

Klassische Mechanik

Gelesen von
Prof. Dr. phil. nat. Tom Kirchner

Skript zur Vorlesung

Achtung!
Diese Version befindet sich noch in Bearbeitung
und kann Fehler enthalten!

13. Dezember 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Inhaltsübersicht	1
1.2	Bemerkungen zum Wesen der Theoretischen Physik	2
1.3	Vorbemerkung zur Klassischen Mechanik	2
2	Newton'sche Mechanik	5
2.1	Die Newton'schen Axiome (1687)	5
2.1.1	Analyse des 1. Axioms: Inertialsystem (IS) und Galilei-Transformation (GT)	6
2.1.2	Analyse des 2. Axioms: Grundlegende BWGl gilt im IS	7
2.1.3	Analyse des 3. Axioms: actio = reactio	7
2.1.4	Abschließende Diskussion	8
2.2	Grundbegriffe und Erhaltungssätze	9
2.2.1	Impuls	9
2.2.2	Drehimpuls	10
2.3	Arbeit und Energie	15
3	Anwendungen I	20
3.1	Elementare Bewegungsprobleme	20
3.1.1	Eindimensionale Probleme ($E = T + U = \text{konst.}$)	20
3.1.2	Reibung ($\dot{E} \neq 0$)	29
3.1.3	Diagramme	33
3.2	Oszillatorprobleme I	40
3.2.1	Motive für das Studium des harmonischen Oszillators	40
3.2.2	Der gedämpfte harmonische Oszillator (1-dim.)	41
3.2.3	Der getriebene harmonische Oszillator - erzwungene Schwingungen	43
4	Hamilton'sches Prinzip und Lagrange'sche Mechanik	57
4.1	Das Hamilton'sche Prinzip der stationären Wirkung (1823)	57
4.1.1	Grundzüge der Variationsrechnung	58
4.1.2	HP für den einfachsten Fall	60

4.2	Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten	61
4.2.1	Vorbereitungen für eine MP	61
4.2.2	N-Teilchen Systeme	65
5	Anwendungen II	67
6	Hamilton'sche Mechanik	68
7	Mathematischer Anhang	69
7.1	Einführung der δ -Funktion	69
8	Symbolverzeichnis	70
9	Wichtige Fundamental Konstanten	72

Kapitel 1

Einführung

1.1 Inhaltsübersicht

I. Einführung

II. Newton'sche Mechanik

II.1 Axiome

II.2 Grundbegriffe + Erhaltungsgrößen

III. Anwendung I

III.1 Elementare Bewegungsprobleme

III.2 Oszillatorprobleme

III.3 Stoßprobleme

IV. Lagrange'sche Mechanik

IV.1 Zwangsbedingung und generalisierte Koordinaten

IV.2 Hamilton'sches Prinzip und Lagrange'sche Gleichung 2. Art

IV.3 Diskussion + Erweiterung + Ergänzung

V. Anwendung II

V.1 Keplerproblem

V.2 Beschleunigte Bezugssysteme

V.3 Starre Körper

V.4 Gekoppelte Oszillatoren

VI. Hamilton Mechanik

1.2 Bemerkungen zum Wesen der Theoretischen Physik

Aufgaben der TP:

Formulierung, Analyse und Anwendung mathematischer Gesetze und Modelle zur Beschreibung physikalischer Phänomene und Prozesse (Mathematik ist die Sprache der Physik)

Werkzeuge der TP: Mathematik, Computer

Ziele und Nutzen der TP:

- Herausarbeiten weniger "roter Fäden" durch das Gebäude der Physik
- Auffinden allgemeiner Grundprinzipien
- Überprüfung und Interpretation empirischer Daten

"Kanon der TP":

- Klassische Mechanik → "Teilchen" ('Massenpunkte')
- Klassische Elektrodynamik → "Felder" (Wellen)
- Quantenmechanik → bewältigt Dualismus Welle-Teilchen
- Statistische Mechanik/Thermodynamik → Beschreibung von "Makrophänomenen" (typischerweise mit 10^{23} Teilchen)

1.3 Vorbemerkung zur Klassischen Mechanik

Definition:

"Mechanik ist die Lehre von der Bewegung materieller Gegenstände im Raum und den diese beherrschenden Gesetzmäßigkeiten" [4]

Analyse:

- (i) Materielle Gegenstände → mit (träger) Masse ausgestattete Objekte
Massenpunkte \Leftrightarrow Punktförmige Teilchen mit Masse
- (ii) Bewegung im Raum: erfordert Klärung der Begriffe Raum + Zeit

Eigenschaften des Raums: (im Rahmen der Kl. Mechanik)

- drei-dimensional
- allseitig unbegrenzt
- enthält Punkte, Geraden, Ebenen
- Parallelenaxiom
- homogen + isotrop

→ dreidimensionaler Euklidischer Raum

→ kartesische Koordinatensysteme definierbar

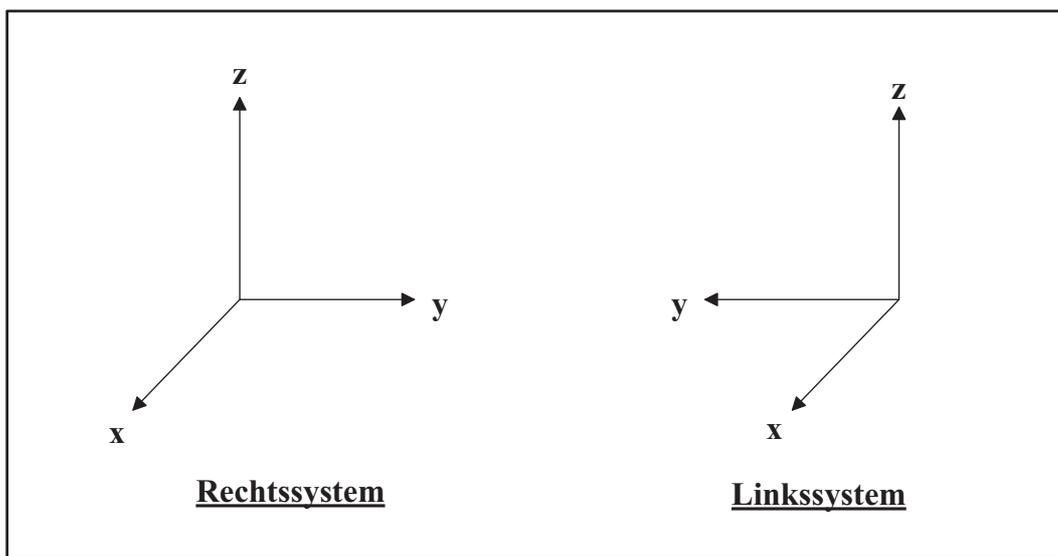


Abbildung 1.1: Kartesisches Rechts- / Linkssystem

⇒ Beschreibung von Gegebenheiten im Raum → Vektorrechnung im \mathcal{R}^3

Eigenschaften der Zeit:

- homogener Parameter

→ Bewegung im Raum wird beschrieben durch:

- Bahnkurve (Trajektorie) $\mathbf{r}(t)$
- Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$
- Beschleunigung $\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$

⇒ 'Kinematik': mathematische Beschreibung von Bewegungen ohne Berücksichtigung der verursachenden Kräfte

Erweiterungen des Raumbegriffs:

- Spezielle Relativitätstheorie → 4-dim. (Raumzeit) "Minkowski" Raum
- Allgemeine Relativitätstheorie → (lokal) gekrümmte Räume
- Quantenmechanik → ∞ -dim. Hilbert-Raum

(iii) Gesetzmäßigkeiten → "Dynamik":

Was bewirkt die Bewegung von Objekten?

→ Newton'sche Axiome (Kraftbegriff)

→ insbesondere Bewegungsgleichung (BWGl) $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$

$$\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} \stackrel{DGL+AB}{\Leftrightarrow} \mathbf{r}(t)$$

→ weitere Grundbegriffe (Impuls, Drehimpuls, Arbeit, Energie,...)

Darüber hinaus:

- Alternative (äquivalente) Formulierungen der KM ("Lagrange", "Hamilton")
- beruhen auf übergeordnetem "Wirkungsprinzip" (jenseits der KM gültig)
- ebnen den Weg zur QM
- sind (teilweise) flexibler in der Handhabung und praktischen Anwendung

Kapitel 2

Newton'sche Mechanik

2.1 Die Newton'schen Axiome (1687)

Axiom: Keines Beweises bedürftender Grundsatz; Näheres: [4], Kap. 3.1

Lex prima: "Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seine Zustand zu ändern."

Lex secunda: "Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher die Kraft wirkt."

Lex tertia: "Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und entgegengesetzter Richtung."
(actio = reactio)

Lex quarta: Kräfte addieren sich wie Vektoren (Kräfteparallelogramm)

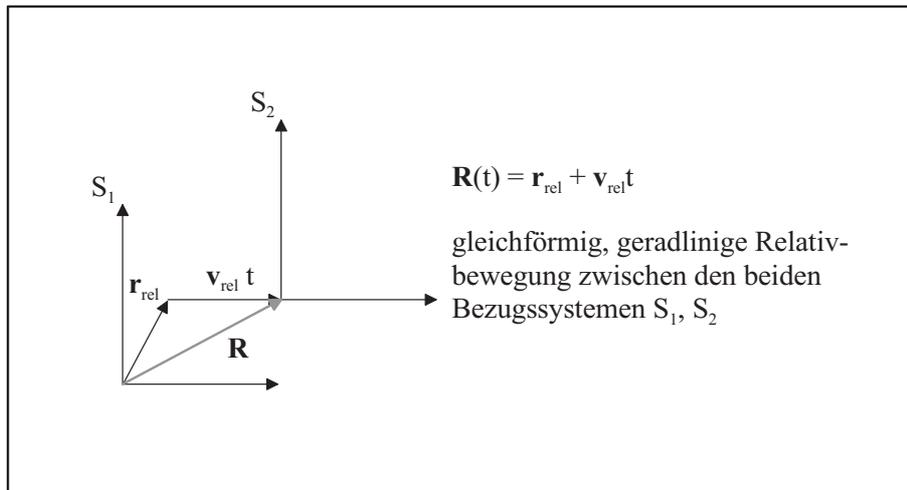
Definition: Impuls ("Bewegungsgröße"); Näheres zu Newton's Formulierung der Grundprinzipien: [4], Kap. 3.2; [9], §1

$$\mathbf{p} := m \cdot \mathbf{v}$$

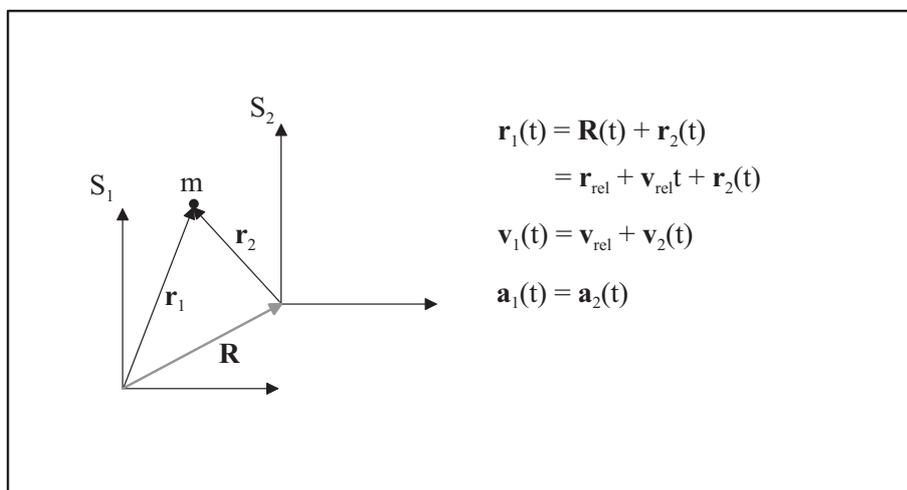
2.1.1 Analyse des 1. Axioms: Inertialsystem (IS) und Galilei-Transformation (GT)

”Galilei’sches Trägheitsprinzip”

falls $\mathbf{F} = 0 \longrightarrow \mathbf{p} = \text{konst.}$



Beschreibung eines MPs aus Sicht von S_1 und S_2 :



Inertialsystem \iff Bezugssystem, in dem sich ein kräftefreier Körper geradlinig, gleichförmig bewegt. Falls $\mathbf{F} = 0 \longrightarrow \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = 0$

Galilei-Transformation $\iff (\mathbf{r}_1, t_1) \longrightarrow (\mathbf{r}_2, t_2)$
mit $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{\text{rel}} - \mathbf{v}_{\text{rel}}t$ und $t_2 = t_1 = t$ (Näheres: Übung 1.4)

2.1.2 Analyse des 2. Axioms: Grundlegende BWGl gilt im IS

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$$

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}$$

falls $\dot{m} = 0 \longrightarrow$

$$m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$$

$\dot{m} \neq 0$: z.B. klassisches Raketenproblem, spezielle Relativitätstheorie

Folgerung:

(i) $0 = \mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} \implies \mathbf{p} = \text{konst.} \longleftrightarrow 1. \text{ Axiom}$

(ii) 'Forminvarianz' der BWGl unter GTs $S_1 : m\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1 = m\mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_2 : S_2$

Beispiel: senkrechter Wurf aus fahrendem Zug ($\mathbf{v}_{Zug} = \text{konst.}$)

$S_1 \curvearrowright$

$S_2 \updownarrow$

2.1.3 Analyse des 3. Axioms: actio = reactio

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{F}_{12} : \text{Kraft von Teilchen 1 auf Teilchen 2} \\ \mathbf{F}_{21} : \text{Kraft von Teilchen 2 auf Teilchen 1} \end{array} \right\} \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

$$\xrightarrow{2. \text{ Axiom}} m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = -m_2 \mathbf{a}_2$$

$$\implies \frac{m_1}{m_2} = \frac{|\mathbf{a}_2|}{|\mathbf{a}_1|} \equiv \frac{a_2}{a_1} \longrightarrow \text{definiertem Massenverhältnis}$$

