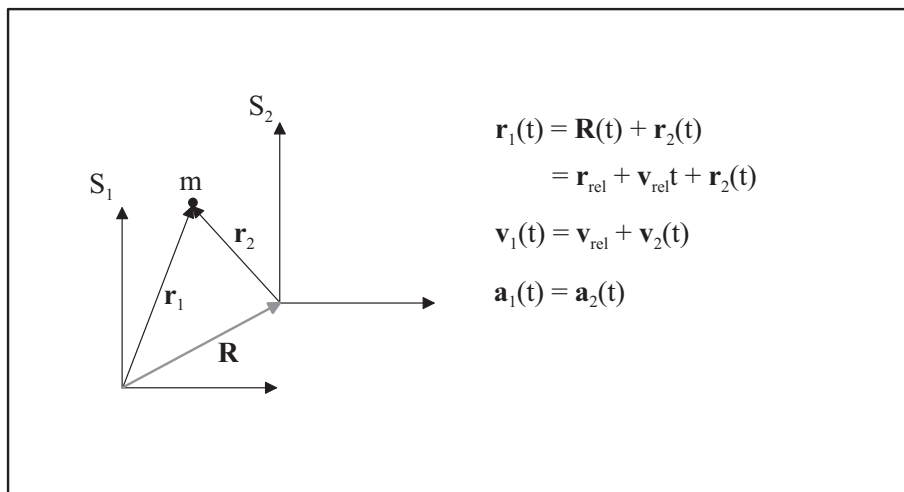
### 2.1.1 Analyse des 1. Axioms: Inertialsystem (IS) und Galilei-Transformation (GT)

”Galilei’sches Trägheitsprinzip”

falls  $\mathbf{F} = 0 \longrightarrow \mathbf{p} = \text{konst.}$



Beschreibung eines MPs aus Sicht von  $S_1$  und  $S_2$ :



**Inertialsystem**  $\iff$  Bezugssystem, in dem sich ein kräftefreier Körper geradlinig, gleichförmig bewegt. Falls  $\mathbf{F} = 0 \longrightarrow \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = 0$

**Galilei-Transformation**  $\iff (\mathbf{r}_1, t_1) \longrightarrow (\mathbf{r}_2, t_2)$   
mit  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{\text{rel}} - \mathbf{v}_{\text{rel}}t$  und  $t_2 = t_1 = t$  (Näheres: Übung 1.4)



### 2.1.2 Analyse des 2. Axioms: Grundlegende BWGl gilt im IS

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$$

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}$$

falls  $\dot{m} = 0 \longrightarrow$

$$m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$$

$\dot{m} \neq 0$ : z.B. klassisches Raketenproblem, spezielle Relativitätstheorie

Folgerung:

(i)  $0 = \mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} \implies \mathbf{p} = \text{konst.} \longleftrightarrow 1. \text{ Axiom}$

(ii) 'Forminvarianz' der BWGl unter GTs  $S_1 : m\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1 = m\mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_2 : S_2$

Beispiel: senkrechter Wurf aus fahrendem Zug ( $\mathbf{v}_{Zug} = \text{konst.}$ )

$S_1 \curvearrowright$

$S_2 \updownarrow$

### 2.1.3 Analyse des 3. Axioms: actio = reactio

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{F}_{12} : \text{Kraft von Teilchen 1 auf Teilchen 2} \\ \mathbf{F}_{21} : \text{Kraft von Teilchen 2 auf Teilchen 1} \end{array} \right\} \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

$$\xrightarrow{2. \text{ Axiom}} m_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = -m_2\mathbf{a}_2$$

$$\implies \frac{m_1}{m_2} = \frac{|\mathbf{a}_2|}{|\mathbf{a}_1|} \equiv \frac{a_2}{a_1} \longrightarrow \text{definiertem Massenverhältnis}$$

$\rightarrow$  absolute Skala wird durch Festlegung der Standardmasse  $[m] = 1\text{kg}$  eingeführt

$\rightarrow$  'träge Masse': (skalares) Maß für den Widerstand gegen Bewegungsänderung

$\rightarrow$  Kraft: abgeleitete Größe (nach Newton II)  $[\mathbf{F}] = 1 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ N}$

Mögliche Situationen:

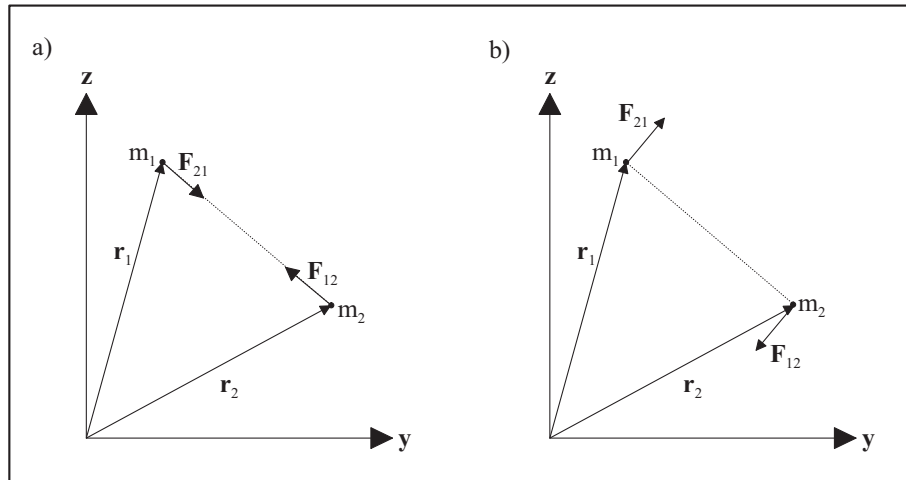


Abbildung 2.1: Die Kraftvektoren können auf einer gemeinsamen Geraden liegen oder parallel zu einander sein, müssen aber in unterschiedliche Richtung zeigen

- 3. Axiom erfüllt für Gravitations- und Coulombwechselwirkung
- Darüber hinaus gilt es i.a. nur in modifizierter Form [5], Kap. 3.1.6

### 2.1.4 Abschließende Diskussion

- (i) Physikalischer Ursprung von Kräften wird in KM nicht behandelt
- (ii) Grundproblem der KM: Lsg. der gewöhnlichen DGl 2. Ordnung  $m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  (+ AB's) (Analytische Lösungsverfahren sind nur für Spezialfälle bekannt, ein numerisches Lösungsverfahren gibt es in [1] KM, Kap. 2.3)
- (iii) Erhaltungssätze folgen als Konsequenz der Axiome

## 2.2 Grundbegriffe und Erhaltungssätze

### 2.2.1 Impuls

a) Einfachste Situation: ein kräftefreier MP:

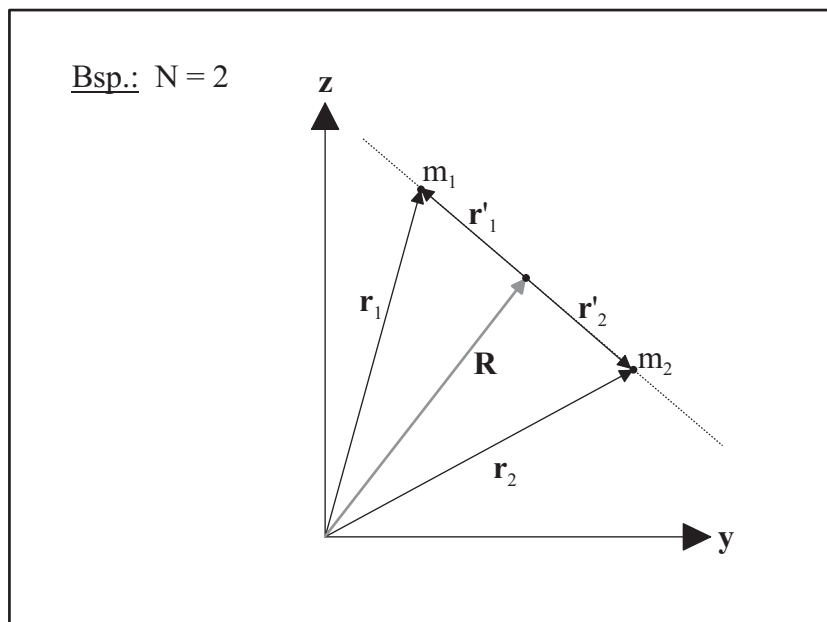
$$\mathbf{F} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{p} = \text{konst.} = m \cdot \mathbf{v}_0 \quad \text{Impulserhaltung}$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} \cdot t \quad \text{geradlinig, gleichförmige Bewegung}$$

b) System von N MPs:

- 'innere Kraft'  $\mathbf{f}_{ki}$ : Wechselwirkung zwischen zwei MPs (Kraft von k auf i)
- 'äußere Kraft'  $\mathbf{F}_i$ : äußerer Einfluß auf den i-ten MP
- 'Abgeschlossenes System': Keine äußeren Kräfte ( $\mathbf{F}_i = 0$  für  $i = 1, \dots, N$ )
- 'Offenes System':  $\mathbf{F}_i \neq 0$  für mindestens ein  $i \in \{1, \dots, N\}$
- Gesamtmasse:  $M = \sum_{i=1}^N m_i$
- Position des 'Schwerpunktes' (SP) (auch Massenmittelpunkt):  

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{r}_i$$
- SP-Geschwindigkeit:  $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{v}_i$
- SP (Gesamt-) Impuls:  $\mathbf{P} = M \cdot \mathbf{V} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i$
- Position eines MPs bzgl. SP:  $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$



◁ BWGl für k-ten MP:

$$\dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{F}_k + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{ik}$$

beachte :  $\mathbf{f}_{ik} = -\mathbf{f}_{ki} \longrightarrow \mathbf{f}_{kk} = 0$

$$\longrightarrow \sum_{k=1}^N \dot{\mathbf{p}}_k = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k + \sum_{i,k=1}^N \mathbf{f}_{ik}$$

$$\parallel \parallel \parallel$$

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_{ext} + 0$$

**”Impulssatz / SP-Satz”**

Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse in ihm vereinigt wäre und alle äußeren Kräfte an ihm angreifen würden.

falls  $\mathbf{F}_{ext} = 0 \implies \dot{\mathbf{P}} = 0 \longrightarrow \mathbf{P} = \text{konst.}$

Impulserhaltung (gilt in abgeschlossenen Systemen)

In einem abgeschlossenen System kann man von einem 'raumfesten' IS durch eine GT in das (inertiale) 'SP-System' übergehen

**2.2.2 Drehimpuls**

a) ein MP:

Definition: Drehimpuls (= Moment des Impulses)

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$$

$$|\mathbf{l}| = l = r \cdot p \cdot \sin \gamma$$

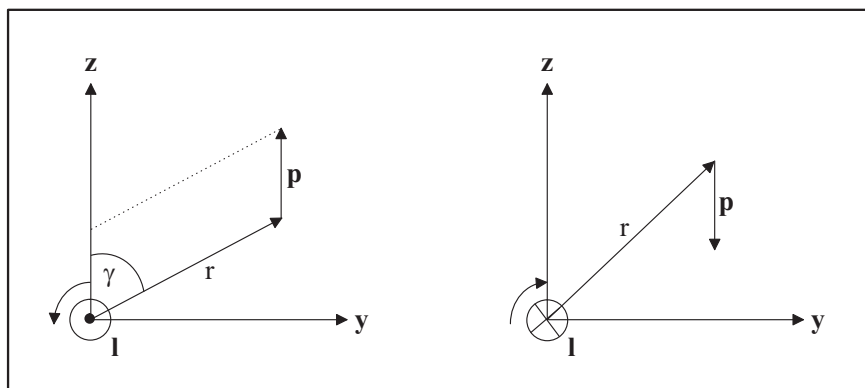


Abbildung 2.2: Im linken Bild zeigt der Drehimpulsvektor aus dem Bald heraus, im rechten Bild hinein