\rightarrow absolute Skala wird durch Festlegung der Standardmasse $[m] = 1\text{kg}$ eingeführt

\rightarrow 'träge Masse': (skalares) Maß für den Widerstand gegen Bewegungsänderung

\rightarrow Kraft: abgeleitete Größe (nach Newton II) $[\mathbf{F}] = 1 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ N}$

Mögliche Situationen:

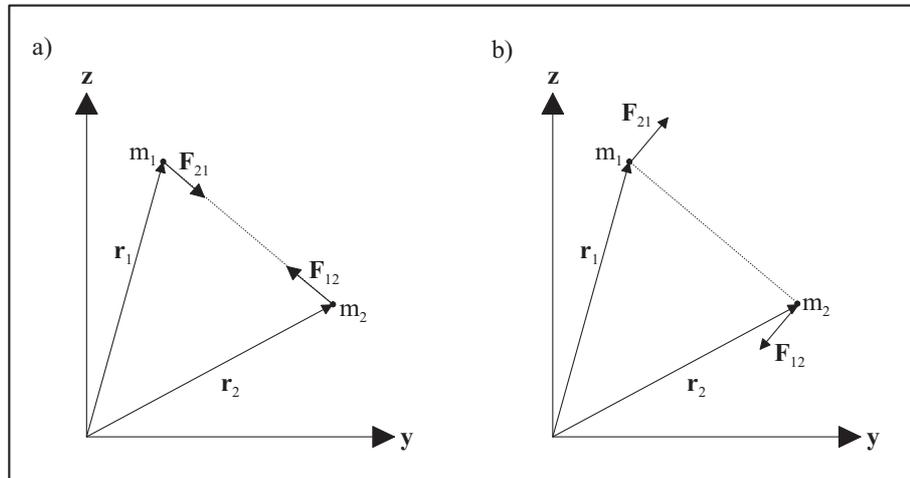


Abbildung 2.1: Die Kraftvektoren können auf einer gemeinsamen Geraden liegen oder parallel zu einander sein, müssen aber in unterschiedliche Richtung zeigen

- 3. Axiom erfüllt für Gravitations- und Coulombwechselwirkung
- Darüber hinaus gilt es i.a. nur in modifizierter Form [8], Kap. 3.1.6

2.1.4 Abschließende Diskussion

- (i) Physikalischer Ursprung von Kräften wird in KM nicht behandelt
- (ii) Grundproblem der KM: Lsg. der gewöhnlichen DGl 2. Ordnung $m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ (+ AB's) (Analytische Lösungsverfahren sind nur für Spezialfälle bekannt, ein numerisches Lösungsverfahren gibt es in [1] KM, Kap. 2.3)
- (iii) Erhaltungssätze folgen als Konsequenz der Axiome

2.2 Grundbegriffe und Erhaltungssätze

2.2.1 Impuls

a) Einfachste Situation: ein kräftefreier MP:

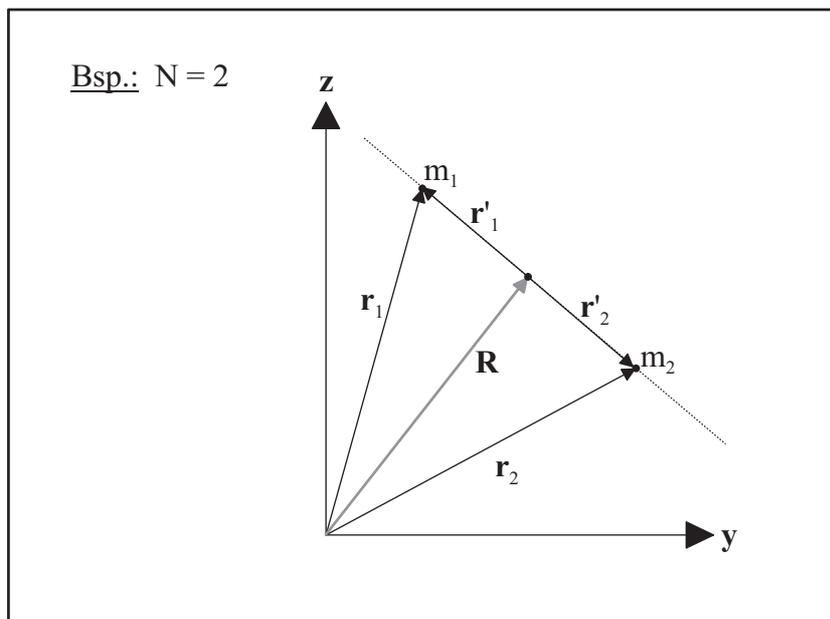
$$\mathbf{F} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{p} = \text{konst.} = m \cdot \mathbf{v}_0 \quad \text{Impulserhaltung}$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} \cdot t \quad \text{geradlinig, gleichförmige Bewegung}$$

b) System von N MPs:

- 'innere Kraft' \mathbf{f}_{ki} : Wechselwirkung zwischen zwei MPs (Kraft von k auf i)
- 'äußere Kraft' \mathbf{F}_i : äußerer Einfluß auf den i-ten MP
- 'Abgeschlossenes System': Keine äußeren Kräfte ($\mathbf{F}_i = 0$ für $i = 1, \dots, N$)
- 'Offenes System': $\mathbf{F}_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, N\}$
- Gesamtmasse: $M = \sum_{i=1}^N m_i$
- Position des 'Schwerpunktes' (SP) (auch Massenmittelpunkt):

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{r}_i$$
- SP-Geschwindigkeit: $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{v}_i$
- SP (Gesamt-) Impuls: $\mathbf{P} = M \cdot \mathbf{V} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i$
- Position eines MPs bzgl. SP: $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$



◁ BWGl für k-ten MP:

$$\dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{F}_k + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{ik}$$

beachte : $\mathbf{f}_{ik} = -\mathbf{f}_{ki} \longrightarrow \mathbf{f}_{kk} = 0$

$$\longrightarrow \sum_{k=1}^N \dot{\mathbf{p}}_k = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k + \sum_{i,k=1}^N \mathbf{f}_{ik}$$

$$\parallel \parallel \parallel$$

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_{ext} + 0$$

”Impulssatz / SP-Satz”

Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse in ihm vereinigt wäre und alle äußeren Kräfte an ihm angreifen würden.

falls $\mathbf{F}_{ext} = 0 \implies \dot{\mathbf{P}} = 0 \longrightarrow \mathbf{P} = \text{konst.}$

Impulserhaltung (gilt in abgeschlossenen Systemen)

In einem abgeschlossenen System kann man von einem 'raumfesten' IS durch eine GT in das (inertiale) 'SP-System' übergehen

2.2.2 Drehimpuls

a) ein MP:

Definition: Drehimpuls (= Moment des Impulses)

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$$

$$|\mathbf{l}| = l = r \cdot p \cdot \sin \gamma$$

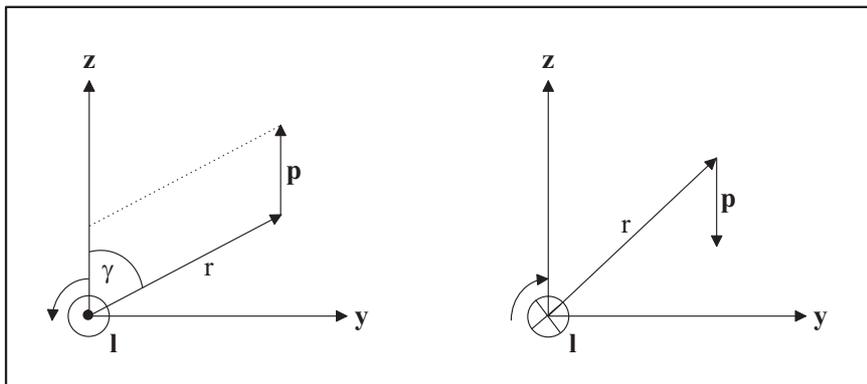


Abbildung 2.2: Im linken Bild zeigt der Drehimpulsvektor aus dem Bald heraus, im rechten Bild hinein

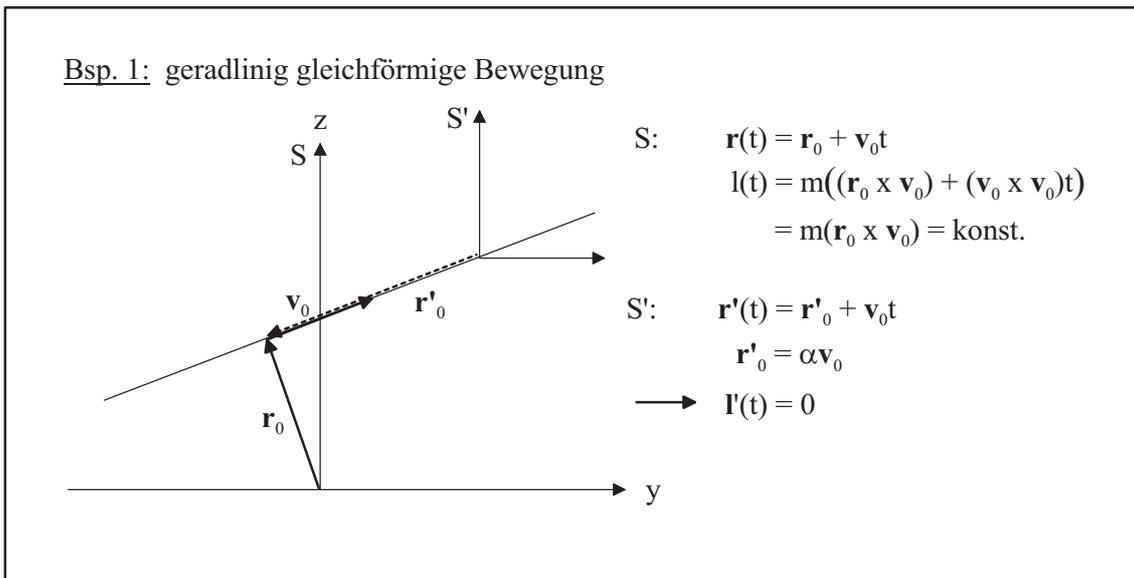


Abbildung 2.3: Bewegung von S transformiert in S'

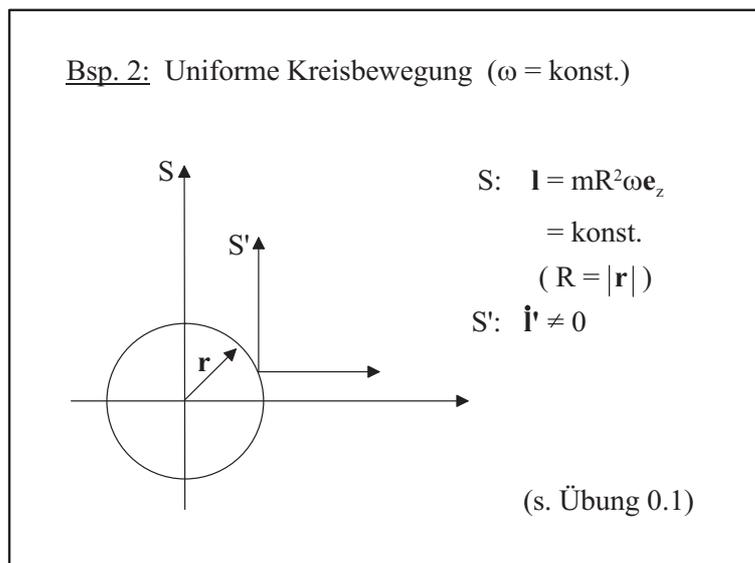


Abbildung 2.4: Uniforme Kreisbewegung

Bemerkung: Vollständige Angabe von \mathbf{l} verlangt Festlegung des Bezugspunktes für die Momentbildung (gilt für jedes Moment eines Vektors)

$$\triangleleft \quad \dot{\mathbf{i}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = m(\mathbf{v} \times \mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Definition: Drehmoment $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

$\dot{\mathbf{i}} = \mathbf{M}$	Drehimpulssatz
---------------------------------	----------------

falls $\mathbf{M} = 0 \implies \dot{\mathbf{i}} = 0, \mathbf{l} = \text{konst.}$	Drehimpulserhaltung
--	---------------------

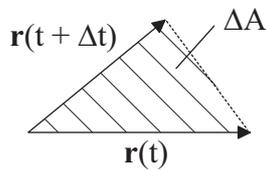
$$\mathbf{M} = 0 \quad \text{falls} \quad \begin{array}{l} (i) \quad \mathbf{F} = 0 \\ (ii) \quad \mathbf{F} = F\mathbf{e}_r : \text{Zentralkraft } \mathbf{F} \parallel \mathbf{r} \end{array}$$

Zwei Aspekte der Drehimpulserhaltung:

(i) Erhaltung der Richtung \longrightarrow ebene Bewegung

(ii) Erhaltung des Betrages:

\triangleleft



$$\begin{aligned} \Delta A &\approx \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t + \Delta t)| \\ &= \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times [\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)]| \\ \frac{\Delta A}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \left| \mathbf{r}(t) \times \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \right| \\ \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} &= \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| \\ \dot{\mathbf{A}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{2m} \mathbf{l} \end{aligned}$$

(als Richtung wird die Flächennormale festgelegt)

'Flächengeschwindigkeit'

$|\dot{\mathbf{A}}| = \text{konst.} \longrightarrow$ Flächensatz

("Gleiche Zeiten, gleiche Flächen")

b) System von N MPs:

Definition: Gesamtdrehimpuls

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}(t) &= \sum_{k=1}^N \mathbf{l}_k(t) \\
 &= \sum_k (\mathbf{r}_k(t) \times \mathbf{p}_k(t)) \\
 \longrightarrow \mathbf{L} &= \sum_k (\mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{p}}_k) \\
 &= \sum_{k=1}^N (\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k) + \sum_{i,k=1}^N (\mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_{ik}) \\
 \underline{\text{NR:}} \quad \sum_{i,k} (\mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_{ik}) &= \sum_{i,k} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ki}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \{(\mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_{ik}) + (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ki})\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \{(\mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_{ik}) - (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ik})\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{f}_{ik}\} = 0, \quad \text{falls} \\
 \mathbf{f}_{ik} &= \mathbf{f}_{ik} \cdot (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)
 \end{aligned}$$