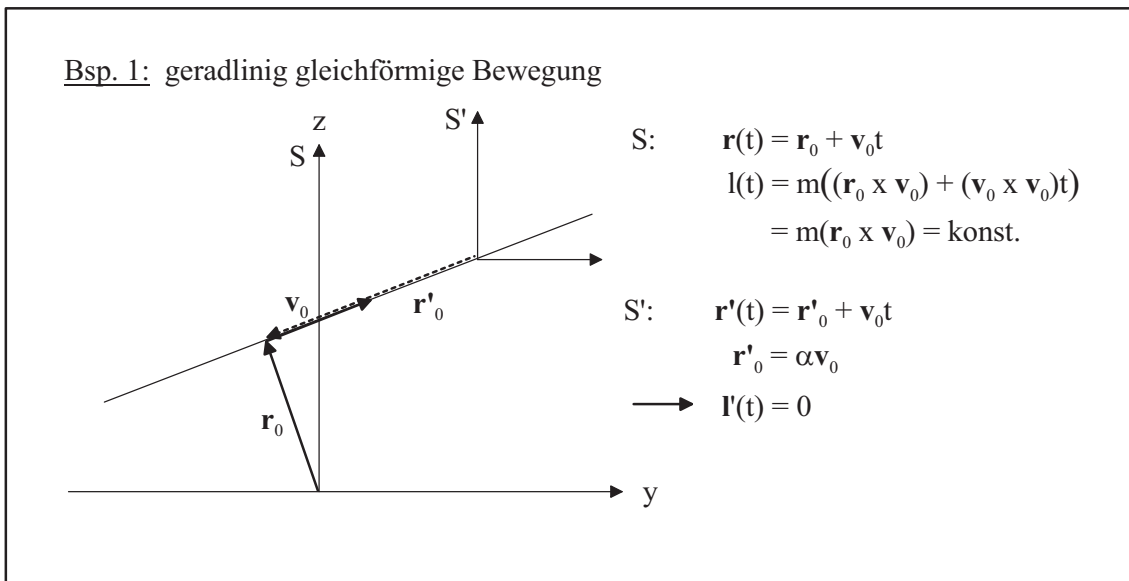


Abbildung 2.3: Bewegung von  $S$  transformiert in  $S'$

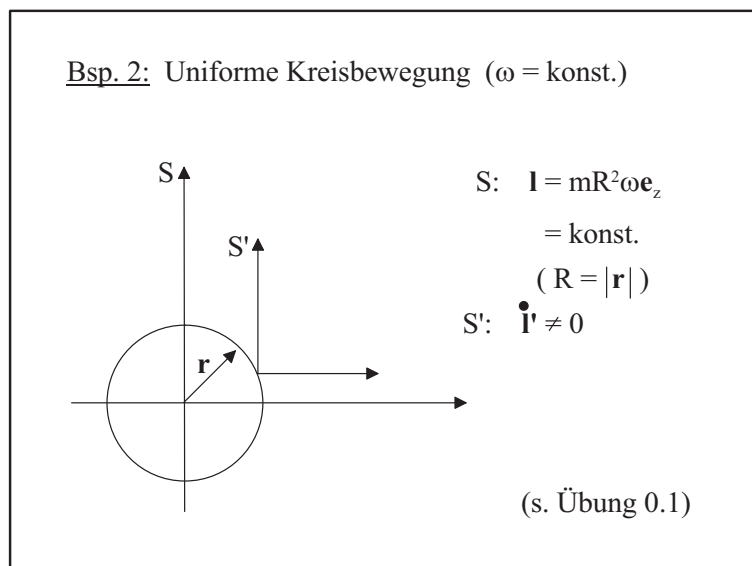


Abbildung 2.4: Uniforme Kreisbewegung

Bemerkung: Vollständige Angabe von  $\mathbf{l}$  verlangt Festlegung des Bezugspunktes für die Momentbildung (gilt für jedes Moment eines Vektors)

$$\triangleleft \quad \dot{\mathbf{l}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = m(\mathbf{v} \times \mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Definition: Drehmoment  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

$\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{M}$	Drehimpulssatz
---------------------------------	----------------

falls $\mathbf{M} = 0 \implies \dot{\mathbf{l}} = 0, \mathbf{l} = \text{konst.}$	Drehimpulserhaltung
--	---------------------

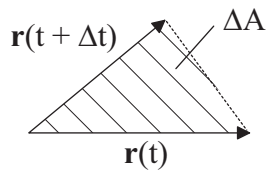
$$\mathbf{M} = 0 \quad \text{falls} \quad \begin{array}{l} (i) \quad \mathbf{F} = 0 \\ (ii) \quad \mathbf{F} = F\mathbf{e}_r : \text{Zentralkraft } \mathbf{F} \parallel \mathbf{r} \end{array}$$

Zwei Aspekte der Drehimpulserhaltung:

(i) Erhaltung der Richtung  $\longrightarrow$  ebene Bewegung

(ii) Erhaltung des Betrages:

$\triangleleft$



$$\begin{aligned} \Delta A &\approx \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t + \Delta t)| \\ &= \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times [\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)]| \\ \frac{\Delta A}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \left| \mathbf{r}(t) \times \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \right| \\ \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} &= \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| \\ \dot{\mathbf{A}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{2m} \mathbf{l} \end{aligned}$$

(als Richtung wird die Flächennormale festgelegt)

### 'Flächengeschwindigkeit'

$|\dot{\mathbf{A}}| = \text{konst.} \longrightarrow$  Flächensatz

("Gleiche Zeiten, gleiche Flächen")

b) System von N MPs:

Definition: Gesamtdrehimpuls

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}(t) &= \sum_{k=1}^N \mathbf{l}_k(t) \\
 &= \sum_k (\mathbf{r}_k(t) \times \mathbf{p}_k(t)) \\
 \longrightarrow \mathbf{L} &= \sum_k (\mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{p}}_k) \\
 &= \sum_{k=1}^N (\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k) + \sum_{i,k=1}^N (\mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_{ik}) \\
 \underline{\text{NR:}} \quad \sum_{i,k} (\mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_{ik}) &= \sum_{i,k} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ki}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \{(\mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_{ik}) + (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ki})\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \{(\mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_{ik}) - (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ik})\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{f}_{ik}\} = 0, \quad \text{falls} \\
 \mathbf{f}_{ik} &= \mathbf{f}_{ik} \cdot (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)
 \end{aligned}$$

( $\mathbf{f}_{ik}$  zeigt in Richtung von  $(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)$ ; vgl. Skizze auf Seite 8)

$$\text{Gesamtdrehmoment} \quad \mathbf{M} = \sum_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k) = \sum_k \mathbf{M}_k$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}} \quad \text{Drehimpulserhaltung}$$

$$\text{falls } \mathbf{M} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{L}} = 0 \\ \mathbf{L} = \text{konst.} \end{array} \right\} \quad \text{Drehimpulserhaltung}$$

(gilt in abgeschlossenen Systemen)

Drehimpuls + Schwerpunkt: (vgl. Skizze Seite 9)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_k &= \mathbf{r}'_k + \mathbf{R} \quad ; \quad \mathbf{v}_k = \mathbf{v}'_k + \mathbf{V} \\
 \longrightarrow \mathbf{L} &= \sum_k m_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k) \\
 &= \sum_k m_k \{ (\mathbf{r}'_k + \mathbf{R}) \times (\mathbf{v}'_k + \mathbf{V}) \} \\
 &= \underbrace{\sum_k m_k (\mathbf{R} \times \mathbf{V}) + (\mathbf{R} + \mathbf{v}'_k) \times (\mathbf{r}'_k \times \mathbf{V}) + (\mathbf{r}'_k \times \mathbf{v}'_k)}_{\hookrightarrow M(\mathbf{R} \times \mathbf{V}) = \mathbf{R} \times \mathbf{P} \equiv \mathbf{L}_{SP}} \\
 \triangleleft \sum_k m_k \mathbf{r}'_k &= \sum_k m_k (\mathbf{r}_k - \mathbf{R}) = \sum_k m_k \mathbf{r}_k - M\mathbf{R} = M\mathbf{R} - M\mathbf{R} = 0 \\
 \longrightarrow \sum_k m_k \mathbf{v}'_k &= \frac{d}{dt} \sum_k m_k \mathbf{r}'_k = 0
 \end{aligned}$$

$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{SP} + \mathbf{L}'$	wobei $\mathbf{L}_{SP} = \mathbf{R} \times \mathbf{P}$ , $\mathbf{L}' = \sum \mathbf{l}'_k = \sum m_k (\mathbf{r}'_k \times \mathbf{v}'_k)$
--	---

$  \begin{aligned}  \mathbf{M} &= \sum_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k) = \sum_k \{ (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_k) \times \mathbf{F}_k \} \\  &= \mathbf{R} \times \sum_k \mathbf{F}_k + \sum_k (\mathbf{r}'_k \times \mathbf{F}_k) = \mathbf{R} \times \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{M}'_{ext} \\  &= \mathbf{M}_{SP} + \mathbf{M}'_{ext}  \end{aligned}  $
---

$$\xrightarrow{\text{Drehimpulssatz}} \dot{\mathbf{L}}_{SP} + \dot{\mathbf{L}}_{ext} = \mathbf{M}_{SP} + \mathbf{M}_{ext}$$

Wegen  $\dot{\mathbf{L}}_{SP} = M(\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{V}}) = \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{P}} \stackrel{SP\text{-Satz}}{=} \mathbf{R} \times \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{M}_{SP}$  folgt

$\dot{\mathbf{L}}_{SP} = \mathbf{M}_{SP}$	Drehimpulssatz für SP
---	-----------------------

$\dot{\mathbf{L}}' = \mathbf{M}'_{ext}$	Drehimpulssatz für Teilchensystem bzgl. SP
---	--

(hat die selbe Form wie der ursprüngliche Drehimpulssatz, obwohl das SP-System i.a. kein Inertialsystem ist)



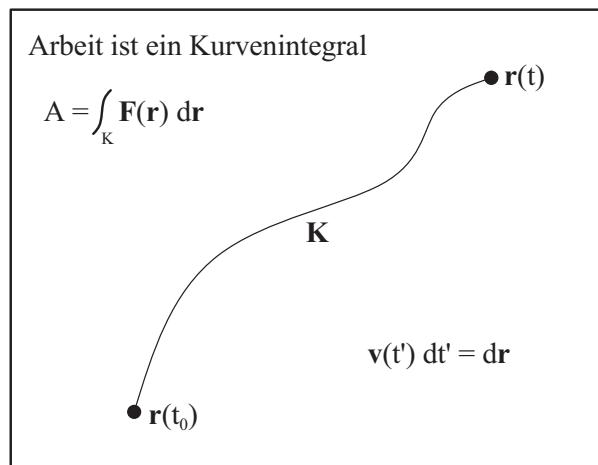
## 2.3 Arbeit und Energie

a) Ein MP:

Definition: Sei  $\mathbf{r}(t)$  die in  $[t_0, t]$  durchlaufene Bahn

$$A := \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t'), t') \cdot \mathbf{v}(t') dt' \quad \text{Arbeit}$$

Falls Kraft "Vektorfeld"  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r)$  ist: [4], Kap. 4.2



Diskussion:

- (i) Falls  $\mathbf{F} = \text{konst.}$  und Weg geradlinig  $\longrightarrow A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$
- (ii)  $A = 0$  falls  $\mathbf{F} \perp \mathbf{r}$

Beispiel 1: Anheben einer Masse  $m \perp$  zur Äquipotentialfläche des Schwerfeldes  $\longrightarrow A = 0$  bei  $v_{\parallel} = 0$

Beispiel 2: Uniforme Kreisbewegung

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (R \cdot \cos \omega t, R \cdot \sin \omega t) \\ \mathbf{v} &= (-R \cdot \omega \cdot \sin \omega t, R \cdot \omega \cdot \cos \omega t) \\ \mathbf{a} &= (-R \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t, -R \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t) \\ &= -\omega^2 \cdot \mathbf{r} \\ \longrightarrow m \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{F}(\mathbf{r}) \\ &= -m \cdot \omega^2 \cdot \mathbf{r} \\ \longrightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0 &\iff \mathbf{F} \perp \mathbf{v} \implies A = 0 \end{aligned}$$

$$(iii) \text{ "Arbeit" } [A] = 1 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = 1 \text{Nm} = 1 \text{Joule}$$

$$(iv) P := \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t'), t') \cdot \mathbf{v}(t') dt' = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) \cdot \mathbf{v}(t)$$

$$\text{"Leistung" } [P] = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \text{Watt}$$

$$\begin{aligned} \triangleleft \quad A &= \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t'), t') \cdot \mathbf{v}(t') dt' \\ &= m \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{v}}(t') \cdot \mathbf{v}(t') dt' \\ &= \frac{m}{2} \int_{t_0}^t \frac{d}{dt'} (v^2(t')) dt' \\ &= \frac{m}{2} (v^2(t) - v^2(t_0)) \\ &= \frac{1}{2m} (\mathbf{p}^2(t) - \mathbf{p}^2(t_0)) \end{aligned}$$

Definition: kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{p^2}{2m} \geq 0$$

$$\longrightarrow T(t) = T_0(t) + A(t_0 \rightarrow t) \quad \text{'A-T-Relation'}$$

Definition: konservatives Kraftfeld

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &:= -\nabla U(\mathbf{r}) \\ \iff \int_{K_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' &= \int_{K_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ \iff \oint_K \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{'Beweis'}}{\implies} \int_{K_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' &= - \int_{K_1} \nabla U(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ &= - \int_{r_0}^r dU = U(\mathbf{r}_0) - U(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Rückweg wird gezeigt unter der Zuhilfenahme des Mittelwertsatzes. Außerdem folgt:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = 0$$

Rückweg wird gezeigt mit dem Integralsatz von Stokes:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A} = \oint_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad [\text{Lücke, Kap. 4.3}]$$

Konservatives Kraftfeld:

$\mathbf{F} = -\nabla U$	$\iff$	$\nabla \times \mathbf{F} = 0$
$\Downarrow$	$\swarrow \searrow$	$\Downarrow$
$\int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$	$\iff$	$\oint_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$

$$U(\mathbf{r}) = - \int^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r} \quad \text{"potentielle Energie"}$$

Übliche Festlegung der unbestimmten Konstanten durch  $U(\mathbf{r}) \xrightarrow{\mathbf{r} \rightarrow \infty} 0$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \quad A &= U(1) - U(2) = T(2) - T(1) \\ \iff \quad T(1) + U(1) &= T(2) + U(2) \end{aligned}$$

$E = T + U = \text{konst.}$	Energieerhaltung
-----------------------------	------------------

Allgemeine Situation:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_{\text{konservativ}} + \mathbf{F}_{\text{dissipativ}} \\ \nabla \times \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F}_{\text{diss}} \neq 0 \end{aligned}$$

$\triangleleft$  Newton II:

$$\begin{aligned} m \cdot \dot{\mathbf{v}} &= -\nabla U(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_{\text{diss}} \\ \mathbf{F}_{\text{diss}} &= m \cdot \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \nabla U \cdot \mathbf{v} \\ \iff \mathbf{F}_{\text{diss}} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} v^2 + U(\mathbf{r}(t)) \right) \end{aligned}$$

$\frac{d}{dt} (T + U) = \frac{dE}{dt} = \mathbf{F}_{\text{diss}} \cdot \mathbf{v}$	"allg. Energiesatz"
--	---------------------

Definition:  $A_{\text{diss}} = \int \mathbf{F}_{\text{diss}} \cdot \mathbf{v} dt \longrightarrow \frac{dA_{\text{diss}}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{diss}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{P}_{\text{diss}}$

b) System von N MPs:

Ausgangspunkt: BWGl für k-ten MP:  $\dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{F}_k + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{ik}$

Einschränkungen:

- (i)  $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k(\mathbf{r}_k) = -\nabla_k \cdot U_k(\mathbf{r}_k)$  (äußere Kräfte sind konservativ)
- (ii)  $\mathbf{f}_{ik} = \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) = \mathbf{f}_{ki}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)$  (hängen nur jeweils von  $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)$  ab)
- (iii)  $\nabla_k \times \mathbf{f}_{ik} = \nabla_i \times \mathbf{f}_{ki} = 0$  (sind konservativ)

$$\longrightarrow \mathbf{f}_{ik} = -\nabla_k V_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k), \mathbf{f}_{ki} = -\nabla_i V_{ki}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)$$

Konservative innere Kräfte zwischen zwei MPs können auf ein gemeinsames Potential zurückgeführt werden (d.h  $V_{ik} = V_{ki}$ )

$\nabla_k V_{ik} = -\nabla_k V_{ki}$	"zwei Teilchen WW"
--------------------------------------	--------------------

$$\begin{aligned} \triangleleft \quad \dot{\mathbf{p}}_k &= \mathbf{F}_k + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{ik} \\ \longrightarrow \sum_k \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{v}_k &= \sum_k m_k \cdot \dot{\mathbf{v}}_k \cdot \mathbf{v}_k - \sum_k \mathbf{F}_k \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{v}_k \\ RS : &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_k m_k \mathbf{v}_k^2 + \sum_k \nabla_k U_k(\mathbf{v}_k) \cdot \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_k \left( \frac{m_k}{2} \mathbf{v}_k^2 + U_k(\mathbf{r}_k(t)) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \sum_k (T_k + U_k) = \frac{d}{dt} (T + U) \\ LS : &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \left( \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{v}_k + \mathbf{f}_{ki}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{v}_i \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \left( \mathbf{f}_{ik} \cdot \mathbf{v}_k - \mathbf{f}_{ik} \cdot \mathbf{v}_i \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \mathbf{f}_{ik} \cdot (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i) \end{aligned}$$

Angewandte Transformation :  $\mathbf{r}_{ik} := \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$   
 $\mathbf{v}_{ik} := \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_k$

$$\begin{aligned}\nabla_i V_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) &= \nabla_{ik} V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) = -\nabla_k V_{ik} \\ \hookrightarrow \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) &= -\nabla_k V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) = \nabla_{ik} V_{ik}(\mathbf{r}_{ik})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\longrightarrow RS : &= -\frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) \cdot \mathbf{v}_{ik} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \nabla_{ik} V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) \cdot \frac{d\mathbf{r}_{ik}}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}(t)) \\ &= -\frac{d}{dt} V\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\frac{d}{dt} (T + U + V) &= 0 \\ T + U + V &= \text{konst.}\end{aligned}} \longrightarrow \text{Energieerhaltung}$$

Die Beträge der ges. Energie E:

- $T = \sum_k T_k$ : kinetische Energie des Teilchensystems
- $U = \sum_k U_k$ : potentielle Energie aufgrund äußerer Kräfte
- $V = \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} V_{ik} = \sum_{i < k} V_{ik}$ : 'interne' WW-Energie

Beispiele:

$$\begin{aligned}\underline{N = 2} : \quad V &= \frac{1}{2} (V_{12} + V_{21}) \stackrel{V_{12} \equiv V_{21}}{=} V_{12} \\ \underline{N = 3} : \quad V &= \frac{1}{2} (V_{12} + V_{13} + V_{23} + V_{21} + V_{31} + V_{32}) \\ &= \underbrace{V_{12} + V_{13} + V_{23}} \\ &\implies \sum_{i < k} V_{ik}\end{aligned}$$

# Kapitel 3

## Anwendungen I

### 3.1 Elementare Bewegungsprobleme

#### 3.1.1 Eindimensionale Probleme ( $E = T + U = \text{konst.}$ )

a) Qualitative Vorbemerkung:

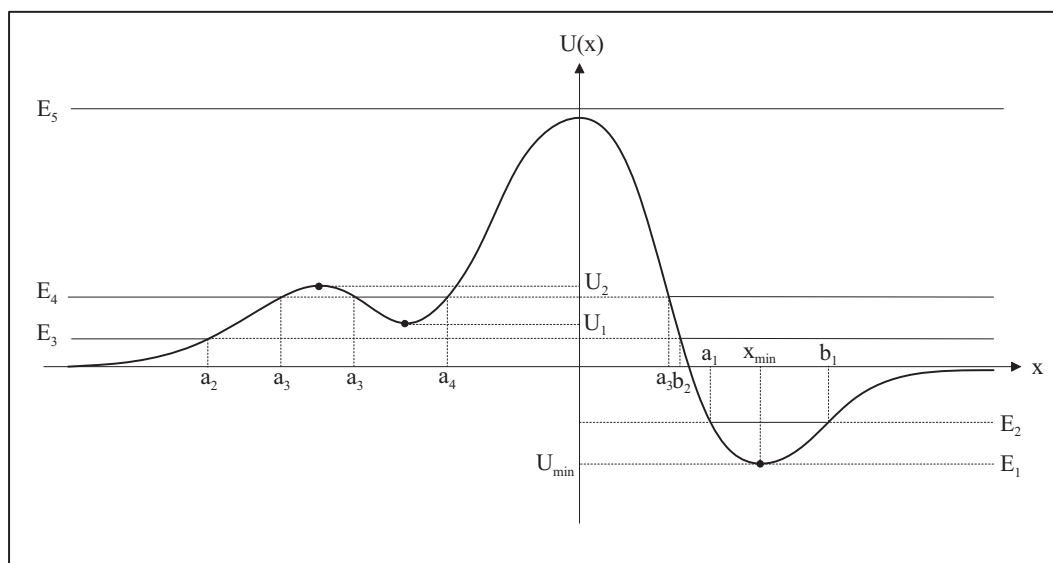


Abbildung 3.1: Potential

$$E = T + U \iff E - U(x) = T > 0$$

$\iff$

$$E \geq U(x)$$

- (i)  $E < U_{min}$  : nicht möglich
- (ii)  $E_1 = U_{min}$  : ruhender MP bei  $x = x_{min}$
- (iii)  $U_{min} < E_2 < 0$  : gebundene (finite) Bewegung in  $[a_1, b_1]$   
 $\dot{x}(a_1) = v(a_1) = v(b_1) = \dot{x}(b_1) = 0$ ;  $a_1, b_1$  Umkehrpunkte
- (iv)  $0 < E_3 < U_1$  : ungebundene (infinite) Bewegung entweder in  $(-\infty, a_2]$   
oder in  $[b_2, \infty)$
- (v)  $U_1 < E_4 < U_2$  : finite Bewegung in  $[a_3, b_3]$  oder infinite in  $(-\infty, a_3]$   
oder  $[b_3, \infty)$
- (vi)  $U_{max} < E_5$  : infinite Bewegung in  $(-\infty, \infty)$

Eine Analoge Diskussion ist möglich im dreidimensionalen Raum im Falle eines Zentralkraftproblems

b) Quantitative Vorbemerkung:

$$E = T + U \iff v^2(t) = \frac{2(E - U(x))}{m}$$

$$\iff \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2(E - U(x))}{m}}$$

Lösung der DGl durch 'Variablentrennung':

$$\pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2(E - U(x))}{m}}} = \int dt$$

$$\iff t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int [E - U(x)]^{-\frac{1}{2}} dx + konst. = t(x)$$