(\mathbf{f}_{ik} zeigt in Richtung von $(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)$; vgl. Skizze auf Seite 8)

$$\text{Gesamtdrehmoment} \quad \mathbf{M} = \sum_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k) = \sum_k \mathbf{M}_k$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}} \quad \text{Drehimpulserhaltung}$$

$$\text{falls } \mathbf{M} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{L}} = 0 \\ \mathbf{L} = \text{konst.} \end{array} \right\} \quad \text{Drehimpulserhaltung}$$

(gilt in abgeschlossenen Systemen)

Drehimpuls + Schwerpunkt: (vgl. Skizze Seite 9)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_k &= \mathbf{r}'_k + \mathbf{R} \quad ; \quad \mathbf{v}_k = \mathbf{v}'_k + \mathbf{V} \\
 \longrightarrow \mathbf{L} &= \sum_k m_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k) \\
 &= \sum_k m_k \{ (\mathbf{r}'_k + \mathbf{R}) \times (\mathbf{v}'_k + \mathbf{V}) \} \\
 &= \underbrace{\sum_k m_k (\mathbf{R} \times \mathbf{V}) + (\mathbf{R} + \mathbf{v}'_k) \times (\mathbf{r}'_k \times \mathbf{V}) + (\mathbf{r}'_k \times \mathbf{V})}_{\hookrightarrow M(\mathbf{R} \times \mathbf{V}) = \mathbf{R} \times \mathbf{P} \equiv \mathbf{L}_{SP}} \\
 \triangleleft \sum_k m_k \mathbf{r}'_k &= \sum_k m_k (\mathbf{r}_k - \mathbf{R}) = \sum_k m_k \mathbf{r}_k - M\mathbf{R} = M\mathbf{R} - M\mathbf{R} = 0 \\
 \longrightarrow \sum_k m_k \mathbf{v}'_k &= \frac{d}{dt} \sum_k m_k \mathbf{r}'_k = 0
 \end{aligned}$$

$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{SP} + \mathbf{L}'$	wobei $\mathbf{L}_{SP} = \mathbf{R} \times \mathbf{P}$, $\mathbf{L}' = \sum \mathbf{l}'_k = \sum m_k (\mathbf{r}'_k \times \mathbf{v}'_k)$
--	---

$ \begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k) = \sum_k \{ (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_k) \times \mathbf{F}_k \} \\ &= \mathbf{R} \times \sum_k \mathbf{F}_k + \sum_k (\mathbf{r}'_k \times \mathbf{F}_k) = \mathbf{R} \times \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{M}'_{ext} \\ &= \mathbf{M}_{SP} + \mathbf{M}'_{ext} \end{aligned} $

$$\xrightarrow{\text{Drehimpulssatz}} \dot{\mathbf{L}}_{SP} + \dot{\mathbf{L}}_{ext} = \mathbf{M}_{SP} + \mathbf{M}_{ext}$$

Wegen $\dot{\mathbf{L}}_{SP} = M(\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{V}}) = \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{P}} \stackrel{SP\text{-Satz}}{=} \mathbf{R} \times \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{M}_{SP}$ folgt

$\dot{\mathbf{L}}_{SP} = \mathbf{M}_{SP}$

Drehimpulssatz für SP

$\dot{\mathbf{L}}' = \mathbf{M}'_{ext}$

Drehimpulssatz für Teilchensystem bzgl. SP

(hat die selbe Form wie der ursprüngliche Drehimpulssatz, obwohl das SP-System i.a. kein Inertialsystem ist)

2.3 Arbeit und Energie

a) Ein MP:

Definition: Sei $\mathbf{r}(t)$ die in $[t_0, t]$ durchlaufene Bahn

$$A := \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t'), t') \cdot \mathbf{v}(t') dt' \quad \text{Arbeit}$$

Falls Kraft "Vektorfeld" $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r)$ ist: [6], Kap. 4.2

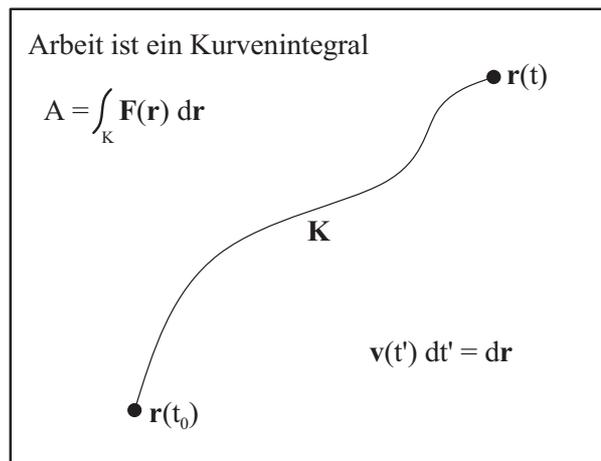


Abbildung 2.5: Kurvenintegral der Arbeit

Diskussion:

- (i) Falls $\mathbf{F} = \text{konst.}$ und Weg geradlinig $\longrightarrow A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$
- (ii) $A = 0$ falls $\mathbf{F} \perp \mathbf{r}$

Beispiel 1: Anheben einer Masse $m \perp$ zur Äquipotentialfläche des Schwerfeldes $\longrightarrow A = 0$ bei $v_{\parallel} = 0$

Beispiel 2: Uniforme Kreisbewegung

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (R \cdot \cos \omega t, R \cdot \sin \omega t) \\ \mathbf{v} &= (-R \cdot \omega \cdot \sin \omega t, R \cdot \omega \cdot \cos \omega t) \\ \mathbf{a} &= (-R \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t, -R \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t) \\ &= -\omega^2 \cdot \mathbf{r} \\ \longrightarrow m \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{F}(\mathbf{r}) \\ &= -m \cdot \omega^2 \cdot \mathbf{r} \\ \longrightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0 &\iff \mathbf{F} \perp \mathbf{v} \implies A = 0 \end{aligned}$$

$$(iii) \text{ "Arbeit" } [A] = 1 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = 1 \text{Nm} = 1 \text{Joule}$$

$$(iv) P := \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t'), t') \cdot \mathbf{v}(t') dt' = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) \cdot \mathbf{v}(t)$$

$$\text{"Leistung" } [P] = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \text{Watt}$$

$$\begin{aligned} \triangleleft \quad A &= \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t'), t') \cdot \mathbf{v}(t') dt' \\ &= m \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{v}}(t') \cdot \mathbf{v}(t') dt' \\ &= \frac{m}{2} \int_{t_0}^t \frac{d}{dt'} (v^2(t')) dt' \\ &= \frac{m}{2} (v^2(t) - v^2(t_0)) \\ &= \frac{1}{2m} (\mathbf{p}^2(t) - \mathbf{p}^2(t_0)) \end{aligned}$$

Definition: kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{p^2}{2m} \geq 0$$

$$\longrightarrow T(t) = T_0(t) + A(t_0 \rightarrow t) \quad \text{'A-T-Relation'}$$

Definition: konservatives Kraftfeld

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &:= -\nabla U(\mathbf{r}) \\ \iff \int_{K_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' &= \int_{K_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ \iff \oint_K \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{'Beweis'}}{\implies} \int_{K_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' &= - \int_{K_1} \nabla U(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ &= - \int_{r_0}^r dU = U(\mathbf{r}_0) - U(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Rückweg wird gezeigt unter der Zuhilfenahme des Mittelwertsatzes. Außerdem folgt:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = 0$$

Rückweg wird gezeigt mit dem Integralsatz von Stokes:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A} = \oint_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{siehe [6], Kap. 4.3})$$

Konservatives Kraftfeld:

$\mathbf{F} = -\nabla U$	\iff	$\nabla \times \mathbf{F} = 0$
\Downarrow	$\swarrow \searrow$	\Downarrow
$\int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$	\iff	$\oint_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$

$$U(\mathbf{r}) = - \int^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r} \quad \text{"potentielle Energie"}$$

Übliche Festlegung der unbestimmten Konstanten durch $U(\mathbf{r}) \xrightarrow{\mathbf{r} \rightarrow \infty} 0$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \quad A &= U(1) - U(2) = T(2) - T(1) \\ \iff \quad T(1) + U(1) &= T(2) + U(2) \end{aligned}$$

$E = T + U = \text{konst.}$	Energieerhaltung
-----------------------------	------------------

Allgemeine Situation:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_{\text{konservativ}} + \mathbf{F}_{\text{dissipativ}} \\ \nabla \times \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F}_{\text{diss}} \neq 0 \end{aligned}$$

◁ Newton II:

$$\begin{aligned} m \cdot \dot{\mathbf{v}} &= -\nabla U(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_{\text{diss}} \\ \mathbf{F}_{\text{diss}} &= m \cdot \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \nabla U \cdot \mathbf{v} \\ \iff \mathbf{F}_{\text{diss}} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} v^2 + U(\mathbf{r}(t)) \right) \end{aligned}$$

$\frac{d}{dt} (T + U) = \frac{dE}{dt} = \mathbf{F}_{\text{diss}} \cdot \mathbf{v}$	"allg. Energiesatz"
--	---------------------

Definition: $A_{\text{diss}} = \int \mathbf{F}_{\text{diss}} \cdot \mathbf{v} dt \longrightarrow \frac{dA_{\text{diss}}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{diss}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{P}_{\text{diss}}$

b) System von N MPs:

Ausgangspunkt: BWGl für k-ten MP: $\dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{F}_k + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{ik}$

Einschränkungen:

(i) $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k(\mathbf{r}_k) = -\nabla_k \cdot U_k(\mathbf{r}_k)$ (äußere Kräfte sind konservativ)

(ii) $\mathbf{f}_{ik} = \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) = \mathbf{f}_{ki}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)$ (hängen nur jeweils von $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)$ ab)

(iii) $\nabla_k \times \mathbf{f}_{ik} = \nabla_i \times \mathbf{f}_{ki} = 0$ (sind konservativ)

$$\longrightarrow \mathbf{f}_{ik} = -\nabla_k V_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k), \mathbf{f}_{ki} = -\nabla_i V_{ki}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)$$

Konservative innere Kräfte zwischen zwei MPs können auf ein gemeinsames Potential zurückgeführt werden (d.h $V_{ik} = V_{ki}$)

$\nabla_k V_{ik} = -\nabla_k V_{ki}$	"zwei Teilchen WW"
--------------------------------------	--------------------

$$\begin{aligned} \triangleleft \quad \dot{\mathbf{p}}_k &= \mathbf{F}_k + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{ik} \\ \longrightarrow \sum_k \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{v}_k &= \sum_k m_k \cdot \dot{\mathbf{v}}_k \cdot \mathbf{v}_k - \sum_k \mathbf{F}_k \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{v}_k \\ RS : &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_k m_k \mathbf{v}_k^2 + \sum_k \nabla_k U_k(\mathbf{v}_k) \cdot \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_k \left(\frac{m_k}{2} \mathbf{v}_k^2 + U_k(\mathbf{r}_k(t)) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \sum_k (T_k + U_k) = \frac{d}{dt} (T + U) \\ LS : &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \left(\mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{v}_k + \mathbf{f}_{ki}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{v}_i \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \left(\mathbf{f}_{ik} \cdot \mathbf{v}_k - \mathbf{f}_{ik} \cdot \mathbf{v}_i \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \mathbf{f}_{ik} \cdot (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i) \end{aligned}$$

Angewandte Transformation : $\mathbf{r}_{ik} := \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$
 $\mathbf{v}_{ik} := \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_k$

$$\begin{aligned}\nabla_i V_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) &= \nabla_{ik} V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) = -\nabla_k V_{ik} \\ \hookrightarrow \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) &= -\nabla_k V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) = \nabla_{ik} V_{ik}(\mathbf{r}_{ik})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\longrightarrow RS : &= -\frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) \cdot \mathbf{v}_{ik} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \nabla_{ik} V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) \cdot \frac{d\mathbf{r}_{ik}}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}(t)) \\ &= -\frac{d}{dt} V\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\frac{d}{dt} (T + U + V) &= 0 \\ T + U + V &= \text{konst.}\end{aligned}} \longrightarrow \text{Energieerhaltung}$$

Die Beträge der ges. Energie E:

- $T = \sum_k T_k$: kinetische Energie des Teilchensystems
- $U = \sum_k U_k$: potentielle Energie aufgrund äußerer Kräfte
- $V = \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} V_{ik} = \sum_{i < k} V_{ik}$: 'interne' WW-Energie

Beispiele:

$$\begin{aligned}\underline{N=2}: \quad V &= \frac{1}{2} (V_{12} + V_{21}) \stackrel{V_{12} \equiv V_{21}}{=} V_{12} \\ \underline{N=3}: \quad V &= \frac{1}{2} (V_{12} + V_{13} + V_{23} + V_{21} + V_{31} + V_{32}) \\ &= \underbrace{V_{12} + V_{13} + V_{23}} \\ &\Rightarrow \sum_{i < k} V_{ik}\end{aligned}$$

Kapitel 3

Anwendungen I

3.1 Elementare Bewegungsprobleme

3.1.1 Eindimensionale Probleme ($E = T + U = \text{konst.}$)

a) Qualitative Vorbemerkung:

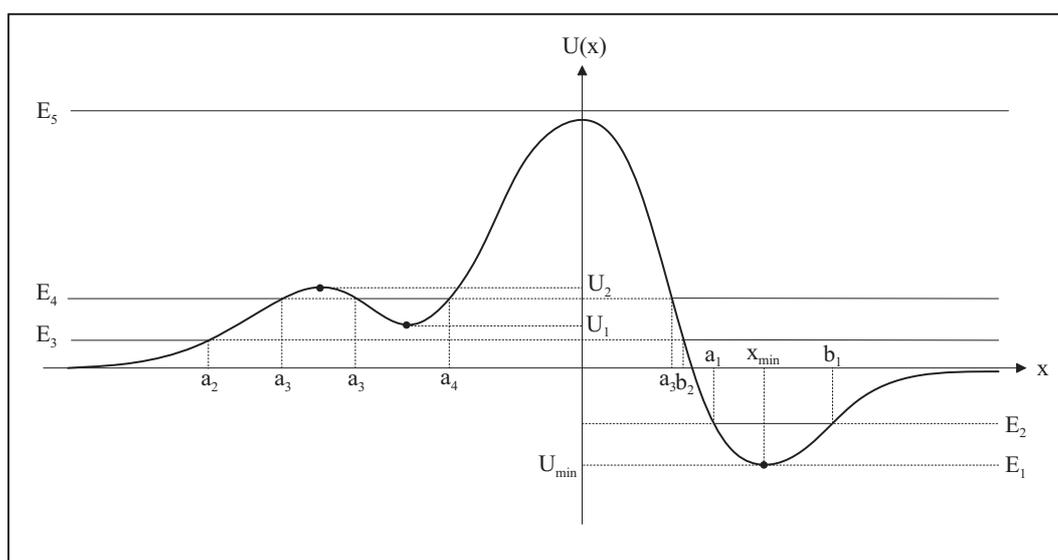


Abbildung 3.1: Potential

$$E = T + U \iff E - U(x) = T > 0$$

$$\iff$$

$$E \geq U(x)$$

- (i) $E < U_{min}$: nicht möglich
- (ii) $E_1 = U_{min}$: ruhender MP bei $x = x_{min}$
- (iii) $U_{min} < E_2 < 0$: gebundene (finite) Bewegung in $[a_1, b_1]$
 $\dot{x}(a_1) = v(a_1) = v(b_1) = \dot{x}(b_1) = 0$; a_1, b_1 Umkehrpunkte
- (iv) $0 < E_3 < U_1$: ungebundene (infinite) Bewegung entweder in $(-\infty, a_2]$
oder in $[b_2, \infty)$
- (v) $U_1 < E_4 < U_2$: finite Bewegung in $[a_3, b_3]$ oder infinite in $(-\infty, a_3]$
oder $[b_3, \infty)$
- (vi) $U_{max} < E_5$: infinite Bewegung in $(-\infty, \infty)$

Eine Analoge Diskussion ist möglich im dreidimensionalen Raum im Falle eines Zentralkraftproblems

b) Quantitative Vorbemerkung:

$$E = T + U \iff v^2(t) = \frac{2(E - U(x))}{m}$$

$$\iff \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2(E - U(x))}{m}}$$

Lösung der DGl durch 'Variablentrennung':

$$\pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2(E - U(x))}{m}}} = \int dt$$

$$\iff t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int [E - U(x)]^{-\frac{1}{2}} dx + konst. = t(x)$$

→ Umkehrung liefert $x(t)$

→ Energiesatz = 1. Integral der BWGl

c) Mathematische Vorbemerkung zur gewöhnlichen DGl:

Siehe dazu [6], Kap.5; [1], Kap. 3.2, Anhang C.3; [8], Mathematische Ergänzungen (CD), Kap. 2 und 6

- (i) Hinreichende Existenz- und Eindeutigkeitsbedingungen: $\dot{x} = f(x, t)$
gewöhnliche DGl 1. Ordnung (explizit)
Falls f stetig (partiell) differenzierbar ist, so existiert (für jedes Paar von Anfangswerten (x_0, t_0)) eine eindeutige Lösung der DGl., d.h.

$$\exists x(t) : \dot{x} = f(x(t), t) \quad \text{mit} \quad x(t_0) = x_0$$

(ii) Analoges gilt für DGI-Systeme:

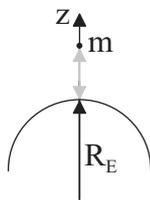
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n, t) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, t)\end{aligned}$$

(iii) Eine DGI n-ter Ordnung kann man auf ein System von DGI's 1. Ordnung zurückführen, insbesondere:

$$\begin{aligned}\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) &\implies \dot{x} = v \\ &\dot{v} = f(x, v, t)\end{aligned}$$

(iv) Systematische Lösungsmethoden sind nur für spezielle Typen von DGI's bekannt (insb. lineare DGI's mit konstanten Koeffizienten)

d) Bewegung im homogenen Schwerefeld (der Erde):



$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -m^* g \mathbf{e}_z \\ g &= \frac{M_E \cdot \gamma}{R_e^2} \\ &= 9,81 \frac{m}{s^2} \quad (\text{Gravitationsbeschleunigung})\end{aligned}$$

(Werte Siehe Kapitel 9)

Frage 1: Wie kommt man vom allg. Gravitationsgesetz zum homogenen Schwerefeld der Erde?

Frage 2: Träge und Schwere Masse

→ empirisch: $m = m^*$ (mit Messgenauigkeit $\frac{\Delta m}{m} = \frac{m-m^*}{m} \lesssim 10^{-10}$)

→ theoretisch: $m = m^*$ Ist eine Grundannahme der Allgemeinen Relativitätstheorie (Äquivalenzprinzip: Gravitationskräfte sind äquivalent zu Trägheitskräften)

Exkurs zu Frage 1: Ausgangspunkt: Newton's Gravitationsgesetz

$$\mathbf{F}_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\mathbf{F}_{12}$$

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

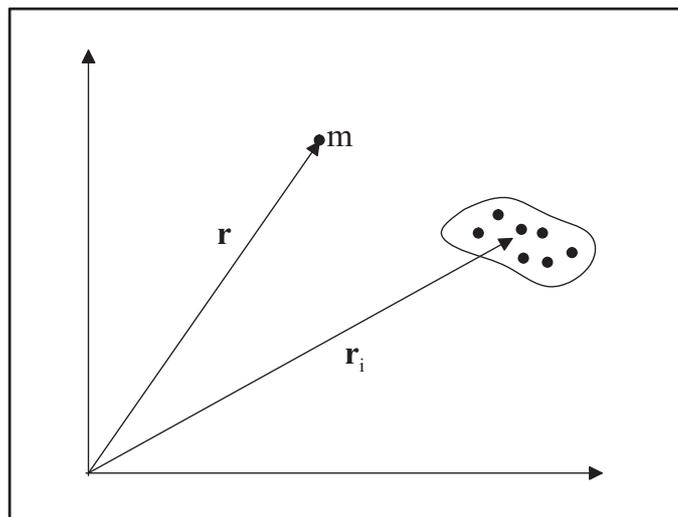
(zur Veranschaulichung siehe hierzu Abbildung 2.1)

$$\nabla_1 \times \mathbf{F}_{21} = \nabla \times \mathbf{F}_{12} = 0$$

→ potentielle Energie:

$$U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \equiv U_{12} = U_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

(Prüfe: $\nabla_1 U_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{12} = -\nabla_2 U_{12}$)

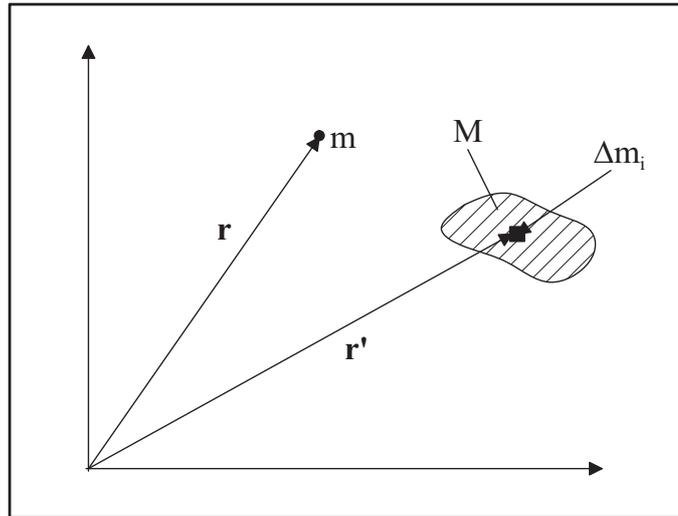


Schritte:

- Potentielle Energie des MPs m aufgrund der diskreten Massenverteilung (m_1, \dots, m_N)

$$U(\mathbf{r}) = -\gamma m \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

- Potentielle Energie aufgrund kontinuierlicher Massenverteilung



$$\begin{aligned}
 m_i \equiv \Delta m_i &\approx \rho(\mathbf{r}_i) \Delta V_i \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} \rho(\mathbf{r}') dV' = \rho(\mathbf{r}') d^3 r' \\
 &\longrightarrow M = \int_V \rho(\mathbf{r}') d^3 r' \\
 &\longrightarrow U(\mathbf{r}) = -\gamma m \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'
 \end{aligned}$$

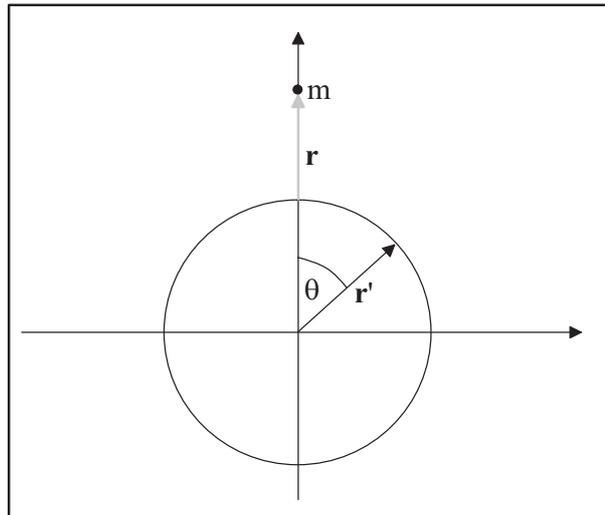
- Annahme: homogene Massenverteilung $\rho(\mathbf{r}') = \rho_0$
 Auswertung des Integrals:

$$\begin{aligned}
 d^3 r' &= r'^2 dr' \sin \Theta' d\Theta' d\phi' \\
 \mathbf{r} &= (0, 0, z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \longrightarrow U(\mathbf{r}) &= -\gamma m \rho_0 \int \frac{d^3 r'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Theta'}} \\
 &= -\gamma m \rho_0 \int_0^{R_E} dr' r'^2 \int_0^\pi \frac{\sin \Theta' d\Theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Theta'}} \int_0^{2\pi} d\phi'
 \end{aligned}$$

1. Substitution:

$$\begin{aligned}
 x &= \cos \Theta' ; & x(0) &= 1 \\
 dx &= -\sin \Theta' d\Theta' ; & x(\pi) &= -1
 \end{aligned}$$



$$U(\mathbf{r}) = -2\pi\gamma m\rho_0 \int_0^{R_E} dr' r'^2 \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'x}}$$

Bemerkung:

Zu diesem Zwischenergebnis gelangt man direkt durch die Zerlegung des Volumenelements $d^3r' = r'^2 dr' d(\cos \Theta') d\phi'$ und der Verwendung der entsprechenden Integrationsgrenzen.

2. Substitution:

$$\begin{aligned} y &= r^2 + r'^2 - 2rr'x \\ dy &= -2rr' dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'x}} &= -\frac{1}{2rr'} \int_{y(-1)}^{y(1)} \frac{dy}{\sqrt{y}} \\ &= -\frac{1}{rr'} \left[r^2 + r'^2 - 2rr'x \right]^{\frac{1}{2}} \Big|_{-1}^1 \\ &= -\frac{1}{rr'} \left[\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'} - \sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr'} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{rr'} \left[\sqrt{(r-r')^2} - \sqrt{(r+r')^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{rr'} \begin{cases} r - r' - (r + r') = \frac{2}{r} & r > r' \\ r' - r - (r + r') = \frac{2}{r} & r' > r \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Fall 1: } r > R_E \quad \longrightarrow \quad U(\mathbf{r}) &= -4\pi\gamma m\rho_0 \frac{1}{r} \int_0^{R_E} r'^2 dr' \\
 &= \underbrace{-\frac{4\pi}{3}\rho_0 R_E^3 \gamma \frac{m}{r}}_{M_E} \\
 &= -\gamma \frac{mM_E}{r} = U(r)
 \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{mM_E}{r^3} \mathbf{r} = -\gamma \frac{mM_E}{r^2} \mathbf{e}_r$$

Definition:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{'Gravitationsfeld' } G(\mathbf{r}) &= \frac{1}{m} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{M_E}{r^2} \mathbf{e}_r \\
 \text{'Gravitationspotential' } \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{m} U(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{M_E}{r}
 \end{aligned} \right\} \text{unabh. vom 'Probekörper' } m$$

Entwicklung für $r = R_E + z'$ mit $z' \ll R_E$:

$$\begin{aligned}
 \longrightarrow U(r) &= -\gamma mM_E \frac{1}{R_E + z'} \\
 &= -\gamma \frac{mM_E}{R_E} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z'}{R_E}} \\
 &\approx -\gamma \frac{mM_E}{R_E} \cdot \left(1 - \frac{z'}{R_E} + \left(\frac{z'}{R_E}\right)^2 - \dots\right)
 \end{aligned}$$

$$\approx -\gamma \frac{mM_E}{R_E} + \gamma \frac{mM_E}{R_E^2} z' \pm \dots$$

$$= U_0 + mgz' + \dots \quad \left(g = \gamma \frac{mM_E}{R_E^2}\right)$$

$$\longrightarrow \tilde{U} = U - U_0 = mgz' ; \quad \mathbf{F}(z) = -\frac{dU}{dz} \mathbf{e}_z = -mg\mathbf{e}_z$$

$$\text{Fall 2: } r < R_E \quad \longrightarrow \quad \int_0^{R_E} dr' = \underbrace{\int_0^r dr'}_{r > r'} + \underbrace{\int_r^{R_E} dr'}_{r' > r}$$

$$\begin{aligned}
 \longrightarrow U(r) &= -4\pi\gamma m\rho_0 \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r r'^2 dr' + \int_0^{R_E} r' dr' \right\} \\
 &= -4\pi\gamma m\rho_0 \left\{ \frac{1}{3} r^2 + \frac{1}{2} (R_E^2 - r^2) \right\} \\
 &= -4\pi\gamma m\rho_0 \left[\frac{1}{2} R_E^2 - \frac{1}{6} r^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$M_E = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R_E^3 \iff \rho_0 = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{M}{R_E^3}$$

$$U(r) = -\gamma m M_E \left[\frac{3}{2} \frac{1}{R_E} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R_E^3} \right]$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{m M_E}{R_E^3} \mathbf{r}$$