→ Umkehrung liefert  $x(t)$

→ Energiesatz = 1. Integral der BWGl

c) Mathematische Vorbemerkung zur gewöhnlichen DGl:

Siehe dazu [4], Kap.5; [1], Kap. 3.2, Anhang C.3; [5], Mathematische Ergänzungen (CD), Kap. 2 und 6

- (i) Hinreichende Existenz- und Eindeutigkeitsbedingungen:  $\triangleleft \dot{x} = f(x, t)$   
gewöhnliche DGl 1. Ordnung (explizit)

Falls  $f$  stetig (partiell) differenzierbar ist, so existiert (für jedes Paar von Anfangswerten  $(x_0, t_0)$ ) eine eindeutige Lösung der DGl., d.h.

$$\exists x(t) : \dot{x} = f(x(t), t) \quad \text{mit} \quad x(t_0) = x_0$$

(ii) Analoges gilt für DGI-Systeme:

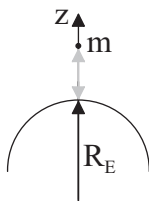
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n, t) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, t)\end{aligned}$$

(iii) Eine DGI n-ter Ordnung kann man auf ein System von DGI's 1. Ordnung zurückführen, insbesondere:

$$\begin{aligned}\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) &\implies \dot{x} = v \\ &\dot{v} = f(x, v, t)\end{aligned}$$

(iv) Systematische Lösungsmethoden sind nur für spezielle Typen von DGI's bekannt (insb. lineare DGI's mit konstanten Koeffizienten))

d) Bewegung im homogenen Schwerfeld (der Erde):



$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -m^* g \mathbf{e}_z \\ g &= \frac{M_E \cdot \gamma}{R_e^2} \\ &= 9,81 \frac{m}{s^2} \quad (\text{Gravitationsbeschleunigung})\end{aligned}$$

(Werte Siehe Kapitel 5)

**Frage 1:** Wie kommt man vom allg. Gravitationsgesetz zum homogenen Schwerfeld der Erde?

**Frage 2:** Träge und Schwere Masse

→ empirisch:  $m = m^*$  (mit Messgenauigkeit  $\frac{\Delta m}{m} = \frac{m-m^*}{m} \lesssim 10^{-10}$ )

→ theoretisch:  $m = m^*$  Ist eine Grundannahme der Allgemeinen Relativitätstheorie (Äquivalenzprinzip: Gravitationskräfte sind äquivalent zu Trägheitskräften)



**Exkurs zu Frage 1:** Ausgangspunkt: Newton's Gravitationsgesetz

$$\mathbf{F}_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\mathbf{F}_{12}$$

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

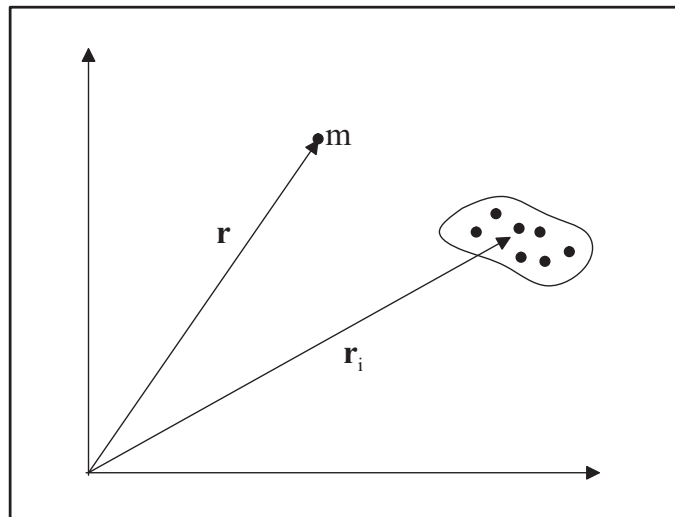
(zur Veranschaulichung siehe hierzu Abbildung 2.1)

$$\nabla_1 \times \mathbf{F}_{21} = \nabla \times \mathbf{F}_{12} = 0$$

→ potentielle Energie:

$$U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \equiv U_{12} = U_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

(Prüfe:  $\nabla_1 U_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{12} = -\nabla_2 U_{12}$ )

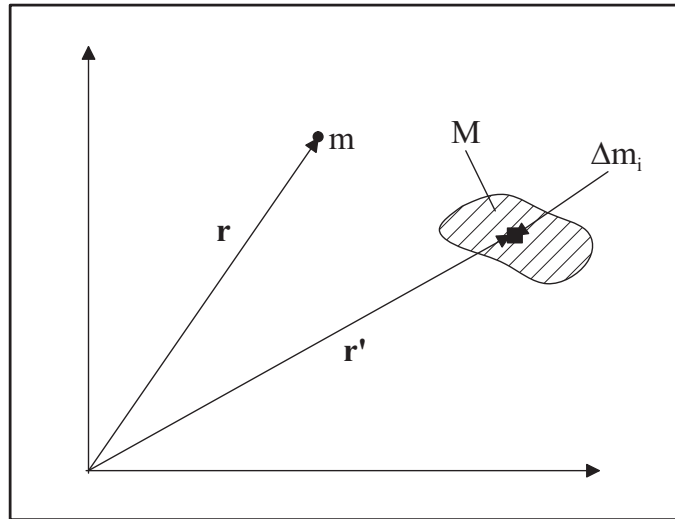


Schritte:

- Potentielle Energie des MPs  $m$  aufgrund der diskreten Massenverteilung  $(m_1, \dots, m_N)$

$$U(\mathbf{r}) = -\gamma m \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

- Potentielle Energie aufgrund kontinuierlicher Massenverteilung



$$\begin{aligned}
 m_i \equiv \Delta m_i &\approx \rho(\mathbf{r}_i) \Delta V_i \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} \rho(\mathbf{r}') dV' = \rho(\mathbf{r}') d^3 r' \\
 &\longrightarrow M = \int_V \rho(\mathbf{r}') d^3 r' \\
 &\longrightarrow U(\mathbf{r}) = -\gamma m \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'
 \end{aligned}$$

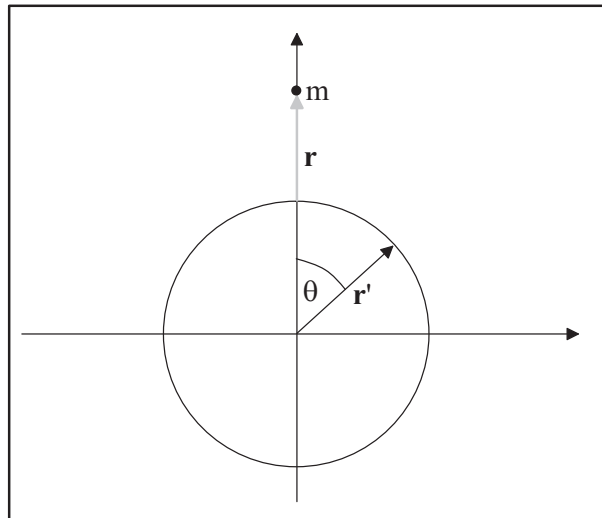
- Annahme: homogene Massenverteilung  $\rho(\mathbf{r}') = \rho_0$   
 Auswertung des Integrals:

$$\begin{aligned}
 d^3 r' &= r'^2 dr' \sin \Theta' d\Theta' d\phi' \\
 \mathbf{r} &= (0, 0, z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \longrightarrow U(\mathbf{r}) &= -\gamma m \rho_0 \int \frac{d^3 r'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Theta'}} \\
 &= -\gamma m \rho_0 \int_0^{R_E} dr' r'^2 \int_0^\pi \frac{\sin \Theta' d\Theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Theta'}} \int_0^{2\pi} d\phi'
 \end{aligned}$$

1. Substitution:

$$\begin{aligned}
 x &= \cos \Theta' ; & x(0) &= 1 \\
 dx &= -\sin \Theta' d\Theta' ; & x(\pi) &= -1
 \end{aligned}$$



$$U(\mathbf{r}) = -2\pi\gamma m\rho_0 \int_0^{R_E} dr' r'^2 \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'x}}$$

Bemerkung:

Zu diesem Zwischenergebnis gelangt man direkt durch die Zerlegung des Volumenelements  $d^3r' = r'^2 dr' d(\cos \Theta') d\phi'$  und der Verwendung der entsprechenden Integrationsgrenzen.

2. Substitution:

$$\begin{aligned} y &= r^2 + r'^2 - 2rr'x \\ dy &= -2rr' dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'x}} &= -\frac{1}{2rr'} \int_{y(-1)}^{y(1)} \frac{dy}{\sqrt{y}} \\ &= -\frac{1}{rr'} \left[ r^2 + r'^2 - 2rr'x \right]^{\frac{1}{2}} \Big|_{-1}^1 \\ &= -\frac{1}{rr'} \left[ \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'} - \sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr'} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{rr'} \left[ \sqrt{(r-r')^2} - \sqrt{(r+r')^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{rr'} \begin{cases} r - r' - (r + r') = \frac{2}{r} & r > r' \\ r' - r - (r + r') = \frac{2}{r} & r' > r \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Fall 1: } r > R_E \quad \longrightarrow \quad U(\mathbf{r}) &= -4\pi\gamma m\rho_0 \frac{1}{r} \int_0^{R_E} r'^2 dr' \\
 &= -\frac{4\pi}{3} \rho_0 R_E^3 \gamma \frac{m}{r} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{M_E} \\
 &= -\gamma \frac{mM_E}{r} = U(r)
 \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{mM_E}{r^3} \mathbf{r} = -\gamma \frac{mM_E}{r^2} \mathbf{e}_r$$

Definition:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{'Gravitationsfeld' } G(\mathbf{r}) &= \frac{1}{m} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{M_E}{r^2} \mathbf{e}_r \\
 \text{'Gravitationspotential' } \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{m} U(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{M_E}{r}
 \end{aligned} \right\} \text{unabh. vom 'Probekörper' } m$$

Entwicklung für  $r = R_E + z'$  mit  $z' \ll R_E$ :

$$\begin{aligned}
 \longrightarrow U(r) &= -\gamma m M_E \frac{1}{R_E + z'} \\
 &= -\gamma \frac{m M_E}{R_E} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z'}{R_E}} \\
 &\approx -\gamma \frac{m M_E}{R_E} \cdot \left( 1 - \frac{z'}{R_E} + \left( \frac{z'}{R_E} \right)^2 - \dots \right)
 \end{aligned}$$

$$\approx -\gamma \frac{m M_E}{R_E} + \gamma \frac{m M_E}{R_E^2} z' \pm \dots$$

$$= U_0 + mgz' + \dots \quad \left( g = \gamma \frac{m M_E}{R_E^2} \right)$$

$$\longrightarrow \tilde{U} = U - U_0 = mgz ; \quad \mathbf{F}(z) = -\frac{dU}{dz} \mathbf{e}_z = -mg \mathbf{e}_z$$

$$\text{Fall 2: } r < R_E \quad \longrightarrow \quad \int_0^{R_E} dr' = \underbrace{\int_0^r dr'}_{r > r'} + \underbrace{\int_r^{R_E} dr'}_{r' > r}$$

$$\begin{aligned}
 \longrightarrow U(r) &= -4\pi\gamma m\rho_0 \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r r'^2 dr' + \int_0^{R_E} r' dr' \right\} \\
 &= -4\pi\gamma m\rho_0 \left\{ \frac{1}{3} r^2 + \frac{1}{2} (R_E^2 - r^2) \right\} \\
 &= -4\pi\gamma m\rho_0 \left[ \frac{1}{2} R_E^2 - \frac{1}{6} r^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$M_E = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R_E^3 \iff \rho_0 = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{M}{R_E^3}$$

$$U(r) = -\gamma m M_E \left[ \frac{3}{2} \frac{1}{R_E} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R_E^3} \right]$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{m M_E}{R_E^3} \mathbf{r}$$

Zusammenfassung:

$$U(r) = -\gamma m M_E \begin{cases} \frac{1}{r} & r > R_E \\ \frac{3}{2} \frac{1}{R_E} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R_E^3} & r \leq R_E \end{cases}$$

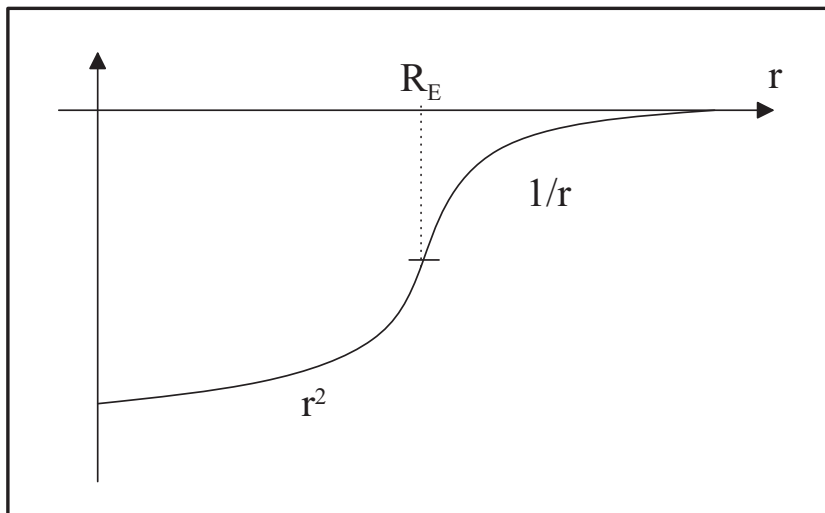


Abbildung 3.2: Potentialverlauf im inneren und im Außenbereich der Erde

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\gamma m M_E \begin{cases} \frac{1}{r^3} \mathbf{r} & r \geq R_E \\ \frac{1}{R_E^3} \mathbf{r} & r \leq R_E \end{cases}$$

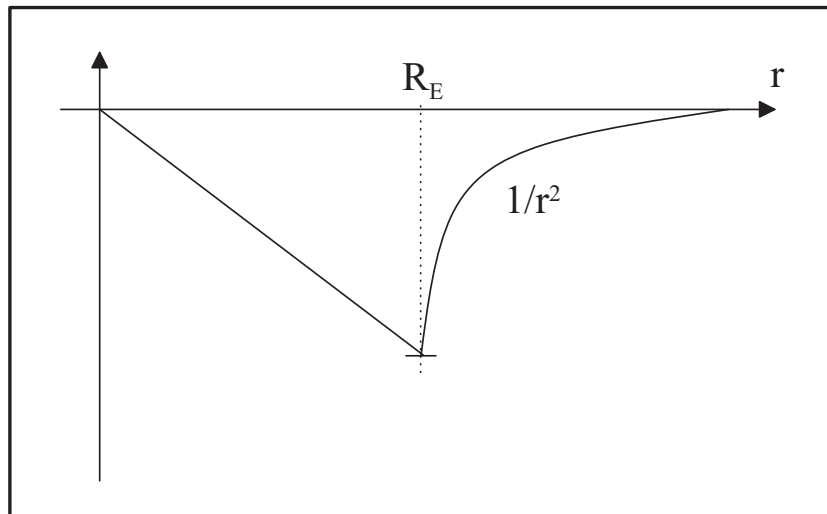


Abbildung 3.3: Verlauf der Erdanziehungskraft außerhalb und innerhalb der Erde

**Zusatzbemerkungen:**

- (i)  $\phi(r) = -\gamma \frac{M}{r}$  für  $r > R$  gilt für jede isotrope Dichteverteilung ( $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$ ). Das Gravitationspotential/-feld einer isotropen Massenverteilung sieht von außen aus wie das eines Massenpunktes der Gesamtmasse  $M$  im SP.
- (ii) Analoge Aussagen gelten in der Elektrostatik
- (iii) Alternative Rechenmethoden: "Gauß'sches Gesetz"; "Multipolentwicklung"

**BWGl für Bewegung im homogenen Schwerfeld:**

$$\begin{aligned}
 \ddot{z} &= -g \\
 \dot{z} &= v_z \\
 \dot{v}_z &= \frac{dv_z}{dt} = -g \\
 \text{Variablentrennung} \longrightarrow \int dv_z &= -g \int dt \\
 v_z(t) &= -gt + C_1 \\
 v_z(0) &= v_0 = C_1 \\
 \int dz &= -g \int dt + v_0 \int dt \\
 \implies z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C_2 \\
 AB : z(0) &= z_0 = C_2
 \end{aligned}$$

$$\text{insb. } \xrightarrow{v_0=0} \boxed{z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2} \quad \text{freier Fall}$$

Alternative Lösungsweg:

$$\text{Ausgangspunkt (E - Satz)} \quad t(z) = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{z_0}^z [E - U(z')]^{-\frac{1}{2}} dz' \quad (t_0 = 0)$$

$$\text{mit } U(z) = mgz \quad t(z) = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{z_0}^z \frac{dz'}{\sqrt{E - mgz'}}$$

$$t(z) = \sqrt{\frac{2}{mg^2}} \left\{ \sqrt{E - mgz} - \sqrt{E - mgz_0} \right\}$$

$$\sqrt{E - mgz} = \sqrt{\frac{m}{2}}gt + \sqrt{E - mgz_0}$$

$$E - mgz = \left( \sqrt{E - mgz_0} + \sqrt{\frac{m}{2}}gt \right)^2$$

$$\iff \boxed{z(t) = \frac{E}{mg} - \frac{1}{mg} \left( \sqrt{E - mgz_0} + \sqrt{\frac{m}{2}}gt \right)^2}$$

$$\text{ABs: } z(0) = z_0; \quad v_z(0) = 0; \quad \longrightarrow \quad E = T + U = T(0) + U(0) = mgz$$

$$\longrightarrow \boxed{z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2}$$

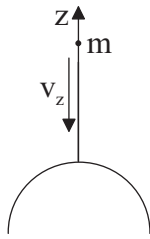
### 3.1.2 Reibung ( $\dot{E} \neq 0$ )

Phänomenologische Ansätze (Bewegung in einem Medium)

(i) Stokes'sche (viskose) Reibung  $\mathbf{F}_S = -\beta\mathbf{v}$  ( $\beta > 0$ )  
 $\longrightarrow$  gültig für 'kleine'  $\mathbf{v}$

(ii) Newton'sche Reibung  $\mathbf{F}_N = -\gamma v\mathbf{v}$  ( $\gamma > 0$ ); ( $v = |\mathbf{v}| > 0$ )  
 $\longrightarrow$  gültig für 'größere'  $\mathbf{v}$  (aber kleiner als Schallgeschwindigkeit)

a) Freier Fall mit Stokes'scher Reibung:



$$\ddot{z} = -g - bv_z \quad (b = \frac{\beta}{m})$$

$$= -g - b\dot{z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dz}{dt} = v_z \\ \dot{v}_z = \frac{dv_z}{dt} = -g - bv_z \end{cases}$$

Variablentrennung  $\rightarrow$

$$\int \frac{dv_z}{g + bv_z} = - \int dt = -t + konst.$$

$$\ln(g + bv_z) = -bt + konst.$$

$$g + bv_z = C_1 e^{-bt}$$

$$v_z(t) = \frac{C_1}{\beta} m \cdot e^{-\frac{\beta t}{m}} - \frac{mg}{\beta}$$

AB :  $v_z(0) = v_0 = \frac{C_1}{\beta} m - \frac{mg}{\beta}$

$$\Leftrightarrow C_1 = \frac{v_0 \beta}{m} + g$$

$\Leftrightarrow$

$$v_z(t) = \left( v_0 + \frac{mg}{\beta} \right) \cdot e^{-\frac{\beta t}{m}} - \frac{mg}{\beta}$$

2.Integration  $\rightarrow$

$$z(t) = -\frac{m}{\beta} \left( v_0 + \frac{mg}{\beta} \right) \cdot e^{-\frac{\beta t}{m}} - \frac{mgt}{\beta} + C_2$$

AB :  $z(0) = z_0 = -\frac{m}{\beta} \left( v_0 + \frac{mg}{\beta} \right) + C_2$

$\Leftrightarrow$

$$z(t) = z_0 - \frac{mg}{\beta} t + \frac{m}{\beta} \left( v_0 + \frac{mg}{\beta} \right) \left( 1 - e^{-\frac{\beta t}{m}} \right)$$

Diskussion:

(i) Beschleunigung  $a_z(t) = \dot{v}_z = -\frac{\beta}{m} \left( v_0 + \frac{mg}{\beta} \right) \cdot e^{-\frac{\beta t}{m}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

$\rightarrow$  Langzeitverhalten:

$$v_z(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\frac{mg}{\beta} \equiv -v_\infty = konst.$$

$$z(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} z_0 + \frac{v_0 + v_\infty}{b} - v_\infty t$$

} geradlinig, gleichförmige Bewegung



(ii) Kurzzeitverhalten: ( $t \rightarrow 0$ )

benütze 
$$e^{-bt} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b^n}{n!} t^n \approx 1 - bt + \frac{1}{2} b^2 t^2 \pm \dots$$

$$\begin{aligned} z(t) &\approx z_0 - v_{\infty} t + \frac{v_0 + v_{\infty}}{b} (1 - 1 + bt - \frac{1}{2} b^2 t^2 \pm \dots) \\ &= z_0 - v_0 t - \frac{b}{2} (v_0 + v_{\infty}) t^2 \end{aligned}$$

für  $v_0 = 0$  
$$z(t) = z_0 - \frac{g}{2} t^2$$

→ ungebremster freier Fall für  $t \rightarrow 0$

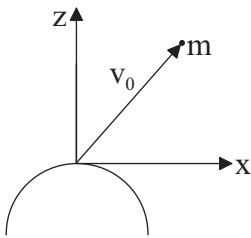
(iii) Reibungsfreier Grenzfall ( $\beta \rightarrow 0$ )

$\xrightarrow{s.(ii)}$  
$$z(t) = z_0 - \frac{g}{2} t^2$$

(iv) Starke Reibung ( $\beta \rightarrow \infty$ )

$$z(t) = z_0$$
 (keine Bewegung im  $\infty$ -zähen Medium)

b) Schiefer Wurf mit Stokes'scher Reibung:



BWGl: 
$$m \ddot{\mathbf{r}} = -mg \mathbf{e}_z - \beta \dot{\mathbf{r}}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \ddot{x} &= -b \dot{x} & (b = \frac{\beta}{m}) \\ \ddot{z} &= -g - b \dot{z} \end{aligned}$$

x-Komponente:

$$\begin{aligned} \dot{x} = v_x; \frac{dv_x}{dt} &= -b v_x \longrightarrow \int \frac{dv_x}{v_x} = -b \int dt \\ \longrightarrow v_x(t) &= v_0^x \cdot e^{-bt} \\ \xrightarrow{v_x = \dot{x}} x(t) &= x(0) + \frac{v_0^x}{b} (1 - e^{-bt}) \end{aligned}$$

Diskussion:

- (i)  $t \rightarrow \infty$   $x(t) \rightarrow x(0) + \frac{v_0^x}{b} = x_{max}$  Maximale Wurfmasse =  $\frac{v_0^x}{b}$
- (ii)  $t \rightarrow 0$   $x(t) \approx x(0) + v_0^x t \rightarrow$  geradlinig, gleichförmige Bewegung
- (iii)  $\beta \rightarrow 0$   $\rightarrow$  siehe (ii)
- (iv)  $\beta \rightarrow \infty$   $x(t) \rightarrow x_0$

(v) Raumkurve (Orbit):

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_0 + \frac{v_0^x}{b}(1 - e^{-bt}) \\
 &\quad \parallel \\
 &\quad x(0) \\
 \Leftrightarrow e^{-bt} &= 1 - \frac{b}{v_0^x}(x - x_0) \\
 t &= -\frac{1}{b} \cdot \ln\left(1 - \frac{b}{v_0^x}(x - x_0)\right)
 \end{aligned}$$

$$z(x) = z_0 + \frac{v_\infty}{b} \cdot \ln\left(1 - \frac{b}{v_0^x}(x - x_0)\right) + \frac{v_0^z + v_\infty}{v_0^x}(x - x_0)$$

c) Freier Fall mit Newton'scher Reibung:

BWGl:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{\mathbf{r}} &= -mg\mathbf{e}_z - \gamma v\mathbf{v} \\
 \dot{v}_z = \ddot{z} &= -g - c|v_z|v_z \quad (c = \frac{\gamma}{m}) \\
 \Leftrightarrow \int \frac{dv_x}{g + c|v_z|v_z} &= -\int dt = -t + konst.
 \end{aligned}$$

Integrale:

$$\int \frac{dx}{a^2 + |x|x} = \frac{1}{a} \begin{cases} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) & 0 \leq x \\ \operatorname{artanh}\left(\frac{x}{a}\right) & -|a| < x \leq 0 \\ \operatorname{arcoth}\left(\frac{x}{a}\right) & x < -a \end{cases}$$

Näheres siehe Übung 3.3

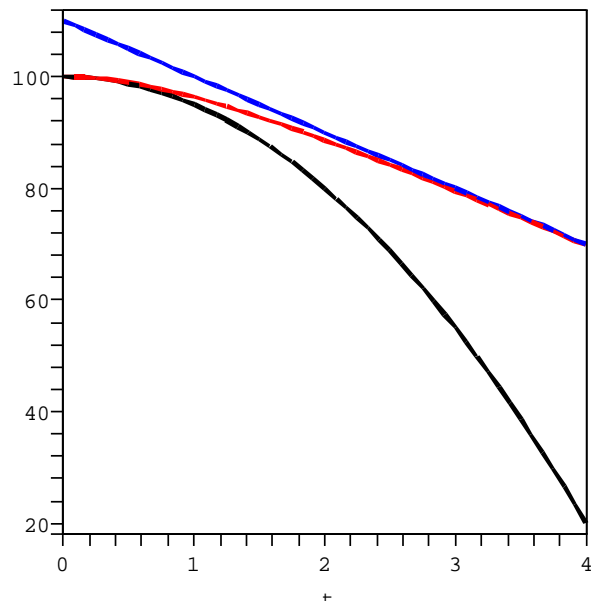
d) Abschließende Bemerkungen:

- (i) Reibungskräfte sind nicht konservativ, sondern dissipativ
- (ii) Allg. E-Satz:  $\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}(T - U) = \mathbf{F}_R \cdot \mathbf{v} = -F_R \cdot v < 0$   
 $\rightarrow$  mechanische Energie nimmt ab (Umwandlung in Wärme)
- (iii)  $A_R = -\int_{t_0}^t F_R(\mathbf{v}(t'), t')v(t') dt'$  (wegunabhängig)
- (iv) Statt Potential kann man "Dissipationsfunktion" angeben (s. Kap. 4)

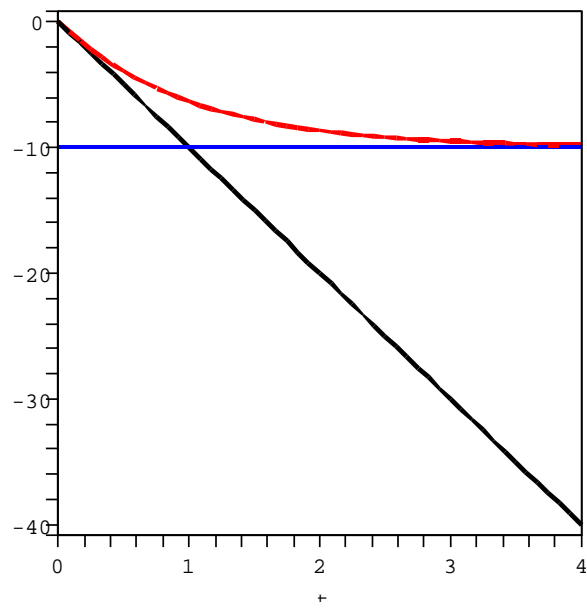
### 3.1.3 Diagramme

$v_0 = 0$ :

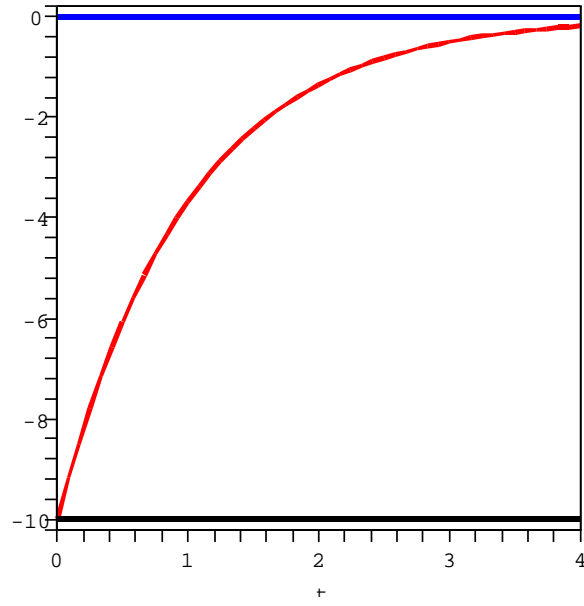
z-t-Diagramm



v-t-Diagramm

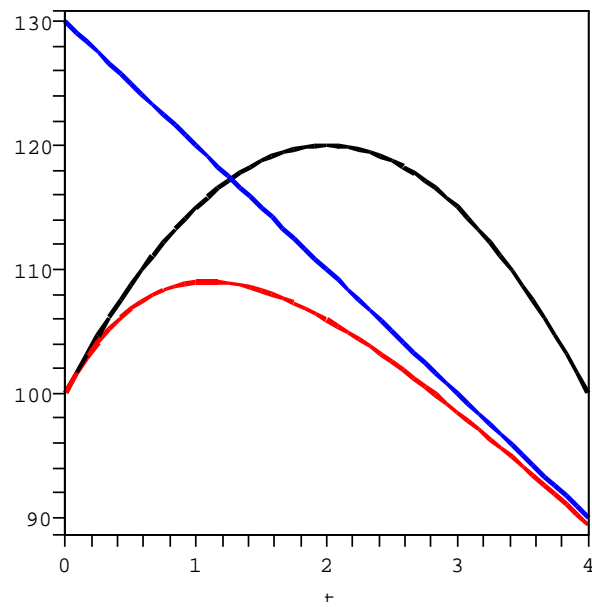


a-t-Diagramm

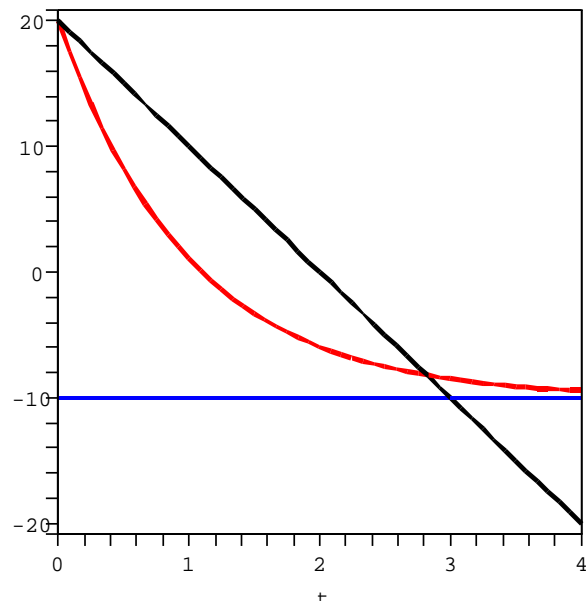


$v_0 = +20$ :

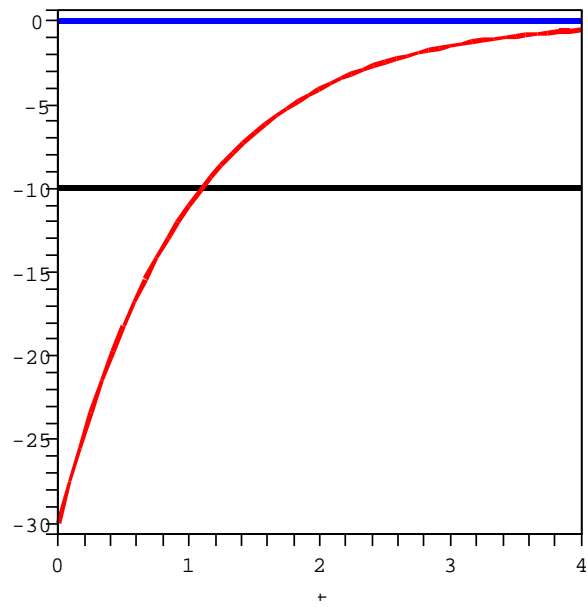
z-t-Diagramm



v-t-Diagramm

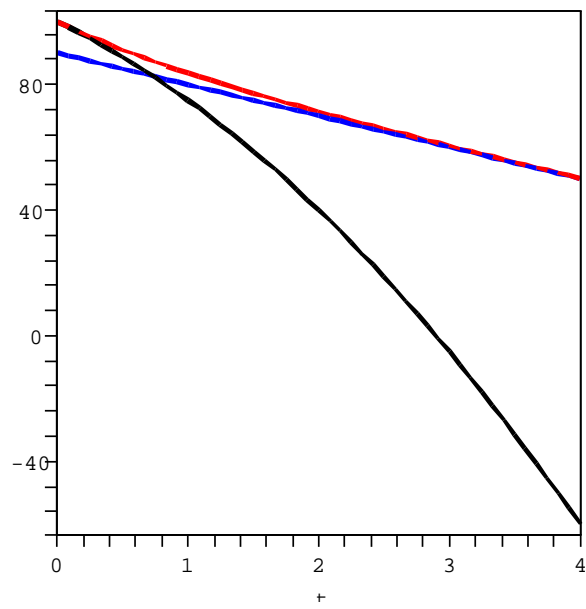


a-t-Diagramm

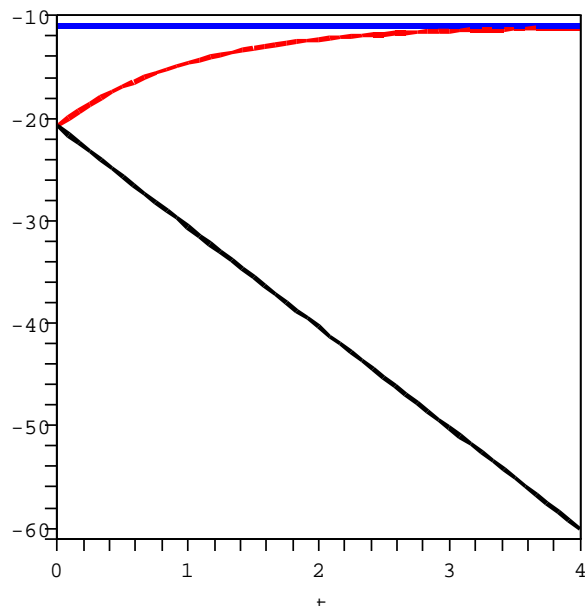


$v_0 = -20$ :

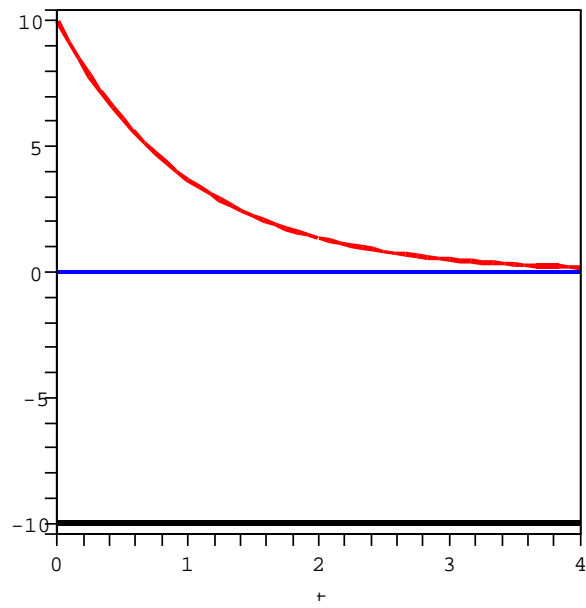
z-t-Diagramm



v-t-Diagramm

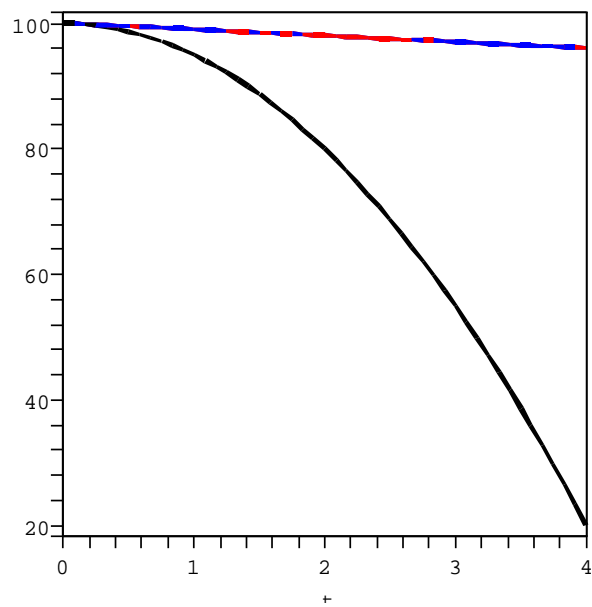


a-t-Diagramm

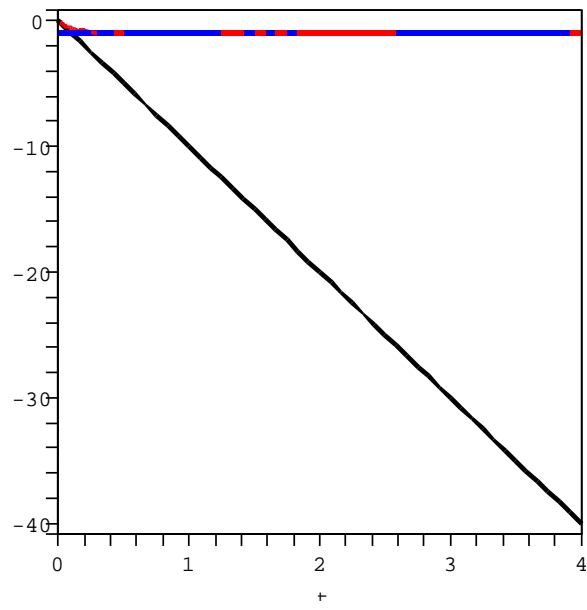


$v_0 = 0$ , starke Reibung:

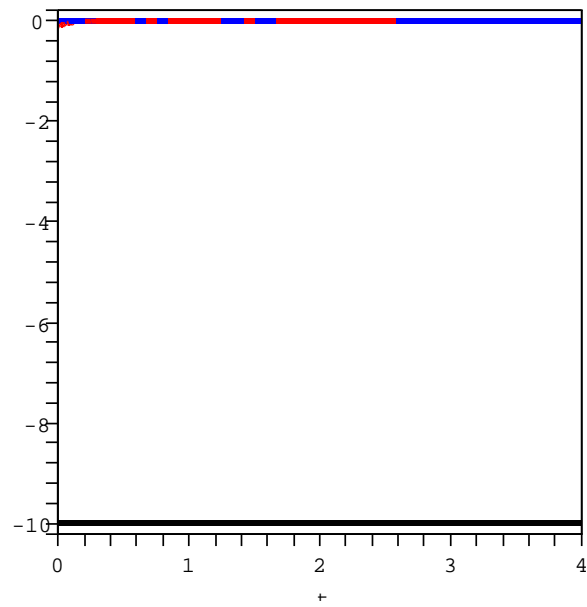
z-t-Diagramm



v-t-Diagramm

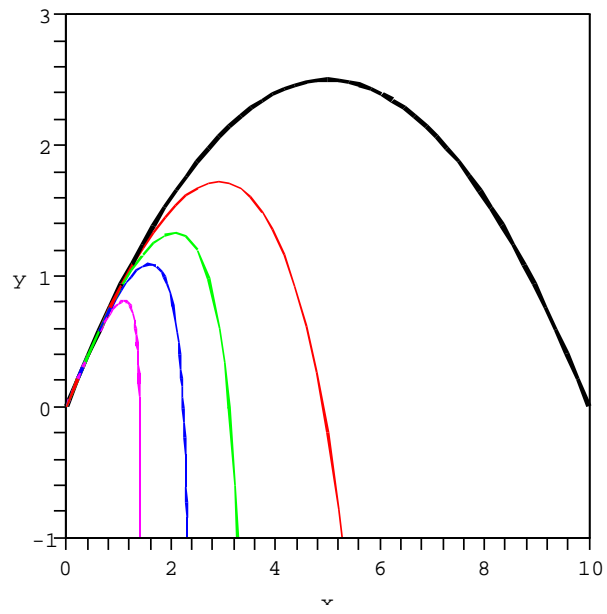


a-t-Diagramm





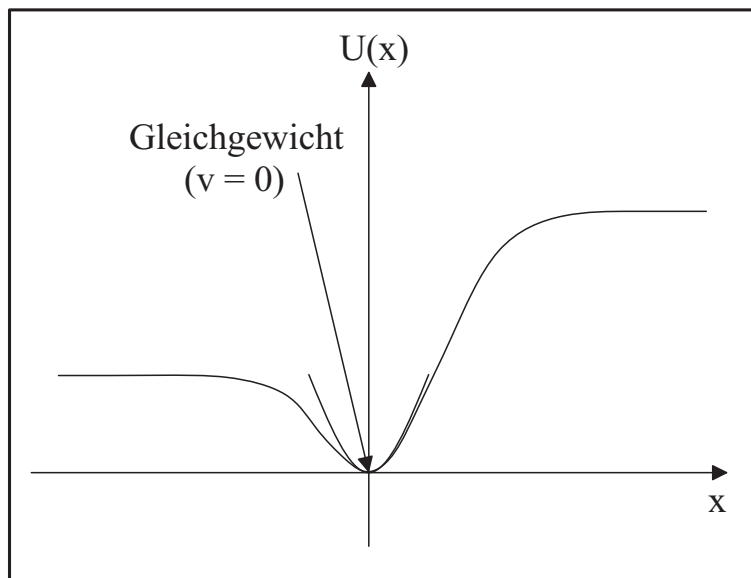
Raumkurven



## 3.2 Oszillatorprobleme I

### 3.2.1 Motive für das Studium des harmonischen Oszillators

- (i) Beschreibt Bewegungen in der Umgebung eines stabilen Gleichgewichts



Taylorentwicklung von  $U(x)$  um  $x = 0$ :

$$\begin{aligned}
 U(x) &= \underbrace{U(0)}_0 + \underbrace{\frac{dU}{dx}\bigg|_{x=0}}_0 x + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dx^2}\bigg|_{x=0} x^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3U}{dx^3}\bigg|_{x=0} x^3 + \dots \\
 &= a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \\
 &\longrightarrow F(x) = -\frac{dU}{dx} = -2a_2 x - 3a_3 x + \dots
 \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$  1. Näherung:  $U(x) \propto x^2$ ,  $F(x) \propto -x \longrightarrow$  Hooke'sches Gesetz

Einige Realisierungen:

$$\begin{array}{l}
 \text{klassische Oszil.} \left\{ \begin{array}{l} \text{Mechanik : Feder – und Fadenpendel} \\ \text{Elektrodynamik : Schwingkreis} \end{array} \right. \\
 \text{QM Oszil.} \left\{ \begin{array}{l} \text{Molekülphysik : 'Vibrationen' der Kerne gegeneinander} \\ \quad \quad \quad \text{(z.B. 2 – atomiges Molekül)} \\ \text{FK – Physik : Gitterschwingungen} \\ \text{Kernphysik : Vibrationen deformierter Kerne} \end{array} \right.
 \end{array}$$

- (ii) Kann in KM und QM exakt gelöst werden (und ist Grundlage der sog. 'Feldquantisierung' in der 'höheren' QT)

### 3.2.2 Der gedämpfte harmonische Oszillator (1-dim.)

$$\text{BWGl:} \quad m\ddot{x} = \underbrace{-kx}_{\text{Hooke'sches Gesetz}} + \underbrace{-\beta\dot{x}}_{\text{Reibung nach Stokes}}$$

$$b = \frac{1}{2} \frac{\beta}{m}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{Eigenfrequenz})$$

$$\hookrightarrow \boxed{\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

$\hookrightarrow$  homogene, lineare DGl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} \text{Lösungsansatz:} \quad x(t) &= e^{\lambda t} \\ \longrightarrow (\lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} &= 0 \\ \text{'charakteristische Gleichung':} \quad 0 &= \lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2 \\ \longrightarrow \lambda_{1/2} &= -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2} \end{aligned}$$

Fall 1:  $\omega_0^2 > b^2$  Schwache Dämpfung/Schwingfall

$$\text{Def.:} \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} \quad \epsilon \mathfrak{R} \rightarrow \lambda_{1/2} = -b \pm i\omega_1$$

Allg. Lsg.:  $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$   
(Linearkombination von zwei linear unabhängigen Lösungen)

$$\hookrightarrow x(t) = e^{-bt} \cdot (C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t})$$

Grenzfall  $b=0$ :  $\omega_1 = \omega_0$

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \\ &= C_1 (\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t) + C_2 (\cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t) \\ &= (C_1 + C_2) \cos \omega_0 t + i(C_1 - C_2) \sin \omega_0 t \\ &= A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad A, B \in \mathfrak{R} \iff C_2 = C_1^* \\ &= D \sin(\omega_0 t + \delta) \\ \longrightarrow D &= \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan \varphi = \frac{A}{B} \end{aligned}$$

$b \neq 0$  : reelle Form der allg. Lösung

$$x(t) = De^{-bt} \sin(\omega_1 t + \delta)$$

$$\text{ABs : } \left. \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array} \right\} \longrightarrow x(t) = \frac{v_0}{\omega_1} e^{-bt} \sin \omega_1 t \xrightarrow{b \rightarrow 0} \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} > \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0$  : Gedämpfte Schwingung ist streng periodisch, wobei Periode größer ist als im ungedämpften Fall

Fall 2:  $\omega_0^2 < b^2$  Starke Dämpfung/Kriechfall

$$\Re \ni \lambda_{1/2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2} < 0$$

$$\text{ABs : } \left. \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array} \right\} \longrightarrow x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{b^2 - \omega_0^2}} e^{-bt} \sinh\left(\sqrt{b^2 - \omega_0^2} t\right)$$

(wobei  $\sinh y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ )

Fall 3:  $\omega_0^2 = b^2$  Aperiodischer Grenzfall

$$\lambda_{1/2} = -b \quad \in \Re$$

Zum Auffinden einer 2. linear unabhängigen Lsg. betrachte DGL für  $\omega^2 = b^2$ :

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + b^2x = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Ansatz : } \quad x(t) &= R(t)e^{-bt} \\ \dot{x} &= (\dot{R} - bR)e^{-bt} \\ \ddot{x} &= (\ddot{R} - 2b\dot{R} + b^2R)e^{-bt} \\ \xrightarrow{\text{einsetzen}} 0 &= (\ddot{R} - 2b\dot{R} + b^2R + 2b\dot{R} - 2b^2R + b^2R)e^{-bt} \\ \ddot{R} &= 0 \longrightarrow R(t) = C_1 + C_2t \\ \hookrightarrow x(t) &= (C_1 + C_2t)e^{-bt} \end{aligned}$$

$$\text{ABs : } \left. \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array} \right\} \longrightarrow x(t) = v_0 t e^{-bt}$$

Energie des gedämpften harmonischen Oszillators:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(T + U) = \mathbf{F}_R \cdot \mathbf{v} = -F_R \cdot \dot{x} = -2mb\dot{x}^2$$

$$\hookrightarrow E(t) = E(0) - 2mb \int_0^t \dot{x}^2 dt'$$

(Näheres siehe Übung 5.1)

### 3.2.3 Der getriebene harmonische Oszillator - erzwungene Schwingungen

$$\text{BWGl : } \quad \ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

$\implies$  inhomogene DGl 2. Ordnung mit konstantem Koeffizienten

Allg. Lsg. der inhomogenen DGl = allg. Lsg. der homogenen DGl + eine spezielle Lsg. der inhomogenen DGl

$$x(t) = x_{\text{hom}}(C_1, C_2, t) + x_{\text{part}}(t)$$

a) Harmonische Anregung

$$\begin{array}{ll} \text{Wenn} & f(t) = f_0 e^{i\omega t} \quad (f_0 \in \mathfrak{R}) \\ \text{und} & z(t) = x(t) + iy(t) \\ \longrightarrow & \ddot{z} + 2b\dot{z} + \omega_0^2 z = f_0 e^{i\omega t} \\ & \ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t) \end{array}$$

$$\text{Ansatz : } \quad z_{\text{part}}(t) = C e^{i\omega t}$$

$$\longrightarrow \left[ C(-\omega^2 + 2ib\omega + \omega_0^2) - f_0 \right] e^{i\omega t} = 0$$

$$\longrightarrow C = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega} \equiv f_0 \chi(\omega)$$

$\chi$ : "(dynamische) Suszeptibilität", beschreibt die Antwort des Systems

$$\begin{array}{ll} \chi(\omega) & = |\chi(\omega)| e^{-i\phi} = A(\omega) e^{-i\phi} \\ \hookrightarrow z_{\text{part}}(t) & = A(\omega) e^{-i\phi} f_0 e^{i\omega t} = A(\omega) f_0 e^{i(\omega t - \phi)} \\ x_{\text{part}}(t) & = A(\omega) f_0 \cos(\omega t - \phi) \\ \longrightarrow A(\omega) & = \left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2 \omega^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ \tan \phi & = \frac{2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{NR:} \quad \chi &= \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2ib\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2} \\ |\chi|^2 &= \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2\right]^2} = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2} \\ \tan \phi &= \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = -\frac{\text{Im } \chi}{\text{Re } \chi} = \frac{2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

Diskussion:

- (i) Endgültige Lösung  $x(t) = x_{norm}(C_1, C_2, t) + x_p(t)$  (zu vorgegebenen ABs) i.a. kompliziert
- (ii)  $x(t) \xrightarrow{\text{gro\ss}e t} x_p(t)$  (falls  $b \neq 0$ )  $\rightarrow$  Oszillator folgt der harmonischen Anregung mit Phasenverschiebung  $\phi$
- (iii)  $b = 0$ : ungedämpfter Oszillator

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \left[|\omega_0^2 - \omega^2|\right]^{-1}, \quad \phi(\omega) = 0 \\ x(t) &= D \cos(\omega_0 t + \delta) + A(\omega) f_0 \cos \omega t \\ \text{ABs:} \quad x(0) &= \dot{x}(0) = 0 \implies (D = -A(\omega) f_0; \delta = 0) \\ x(t) &= A(\omega) f_0 (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \end{aligned}$$

Spezialfall:  $\omega_0 = \omega + \Delta\omega; \quad 0 < \Delta\omega \ll \omega$

Für  $\Delta\omega t \ll 1$ :

$$\begin{aligned} \cos \omega t - \cos \omega_0 t &= \cos \omega t - \cos(\omega + \Delta\omega)t \\ &= \cos \omega t - \cos \omega t \cos \Delta\omega t + \sin \omega t \sin \Delta\omega t \\ &\approx (\Delta\omega t) \sin \omega t \end{aligned}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{(\omega + \Delta\omega)^2 - \omega^2} = \frac{1}{2\omega\Delta\omega + \Delta\omega^2} \approx \frac{1}{2\omega\Delta\omega}$$

$\rightarrow x(t) \stackrel{\Delta\omega t \ll 1}{\approx} \frac{f_0}{2\omega} t \cdot \sin \omega t$  Amplitude wächst linear an  $\rightarrow$  (Resonanz)

Resonanzkatastrophe:  $A(\omega) \xrightarrow{\Delta\omega \rightarrow 0} 0$

- (iv) Kurvendiskussion für  $A(\omega)$  (für  $b \neq 0$ )

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \\ A(\omega = 0) &= \frac{1}{\omega_0^2} \end{aligned}$$

$$A(\omega) \xrightarrow{\omega \gg \omega_0} \frac{1}{\sqrt{(\omega^4 + 4b^2\omega^2)}} \rightarrow \frac{1}{\omega^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{aligned} \text{Extrema?} \quad \frac{dA}{d\omega} &= 0 \iff \omega[\omega_0^2 - \omega^2 - 2b^2] = 0 \\ \longrightarrow (\omega_1 = 0); \quad \omega_2 &= \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2} \equiv \omega_R \longrightarrow \text{Maximum} \\ \longrightarrow A(\omega_R) &= \frac{1}{2b\sqrt{\omega_0^2 - b^2}} \end{aligned}$$

(v) Phasenfunktion  $\phi(\omega)$

$$\left. \begin{aligned} \phi(\omega) &= \arctan\left(\frac{2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(\omega = \omega_0) &= \frac{\pi}{2} \\ \phi(\omega) &\xrightarrow{\omega \gg \omega_0} \pi \end{aligned} \right\} 0 \leq \phi \leq \pi$$

→ Oszillator läuft Anregung hinterher ( $x_p \propto \cos(\omega t - \phi)$ )

b) Allgemeine periodische Anregung ( $F(t + T) = F(t)$ )  
 Superpositionsprinzip: Seien  $x_n(t)$  Partikulärlösungen der DGL

$$\ddot{x}_n + 2b\dot{x}_n + \omega_0^2 x_n = f_n(t) \quad (n = 1, \dots, N)$$

und

$$F(t) = \sum_{n=1}^N f_n(t) \implies x(t) = \sum_{n=1}^N x_n(t)$$

löst die DGL  $\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$

Insbesondere, falls:

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n=1}^N f_n(t) = \sum_{n=1}^N f_0^{(n)} \cos(\omega_n t) \\ \implies x_p(t) &= \sum_{n=1}^N A(\omega_n) f_0^{(n)} \cos(\omega_n t - \phi_n) \\ A(\omega_n) &= \left[ (\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4b^2\omega_n^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ \tan \varphi_n &= \frac{2b\omega_n}{\omega_0^2 - \omega_n^2} \end{aligned}$$

Allgemeinere Aussage: Eine "hinreichend-gutartige" periodische Funktion  $F(t+T) = F(t)$  kann als Fourier-Reihe dargestellt werden:

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$
$$\Leftrightarrow c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(t) e^{-in\omega t} dt$$



Bemerkungen:

(i)

$$\sum_{n=-N}^{n=N} c_n e^{in\omega t} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} F(t)$$

Welche Art von Konvergenz wird gefordert?  $\longleftrightarrow$  Anforderungen an  $F(t)$

a) Punktweise Konvergenz

$$\forall t \in \mathfrak{R}; \quad \epsilon > 0; \quad \exists N = N(t, \epsilon) : |f_n(t) - F(t)| < \epsilon; \quad \forall n \geq N$$

b) Gleichmäßige Konvergenz

$$\forall t \in \mathfrak{R}; \quad \epsilon > 0; \quad \exists \underline{N} = N(\epsilon) : |f_n(t) - F(t)| < \epsilon; \quad \forall n \geq N$$

ist gegeben, falls  $F(t)$  stückweise stetig differenzierbar

c) Konvergenz im quadr. Mittel

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |f_n(t) - F(t)|^2 dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Den Fourier-Reihen ist die Konvergenz im quadr. Mittel i.a. besser angepasst, falls  $F(t)$  (Riemann-) integrierbar ist (siehe hierzu [2], Kap. 23)

(ii) Es existieren alternative Entwicklungen nach "vollständigen Funktionssystemen"  $F(t) = \sum_n^\infty a_n g_n(t)$ , wobei  $\{g_n\}$  z.B.:

- \* trigonometrische Fkt. ( $\rightarrow$  Fourier Reihe)
- \* Legendre Polynome
- \* Bessel Fkt.

$\longrightarrow$  spezielle Funktionen der (mathematischen) Physik

# Kapitel 4

## Symbolverzeichnis

### 1 Abkürzungen

#### 1.1 Lateinisch

a	Beschleunigung
A	Fläche, Arbeit
C	Integrationskonstante
e, exp	Exponentialfunktion, Eulerzahl
E	Energie
f	innere Kräfte
F	Kraft
g	Gravitationsbeschleunigung in der Nähe der Erdoberfläche
h	Höhe
l	Drehimpuls eines MP
L	Drehimpuls eines Teilchensystems
m, M	Masse
P	Leistung
r, R	Radius, Weg
$\Re$	Reelle Zahlen
s, S	Abstand
t	Zeit
T	kinetische Energie
U	potentielle Energie
v	Geschwindigkeit
V	Potential (aufgrund innerer Kräfte)
x, y	Abstand, Entfernung

## 1.2 Griechisch

$\Delta$	Differenz, Laplace Operator
$\gamma$	Gravitationskonste
$\nabla$	Nabla Operator
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit

## 2 Indizes

0	Ursprung, Beginn
1, 2	Ort, Zeitpunkt
i, k	Laufvariablen
diss	dissipativ
ext	extern
E	Erde
hom	homogen
kin	kinetisch
part	rartikulär
SP	Schwerpunkt

# Kapitel 5

## Wichtige Fundamental Konstanten

$$\begin{array}{lcl} \gamma & \approx & 6,6726 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \\ g & \approx & 9,81 \frac{m}{s^2} \\ M_E & \approx & 5,97 \cdot 10^{24} kg \\ R_E & \approx & 6,378 \cdot 10^6 m \end{array}$$

# Literaturverzeichnis

- [1] BLÖCHL, P.: *Theoretische Physik I: Klassische Mechanik*. Internetadresse: <http://www.pt.tu-clausthal.de/atp/education.shtml>.
- [2] FORSTER, O.: *Analysis I*.
- [3] JELITTO, R.: *Theoretische Physik 1+2*. Aula, Wiesbaden.
- [4] LÜCKE, W.: *Mathematische Methoden der Physik*. Internetadresse: <http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/etp.html>.
- [5] R. M. DREIZLER und C. S. LÜUDDE: *Theoretische Physik 1*. Springer.
- [6] SOMMERFELD, A.: *Vorlesungen über Theoretische Physik 1: Mechanik*.