Zusammenfassung:

$$U(r) = -\gamma m M_E \begin{cases} \frac{1}{r} & r > R_E \\ \frac{3}{2} \frac{1}{R_E} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R_E^3} & r \leq R_E \end{cases}$$

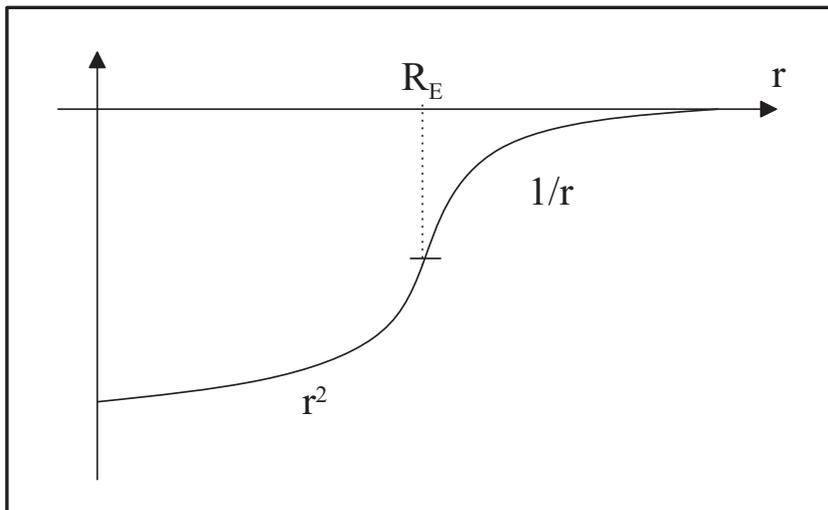


Abbildung 3.2: Potentialverlauf im inneren und im Außenbereich der Erde

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\gamma m M_E \begin{cases} \frac{1}{r^3} \mathbf{r} & r \geq R_E \\ \frac{1}{R_E^3} \mathbf{r} & r \leq R_E \end{cases}$$

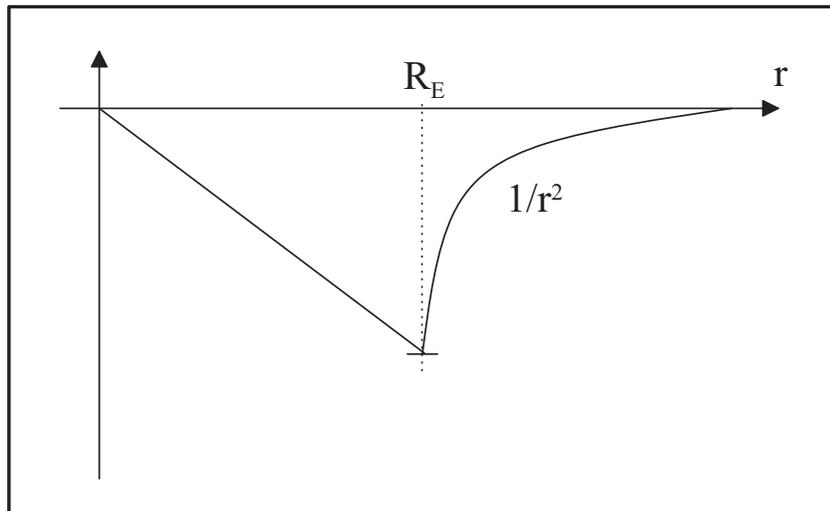


Abbildung 3.3: Verlauf der Erdanziehungskraft außerhalb und innerhalb der Erde

Zusatzbemerkungen:

- (i) $\phi(r) = -\gamma \frac{M}{r}$ für $r > R$ gilt für jede isotrope Dichteverteilung ($\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$). Das Gravitationspotential/-feld einer isotropen Massenverteilung sieht von außen aus wie das eines Massenpunktes der Gesamtmasse M im SP.
- (ii) Analoge Aussagen gelten in der Elektrostatik
- (iii) Alternative Rechenmethoden: "Gauß'sches Gesetz"; "Multipolentwicklung"

BWGl für Bewegung im homogenen Schwerfeld:

$$\begin{aligned}
 \ddot{z} &= -g \\
 \dot{z} &= v_z \\
 \dot{v}_z &= \frac{dv_z}{dt} = -g \\
 \text{Variablentrennung} \quad \int dv_z &= -g \int dt \\
 v_z(t) &= -gt + C_1 \\
 v_z(0) &= v_0 = C_1 \\
 \int dz &= -g \int dt + v_0 \int dt \\
 \implies z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C_2 \\
 AB : z(0) &= z_0 = C_2
 \end{aligned}$$

$$\text{insb. } \xrightarrow{v_0=0} \boxed{z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2} \quad \text{freier Fall}$$

Alternative Lösungsweg:

$$\text{Ausgangspunkt (E - Satz)} \quad t(z) = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{z_0}^z [E - U(z')]^{-\frac{1}{2}} dz' \quad (t_0 = 0)$$

$$\text{mit } U(z) = mgz \quad t(z) = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{z_0}^z \frac{dz'}{\sqrt{E - mgz'}}$$

$$t(z) = \sqrt{\frac{2}{mg^2}} \left\{ \sqrt{E - mgz} - \sqrt{E - mgz_0} \right\}$$

$$\sqrt{E - mgz} = \sqrt{\frac{m}{2}}gt + \sqrt{E - mgz_0}$$

$$E - mgz = \left(\sqrt{E - mgz_0} + \sqrt{\frac{m}{2}}gt \right)^2$$

$$\iff \boxed{z(t) = \frac{E}{mg} - \frac{1}{mg} \left(\sqrt{E - mgz_0} + \sqrt{\frac{m}{2}}gt \right)^2}$$

$$\text{ABs: } z(0) = z_0; \quad v_z(0) = 0; \quad \longrightarrow \quad E = T + U = T(0) + U(0) = mgz$$

$$\longrightarrow \boxed{z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2}$$

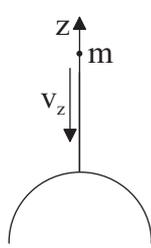
3.1.2 Reibung ($\dot{E} \neq 0$)

Phänomenologische Ansätze (Bewegung in einem Medium)

(i) Stokes'sche (viskose) Reibung $\mathbf{F}_S = -\beta\mathbf{v}$ ($\beta > 0$)
 \longrightarrow gültig für 'kleine' \mathbf{v}

(ii) Newton'sche Reibung $\mathbf{F}_N = -\gamma v\mathbf{v}$ ($\gamma > 0$); ($v = |\mathbf{v}| > 0$)
 \longrightarrow gültig für 'größere' \mathbf{v} (aber kleiner als Schallgeschwindigkeit)

a) Freier Fall mit Stokes'scher Reibung:



$$\ddot{z} = -g - bv_z \quad (b = \frac{\beta}{m})$$

$$= -g - b\dot{z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dz}{dt} = v_z \\ \dot{v}_z = \frac{dv_z}{dt} = -g - bv_z \end{cases}$$

Variablentrennung \rightarrow

$$\int \frac{dv_z}{g + bv_z} = - \int dt = -t + konst.$$

$$\ln(g + bv_z) = -bt + konst.$$

$$g + bv_z = C_1 e^{-bt}$$

$$v_z(t) = \frac{C_1}{\beta} m \cdot e^{-\frac{\beta t}{m}} - \frac{mg}{\beta}$$

AB : $v_z(0) = v_0 = \frac{C_1}{\beta} m - \frac{mg}{\beta}$

$$\Leftrightarrow C_1 = \frac{v_0 \beta}{m} + g$$

\Leftrightarrow

$$v_z(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{\beta} \right) \cdot e^{-\frac{\beta t}{m}} - \frac{mg}{\beta}$$

2. Integration \rightarrow

$$z(t) = -\frac{m}{\beta} \left(v_0 + \frac{mg}{\beta} \right) \cdot e^{-\frac{\beta t}{m}} - \frac{mgt}{\beta} + C_2$$

AB : $z(0) = z_0 = -\frac{m}{\beta} \left(v_0 + \frac{mg}{\beta} \right) + C_2$

\Leftrightarrow

$$z(t) = z_0 - \frac{mgt}{\beta} + \frac{m}{\beta} \left(v_0 + \frac{mg}{\beta} \right) \left(1 - e^{-\frac{\beta t}{m}} \right)$$

Diskussion:

(i) Beschleunigung $a_z(t) = \dot{v}_z = -\frac{\beta}{m} \left(v_0 + \frac{mg}{\beta} \right) \cdot e^{-\frac{\beta t}{m}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

\rightarrow Langzeitverhalten:

$$\left. \begin{aligned} v_z(t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\frac{mg}{\beta} \equiv -v_\infty = konst. \\ z(t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} z_0 + \frac{v_0 + v_\infty}{b} - v_\infty t \end{aligned} \right\} \text{geradlinig, gleichf\u00f6rmige Bewegung}$$

(ii) Kurzzeitverhalten: ($t \rightarrow 0$)

benütze
$$e^{-bt} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b^n}{n!} t^n \approx 1 - bt + \frac{1}{2} b^2 t^2 \pm \dots$$

$$\begin{aligned} z(t) &\approx z_0 - v_{\infty} t + \frac{v_0 + v_{\infty}}{b} (1 - 1 + bt - \frac{1}{2} b^2 t^2 \pm \dots) \\ &= z_0 - v_0 t - \frac{b}{2} (v_0 + v_{\infty}) t^2 \end{aligned}$$

für $v_0 = 0$
$$z(t) = z_0 - \frac{g}{2} t^2$$

→ ungebremster freier Fall für $t \rightarrow 0$

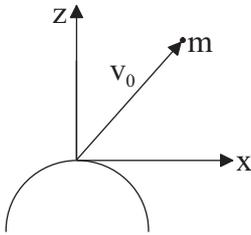
(iii) Reibungsfreier Grenzfall ($\beta \rightarrow 0$)

$\xrightarrow{s.(ii)}$
$$z(t) = z_0 - \frac{g}{2} t^2$$

(iv) Starke Reibung ($\beta \rightarrow \infty$)

$$z(t) = z_0$$
 (keine Bewegung im ∞ -zähen Medium)

b) Schiefer Wurf mit Stokes'scher Reibung:



BWGl:
$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\mathbf{e}_z - \beta\dot{\mathbf{r}}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \ddot{x} &= -b\dot{x} & (b = \frac{\beta}{m}) \\ \ddot{z} &= -g - b\dot{z} \end{aligned}$$

x-Komponente:

$$\begin{aligned} \dot{x} = v_x; \frac{dv_x}{dt} &= -bv_x \longrightarrow \int \frac{dv_x}{v_x} = -b \int dt \\ \longrightarrow v_x(t) &= v_0^x \cdot e^{-bt} \\ \xrightarrow{v_x = \dot{x}} x(t) &= x(0) + \frac{v_0^x}{b} (1 - e^{-bt}) \end{aligned}$$

Diskussion:

- (i) $t \rightarrow \infty$ $x(t) \rightarrow x(0) + \frac{v_0^x}{b} = x_{max}$ Maximale Wurfmasse = $\frac{v_0^x}{b}$
- (ii) $t \rightarrow 0$ $x(t) \approx x(0) + v_0^x t \rightarrow$ geradlinig, gleichförmige Bewegung
- (iii) $\beta \rightarrow 0$ \rightarrow siehe (ii)
- (iv) $\beta \rightarrow \infty$ $x(t) \rightarrow x_0$

(v) Raumkurve (Orbit):

$$\begin{aligned} x(t) &= \underbrace{x_0}_{=x(0)} + \frac{v_0^x}{b}(1 - e^{-bt}) \\ \Leftrightarrow e^{-bt} &= 1 - \frac{b}{v_0^x}(x - x_0) \\ t &= -\frac{1}{b} \cdot \ln\left(1 - \frac{b}{v_0^x}(x - x_0)\right) \end{aligned}$$

$$z(x) = z_0 + \frac{v_\infty}{b} \cdot \ln\left(1 - \frac{b}{v_0^x}(x - x_0)\right) + \frac{v_0^z + v_\infty}{v_0^x}(x - x_0)$$

c) Freier Fall mit Newton'scher Reibung:

BWGl :

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= -mg\mathbf{e}_z - \gamma v\mathbf{v} \\ \dot{v}_z = \ddot{z} &= -g - c|v_z|v_z \quad (c = \frac{\gamma}{m}) \\ \Leftrightarrow \int \frac{dv_x}{g + c|v_z|v_z} &= -\int dt = -t + konst. \end{aligned}$$

Integrale:

$$\int \frac{dx}{a^2 + |x|x} = \frac{1}{a} \begin{cases} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) & 0 \leq x \\ \operatorname{artanh}\left(\frac{x}{a}\right) & -|a| < x \leq 0 \\ \operatorname{arcoth}\left(\frac{x}{a}\right) & x < -a \end{cases}$$

Näheres siehe Übung 3.3

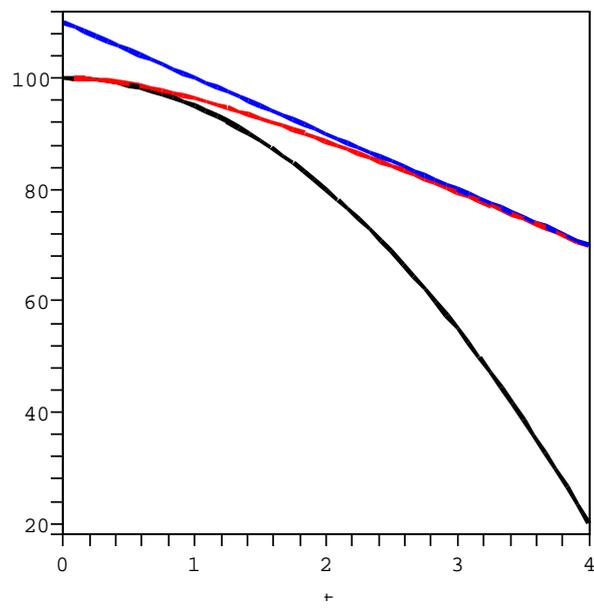
d) Abschließende Bemerkungen:

- (i) Reibungskräfte sind nicht konservativ, sondern dissipativ
- (ii) Allg. E-Satz: $\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}(T - U) = \mathbf{F}_R \cdot \mathbf{v} = -F_R \cdot v < 0$
 \rightarrow mechanische Energie nimmt ab (Umwandlung in Wärme)
- (iii) $A_R = -\int_{t_0}^t F_R(\mathbf{v}(t'), t')v(t') dt'$ (wegunabhängig)
- (iv) Statt Potential kann man "Dissipationsfunktion" angeben (s. Kap. 4)

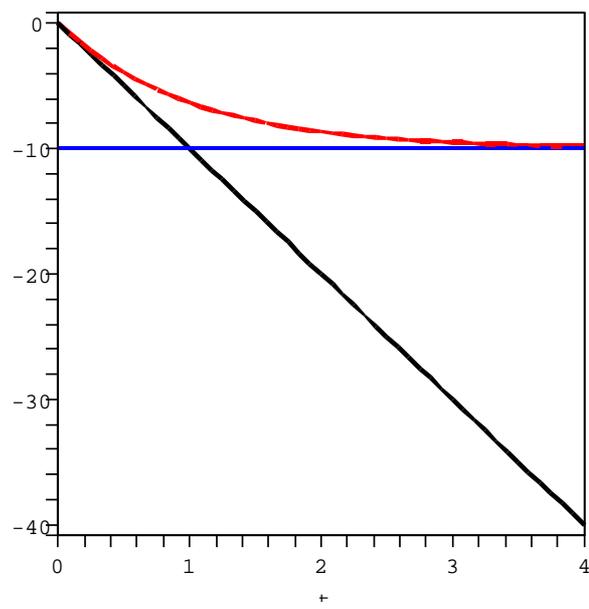
3.1.3 Diagramme

$v_0 = 0$:

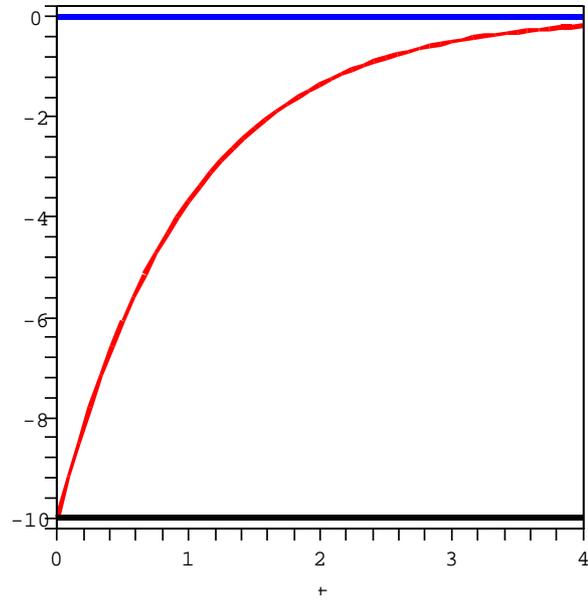
z-t-Diagramm



v-t-Diagramm

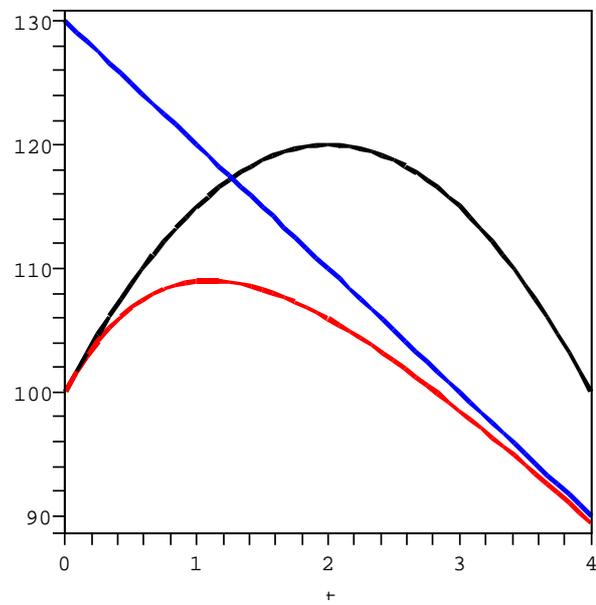


a-t-Diagramm

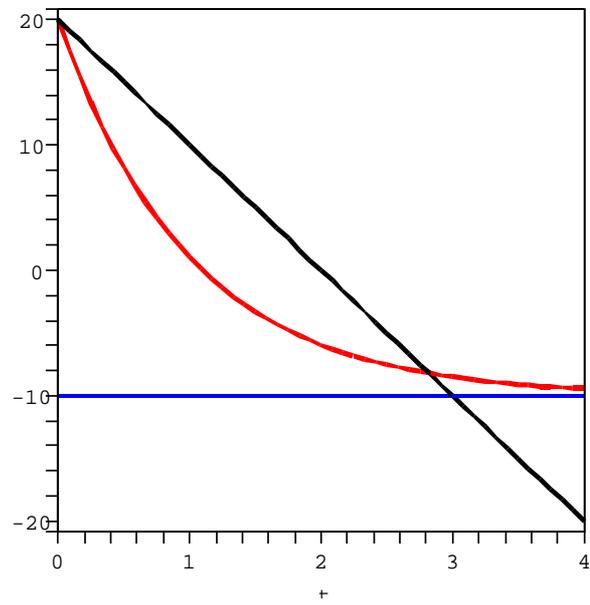


$v_0 = +20$:

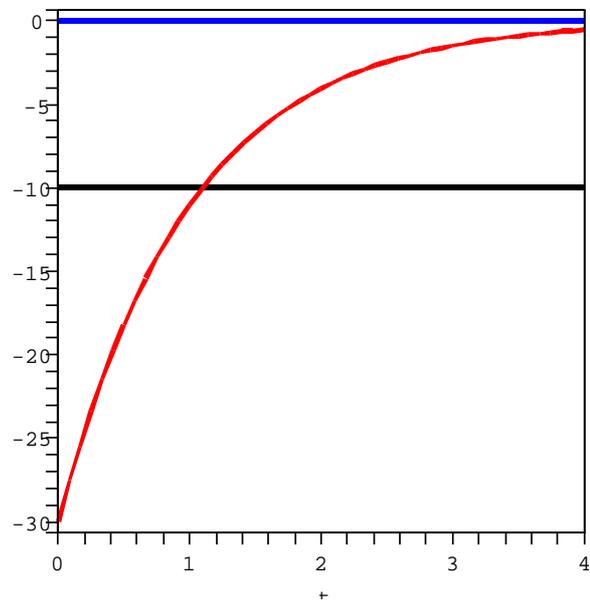
z-t-Diagramm



v-t-Diagramm

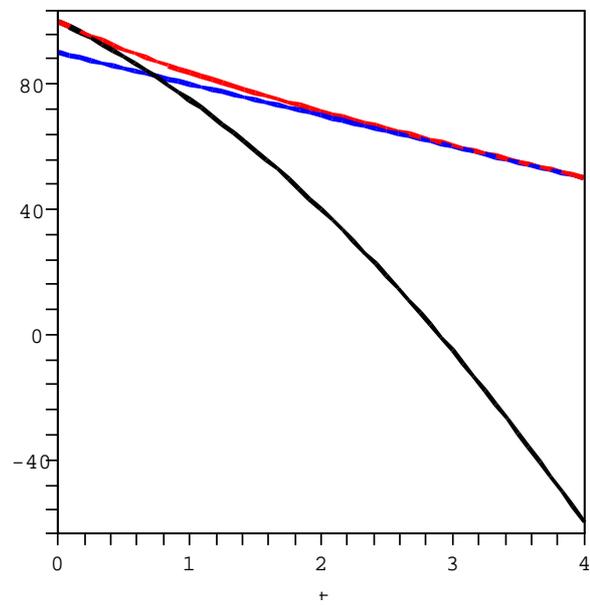


a-t-Diagramm

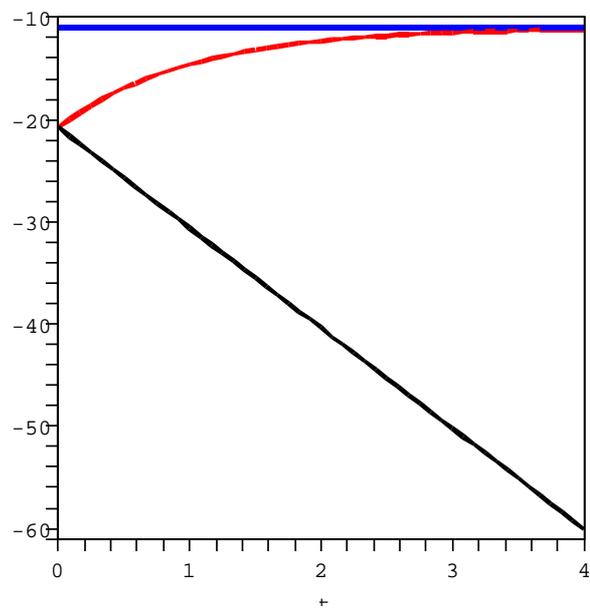


$v_0 = -20$:

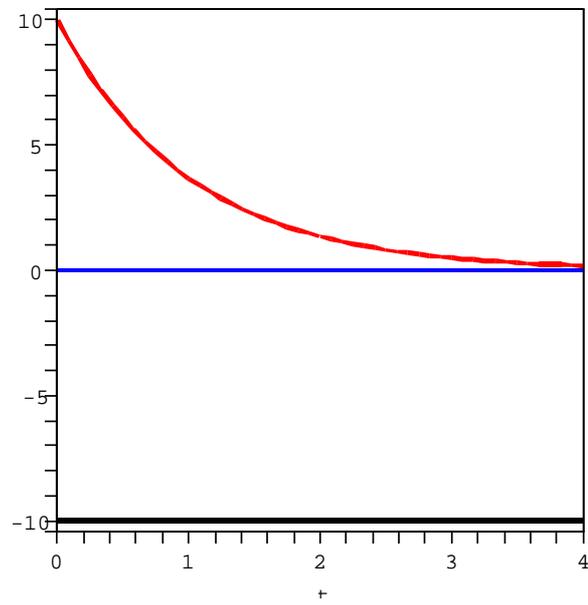
z-t-Diagramm



v-t-Diagramm

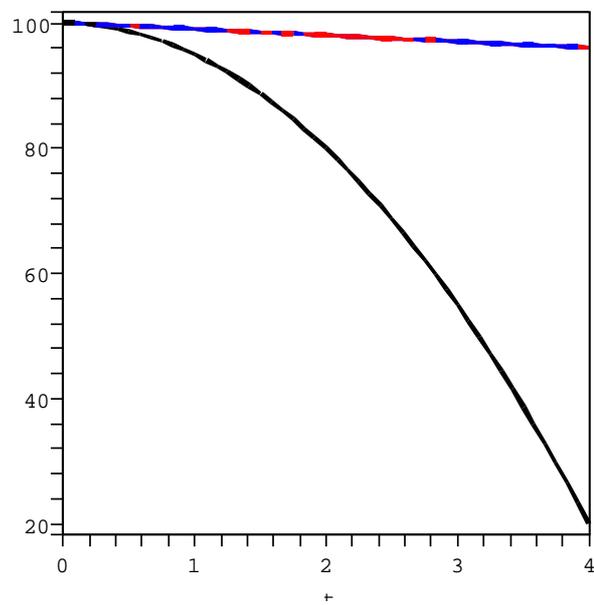


a-t-Diagramm

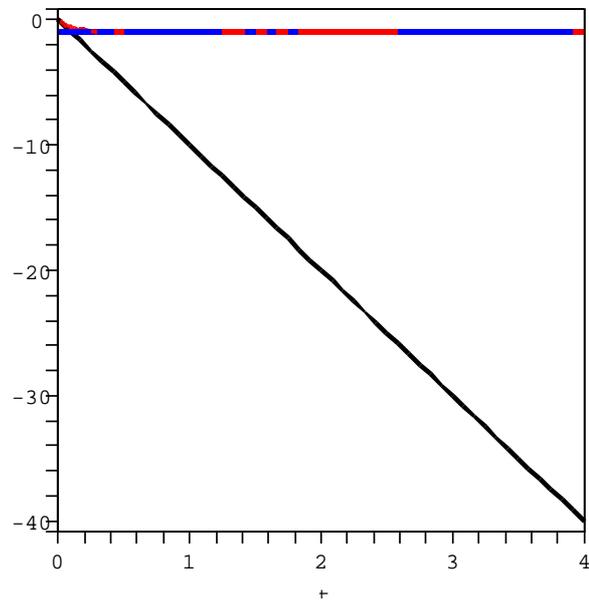


$v_0 = 0$, starke Reibung:

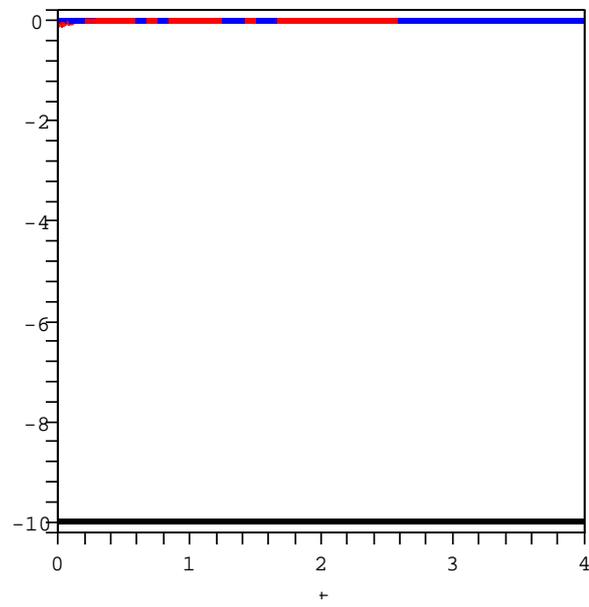
z-t-Diagramm



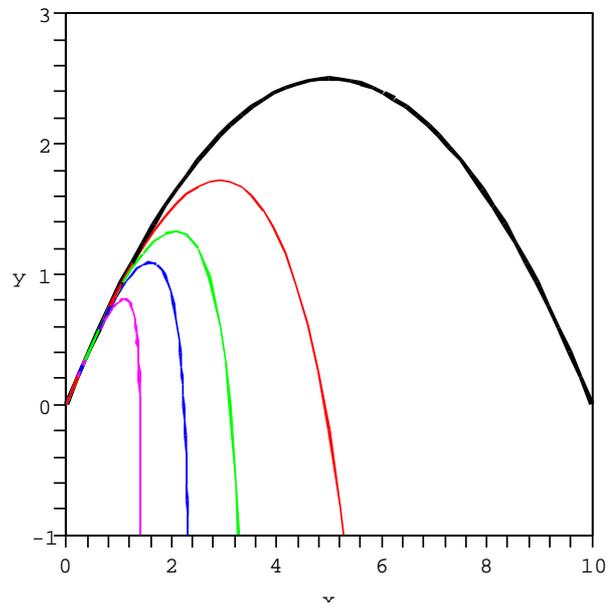
v-t-Diagramm



a-t-Diagramm



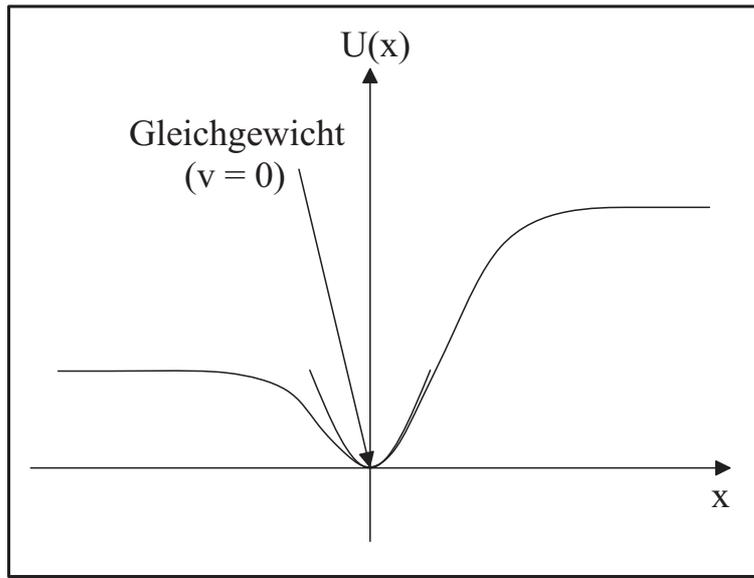
Raumkurven



3.2 Oszillatorprobleme I

3.2.1 Motive für das Studium des harmonischen Oszillators

- (i) Beschreibt Bewegungen in der Umgebung eines stabilen Gleichgewichts



Taylorentwicklung von $U(x)$ um $x = 0$:

$$\begin{aligned}
 U(x) &= \underbrace{U(0)}_0 + \underbrace{\frac{dU}{dx}\bigg|_{x=0}}_0 x + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dx^2}\bigg|_{x=0} x^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3U}{dx^3}\bigg|_{x=0} x^3 + \dots \\
 &= a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \\
 &\longrightarrow F(x) = -\frac{dU}{dx} = -2a_2 x - 3a_3 x + \dots
 \end{aligned}$$

\hookrightarrow 1. Näherung: $U(x) \propto x^2$, $F(x) \propto -x \longrightarrow$ Hooke'sches Gesetz

Einige Realisierungen:

$$\begin{array}{l}
 \text{klassische Oszil.} \left\{ \begin{array}{l} \text{Mechanik : Feder – und Fadenpendel} \\ \text{Elektrodynamik : Schwingkreis} \end{array} \right. \\
 \text{QM Oszil.} \left\{ \begin{array}{l} \text{Molekülphysik : 'Vibrationen' der Kerne gegeneinander} \\ \quad \quad \quad \text{(z.B. 2 – atomiges Molekül)} \\ \text{FK – Physik : Gitterschwingungen} \\ \text{Kernphysik : Vibrationen deformierter Kerne} \end{array} \right.
 \end{array}$$

- (ii) Kann in KM und QM exakt gelöst werden (und ist Grundlage der sog. 'Feldquantisierung' in der 'höheren' QT)

3.2.2 Der gedämpfte harmonische Oszillator (1-dim.)

$$\text{BWGl:} \quad m\ddot{x} = \underbrace{-kx}_{\text{Hooke'sches Gesetz}} + \underbrace{-\beta\dot{x}}_{\text{Reibung nach Stokes}}$$

$$b = \frac{1}{2} \frac{\beta}{m}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{Eigenfrequenz})$$

$$\hookrightarrow \boxed{\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

\hookrightarrow homogene, lineare DGl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} \text{Lösungsansatz:} \quad x(t) &= e^{\lambda t} \\ \longrightarrow (\lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} &= 0 \\ \text{'charakteristische Gleichung':} \quad 0 &= \lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2 \\ \longrightarrow \lambda_{1/2} &= -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2} \end{aligned}$$

Fall 1: $\omega_0^2 > b^2$ Schwache Dämpfung/Schwingfall

$$\text{Def.:} \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} \quad \in \mathfrak{R} \rightarrow \lambda_{1/2} = -b \pm i\omega_1$$

Allg. Lsg.: $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$
(Linearkombination von zwei linear unabhängigen Lösungen)

$$\hookrightarrow x(t) = e^{-bt} \cdot (C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t})$$

Grenzfall $b=0$: $\omega_1 = \omega_0$

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \\ &= C_1 (\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t) + C_2 (\cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t) \\ &= (C_1 + C_2) \cos \omega_0 t + i(C_1 - C_2) \sin \omega_0 t \\ &= A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad A, B \in \mathfrak{R} \iff C_2 = C_1^* \\ &= D \sin(\omega_0 t + \delta) \\ \longrightarrow D &= \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan \varphi = \frac{A}{B} \end{aligned}$$

$b \neq 0$: reelle Form der allg. Lösung

$$x(t) = De^{-bt} \sin(\omega_1 t + \delta)$$

$$\text{ABs : } \left. \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array} \right\} \longrightarrow x(t) = \frac{v_0}{\omega_1} e^{-bt} \sin \omega_1 t \xrightarrow{b \rightarrow 0} \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} > \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0$: Gedämpfte Schwingung ist streng periodisch, wobei Periode größer ist als im ungedämpften Fall

Fall 2: $\omega_0^2 < b^2$ Starke Dämpfung/Kriechfall

$$\Re \ni \lambda_{1/2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2} < 0$$

$$\text{ABs : } \left. \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array} \right\} \longrightarrow x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{b^2 - \omega_0^2}} e^{-bt} \sinh\left(\sqrt{b^2 - \omega_0^2} t\right)$$

(wobei $\sinh y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$)

Fall 3: $\omega_0^2 = b^2$ Aperiodischer Grenzfall

$$\lambda_{1/2} = -b \quad \in \Re$$

Zum Auffinden einer 2. linear unabhängigen Lsg. betrachte DGL für $\omega^2 = b^2$:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + b^2x = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Ansatz : } \quad x(t) &= R(t)e^{-bt} \\ \dot{x} &= (\dot{R} - bR)e^{-bt} \\ \ddot{x} &= (\ddot{R} - 2b\dot{R} + b^2R)e^{-bt} \\ \xrightarrow{\text{einsetzen}} 0 &= (\ddot{R} - 2b\dot{R} + b^2R + 2b\dot{R} - 2b^2R + b^2R)e^{-bt} \\ \ddot{R} = 0 &\longrightarrow R(t) = C_1 + C_2t \\ \hookrightarrow x(t) &= (C_1 + C_2t)e^{-bt} \end{aligned}$$

$$\text{ABs : } \left. \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array} \right\} \longrightarrow x(t) = v_0 t e^{-bt}$$

Energie des gedämpften harmonischen Oszillators:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(T + U) = \mathbf{F}_R \cdot \mathbf{v} = -F_R \cdot \dot{x} = -2mb\dot{x}^2$$

$$\hookrightarrow E(t) = E(0) - 2mb \int_0^t \dot{x}^2 dt'$$

(Näheres siehe Übung 5.1)

3.2.3 Der getriebene harmonische Oszillator - erzwungene Schwingungen

$$\text{BWGl :} \quad \ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

\implies inhomogene DGl 2. Ordnung mit konstantem Koeffizienten

Allg. Lsg. der inhomogenen DGl = allg. Lsg. der homogenen DGl + eine spezielle Lsg. der inhomogenen DGl

$$x(t) = x_{\text{hom}}(C_1, C_2, t) + x_{\text{part}}(t)$$

a) Harmonische Anregung

$$\begin{array}{ll} \text{Wenn} & f(t) = f_0 e^{i\omega t} \quad (f_0 \in \mathfrak{R}) \\ \text{und} & z(t) = x(t) + iy(t) \\ \longrightarrow & \ddot{z} + 2b\dot{z} + \omega_0^2 z = f_0 e^{i\omega t} \\ & \ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t) \end{array}$$

$$\text{Ansatz :} \quad z_{\text{part}}(t) = C e^{i\omega t}$$

$$\longrightarrow \left[C(-\omega^2 + 2ib\omega + \omega_0^2) - f_0 \right] e^{i\omega t} = 0$$

$$\longrightarrow C = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega} \equiv f_0 \chi(\omega)$$

χ : "(dynamische) Suszeptibilität", beschreibt die Antwort des Systems

$$\begin{array}{ll} \chi(\omega) & = |\chi(\omega)| e^{-i\phi} = A(\omega) e^{-i\phi} \\ \hookrightarrow z_{\text{part}}(t) & = A(\omega) e^{-i\phi} f_0 e^{i\omega t} = A(\omega) f_0 e^{i(\omega t - \phi)} \\ x_{\text{part}}(t) & = A(\omega) f_0 \cos(\omega t - \phi) \\ \longrightarrow A(\omega) & = \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2 \omega^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ \tan \phi & = \frac{2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{NR:} \quad \chi &= \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2ib\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2} \\ |\chi|^2 &= \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2\right]^2} = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2} \\ \tan \phi &= \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = -\frac{\text{Im } \chi}{\text{Re } \chi} = \frac{2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

Diskussion:

- (i) Endgültige Lösung $x(t) = x_{norm}(C_1, C_2, t) + x_p(t)$ (zu vorgegebenen ABs) i.a. kompliziert
- (ii) $x(t) \xrightarrow{\text{gro\ss e } t} x_p(t)$ (falls $b \neq 0$) \rightarrow Oszillator folgt der harmonischen Anregung mit Phasenverschiebung ϕ
- (iii) $b = 0$: ungedämpfter Oszillator

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \left[|\omega_0^2 - \omega^2|\right]^{-1}, \quad \phi(\omega) = 0 \\ x(t) &= D \cos(\omega_0 t + \delta) + A(\omega) f_0 \cos \omega t \\ \text{ABs:} \quad x(0) &= \dot{x}(0) = 0 \implies (D = -A(\omega) f_0; \delta = 0) \\ x(t) &= A(\omega) f_0 (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \end{aligned}$$

Spezialfall: $\omega_0 = \omega + \Delta\omega; \quad 0 < \Delta\omega \ll \omega$

Für $\Delta\omega t \ll 1$:

$$\begin{aligned} \cos \omega t - \cos \omega_0 t &= \cos \omega t - \cos(\omega + \Delta\omega)t \\ &= \cos \omega t - \cos \omega t \cos \Delta\omega t + \sin \omega t \sin \Delta\omega t \\ &\approx (\Delta\omega t) \sin \omega t \end{aligned}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{(\omega + \Delta\omega)^2 - \omega^2} = \frac{1}{2\omega\Delta\omega + \Delta\omega^2} \approx \frac{1}{2\omega\Delta\omega}$$

$\rightarrow x(t) \stackrel{\Delta\omega t \ll 1}{\approx} \frac{f_0}{2\omega} t \cdot \sin \omega t$ Amplitude wächst linear an \rightarrow (Resonanz)

Resonanzkatastrophe: $A(\omega) \xrightarrow{\Delta\omega \rightarrow 0} 0$

- (iv) Kurvendiskussion für $A(\omega)$ (für $b \neq 0$)

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \\ A(\omega = 0) &= \frac{1}{\omega_0^2} \end{aligned}$$

$$A(\omega) \xrightarrow{\omega \gg \omega_0} \frac{1}{\sqrt{(\omega^4 + 4b^2\omega^2)}} \rightarrow \frac{1}{\omega^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{aligned} \text{Extrema?} \quad \frac{dA}{d\omega} &= 0 \iff \omega[\omega_0^2 - \omega^2 - 2b^2] = 0 \\ \longrightarrow (\omega_1 = 0); \quad \omega_2 &= \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2} \equiv \omega_R \longrightarrow \text{Maximum} \\ \longrightarrow A(\omega_R) &= \frac{1}{2b\sqrt{\omega_0^2 - b^2}} \end{aligned}$$

(v) Phasenfunktion $\phi(\omega)$

$$\left. \begin{aligned} \phi(\omega) &= \arctan\left(\frac{2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(\omega = \omega_0) &= \frac{\pi}{2} \\ \phi(\omega) &\xrightarrow{\omega \gg \omega_0} \pi \end{aligned} \right\} 0 \leq \phi \leq \pi$$

\longrightarrow Oszillator läuft Anregung hinterher ($x_p \propto \cos(\omega t - \phi)$)

b) Allgemeine periodische Anregung ($F(t + T) = F(t)$)
 Superpositionsprinzip: Seien $x_n(t)$ Partikulärlösungen der DGL

$$\ddot{x}_n + 2b\dot{x}_n + \omega_0^2 x_n = f_n(t) \quad (n = 1, \dots, N)$$

und

$$F(t) = \sum_{n=1}^N f_n(t) \implies x(t) = \sum_{n=1}^N x_n(t)$$

löst die DGL $\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$

Insbesondere, falls:

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n=1}^N f_n(t) = \sum_{n=1}^N f_0^{(n)} \cos(\omega_n t) \\ \implies x_p(t) &= \sum_{n=1}^N A(\omega_n) f_0^{(n)} \cos(\omega_n t - \phi_n) \\ A(\omega_n) &= \left[(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4b^2\omega_n^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ \tan \varphi_n &= \frac{2b\omega_n}{\omega_0^2 - \omega_n^2} \end{aligned}$$

Allgemeinere Aussage: Eine "hinreichend-gutartige" periodische Funktion $F(t+T) = F(t)$ kann als Fourier-Reihe dargestellt werden:

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

$$\Leftrightarrow c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(t) e^{-in\omega t} dt$$

Bemerkungen:

(i)

$$\sum_{n=-N}^{n=N} c_n e^{in\omega t} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} F(t)$$

Welche Art von Konvergenz wird gefordert? \longleftrightarrow Anforderungen an $F(t)$

a) Punktweise Konvergenz

$$\forall t \in \mathfrak{R}; \quad \epsilon > 0; \quad \exists N = N(t, \epsilon) : |f_n(t) - F(t)| < \epsilon; \quad \forall n \geq N$$

b) Gleichmäßige Konvergenz

$$\forall t \in \mathfrak{R}; \quad \epsilon > 0; \quad \exists \underline{N} = \underline{N}(\epsilon) : |f_n(t) - F(t)| < \epsilon; \quad \forall n \geq N$$

ist gegeben, falls $F(t)$ stückweise stetig differenzierbar

c) Konvergenz im quadr. Mittel

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |f_n(t) - F(t)|^2 dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

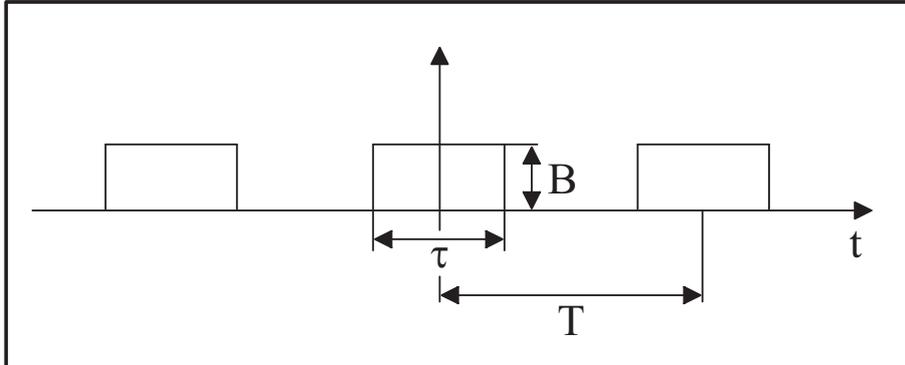
ist gegeben, falls $F(t)$ (Riemann-) integrierbar ist.

Den Fourier-Reihen ist die Konvergenz im quadr. Mittel i.a. besser angepasst. (siehe hierzu [2], Kap. 23)

(ii) Es existieren alternative Entwicklungen nach "vollständigen Funktionssystemen" $F(t) = \sum_n^\infty a_n g_n(t)$, wobei $\{g_n\}$ z.B.:

- * trigonometrische Fkt. (\rightarrow Fourier Reihe)
- * Legendre Polynome
- * Bessel Fkt.

\longrightarrow spezielle Funktionen der (mathematischen) Physik

(iii) Beispiel: Zug von Rechteckpulsen

Fourier-Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} F(t) e^{-in\omega t} dt \\
 &= \frac{B}{T} \frac{i}{n\omega} e^{-in\frac{\pi}{T}t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\
 &= \frac{B}{n\pi} \frac{i}{2} \left(e^{-in\frac{\pi}{T}\tau} - e^{in\frac{\pi}{T}\tau} \right) \\
 &= \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \cdot \frac{B}{n\pi}
 \end{aligned}$$

beachte : $c_0 = \frac{B\tau}{T}$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow F(t) &= \frac{B}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi\tau}{T}}{n} e^{un\omega t} \\
 &= B \left\{ \frac{\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \cos(n\omega t) \right\}
 \end{aligned}$$

→ reelle Lösung der Oszillatorgleichung:

$$\begin{aligned}
 x_p(t) &= \frac{B\tau}{T\omega_0^2} + B \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \cos(n\omega t - \varphi_n) \\
 A_n &= \left[\left(\omega_0^2 - (n\omega)^2 \right)^2 + 4b^2(n\omega)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\
 \tan \varphi &= \frac{2nb\omega}{\omega_0^2 - n^2\omega^2}
 \end{aligned}$$

- c) Nicht-periodische Anregung: Fourier-Integral
 ◁ Heuristische Argumente zur Konstruktion:

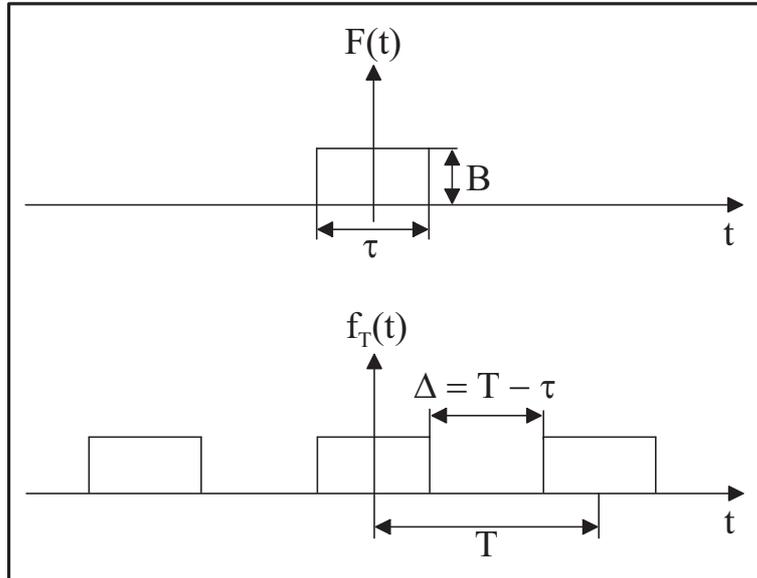


Abbildung 3.4: Einzelner Rechteckpuls

$$\implies F(t) = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} f_T(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) \Big|_{\tau = \text{konst.}}$$

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-in\omega t} dt$$

Umschreibung:

$$\begin{aligned} \omega_n &:= n\omega \\ \Delta\omega_n &:= \omega_n - \omega_{n-1} = \omega = \frac{2\pi}{T} \iff T = \frac{2\pi}{\Delta\omega_n} \\ \tilde{c}_n &:= Tc_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \quad f_T(t) &= \frac{1}{T} \sum_n \tilde{c}_n e^{i\omega_n t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n e^{i\omega_n t} \Delta\omega_n \\ T \rightarrow \infty; \Delta\omega_n \rightarrow 0 &\quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ \tilde{c}_n &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-i\omega_n t} dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \equiv \tilde{F}(\omega) \end{aligned}$$

\implies **Fourier-Transformations-Paar** $F(t) \longleftrightarrow \tilde{F}(\omega)$

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ \tilde{F}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

Hinreichende (Dirichlet) Bedingungen für die Existenz der Fourier-Transformation (FT) von der Funktion $F(t)$

- (i) $F(t)$ stückweise stetig und differenzierbar
- (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)| dt < \infty$

Bemerkungen:

- (i) Bedingungen sind nicht notwendig
- (ii) alternative Formulierung

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega & \left(\tilde{F}(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{\sqrt{2\pi}} \right) \\ \tilde{F}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

- (iii) Erweiterung auf höhere Dimensionen

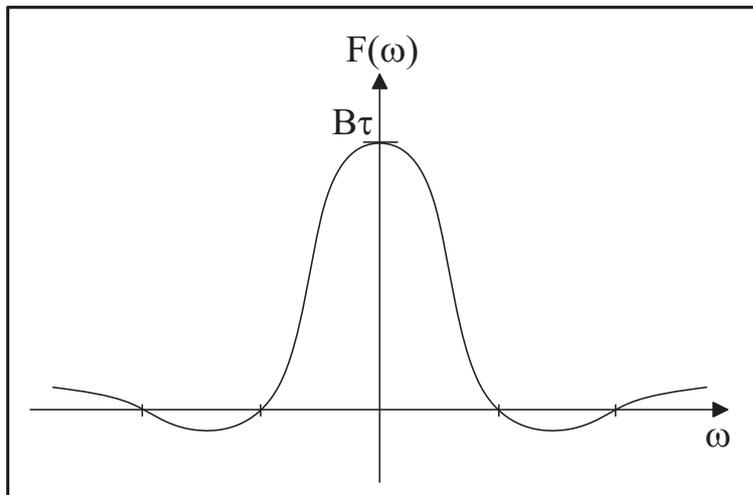
$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{F}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k \\ \tilde{F}(\mathbf{k}) &= \int F(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3r \end{aligned}$$

Beispiele:

(i) Rechteckimpuls (siehe Skizze 3.4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)| dt = B \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} dt = B\tau < \infty \quad (\text{Dirichlet - Bedingung erfüllt})$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt = B \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i\omega t} dt \\ &= -\frac{B}{\omega} \left(e^{-i\omega \frac{\tau}{2}} - e^{i\omega \frac{\tau}{2}} \right) \\ &= B\tau \left(\frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \right) \end{aligned}$$



(ii) $F(t) = \delta(t)$

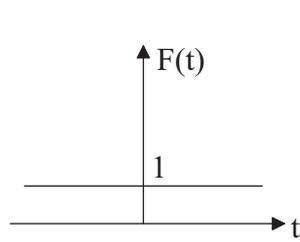
$$\begin{aligned} \longrightarrow F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= e^{-i\omega 0} = 1 \end{aligned}$$

FT - Paar	$\delta(t) \longleftrightarrow 1$
-----------	-----------------------------------

Umkehrung: Nützliche Integraldarstellung der δ -Funktion

$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt$

(iii)



$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)| dt \longrightarrow \infty$$

Dirichlet-Bedingung verletzt, aber FT existiert:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt \\ &\stackrel{x=-t}{=} - \int_{\infty}^{-\infty} e^{-i\omega x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dx = 2\pi\delta(\omega) \\ &= 2\pi\delta(-\omega) \implies \delta(\omega) = \delta(-\omega) \end{aligned}$$

FT – Paar $1 \iff 2\pi\delta(\omega)$

(iv) $F(t) = e^{i\omega_0 t}$

$$\int_{-A}^A |F(t)| dt = \int_{-A}^A dt \xrightarrow{A \rightarrow \infty} \infty$$

Dirichlet-Bedingung verletzt, aber FT existiert:

$$\implies F(\omega) = \int e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

(v) Beliebige periodische Funktion

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \\ \implies F(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{in(\omega_0 - \omega)t} dt \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned}$$

Anwendung auf komplexe Oszillorgleichung

$$\ddot{z} + 2b\dot{z} + \omega_0^2 z = F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Ansatz:

$$z_P(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\begin{aligned} \implies & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2b \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ \iff & \int_{-\infty}^{\infty} \left[(-\omega^2 + 2ib\omega + \omega_0^2) Z(\omega) - F(\omega) \right] e^{i\omega t} d\omega = 0 \\ \iff & \left[(-\omega^2 + 2ib\omega + \omega_0^2) Z(\omega) - F(\omega) \right] = 0 \\ \iff & Z(\omega) = \frac{F(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega} = F(\omega) \chi(\omega) \end{aligned}$$

(wobei $\chi(\omega)$ die auf in 3.2.3 eingeführte dynamische Suszeptibilität ist)

$$z_p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega} e^{i\omega t} d\omega$$

reelle Lösung (falls $F(\omega) \in \Re$) $\implies x_p(t) = \operatorname{Re} z_p(t)$

Zusammenfassung (FT-Methode):

Rezept:

- (i) Berechne zu geg. Inhomogenität $F(t)$ die Fourier-Trafo. $F(\omega)$
- (ii) Berechne $z_p(t)$ als Fourierintegral (inverse Fourier-Trafo zu $F(\omega)\chi(\omega)$)

Voraussetzungen der Methode:

- (i) $F(t)$ ist als Fourierintegral darstellbar
 - (ii) Partikulärlösung bekannt für harmonische Anregung $\chi(\omega)$
 - (iii) Superpositionsprinzip (lineare DGL)
- d) Allgemeine Anregung: Methode der Green'schen Funktion
(Erarbeitet von Jan Metje)

zur Diskussion steht:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$$

Aus der Vorlesung ist die partikuläre Lösung für eine harmonische Anregung bekannt. Betrachte jetzt: beliebiges $F(t)$

Es gilt:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t') F(t') dt'$$

(Zur δ -Funktion siehe Kap. 7.1)

$$\triangleleft \quad \ddot{G}(t) + 2b\dot{G}(t) + \omega_0^2 G(t) = \frac{1}{m}\delta(t)$$

$G(t)$ ist definiert als eine Lösung dieser DGL. Genaueres Aussehen wird später untersucht.

Ansatz :
$$x_{part}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')F(t') dt'$$

Zur Überprüfung jeweils ein und zweimal ableiten:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(t-t')F(t') dt' \\ \ddot{x}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{G}(t-t')F(t') dt'\end{aligned}$$

Einsetzen in DGL liefert:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\ddot{G}(t-t') + 2b\dot{G}(t-t') + \omega_0^2 G(t-t') \right) F(t') dt' \\ &= \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t') F(t') dt' \\ &= \frac{1}{m} F(t)\end{aligned}$$

Korrektur Ansatz, da DGL erfüllt ist. Weiterhin gibt es zunächst keine Aussage über die Gestalt von G . Zusammenhang erlaubt partikuläre Lösung für beliebiges F bei Kenntnis von $G(t)$

Vgl. direkte Methode:

Für jedes $F(t)$ muss part. Lsg. $x_{part}(t)$ gesondert bestimmt werden $\implies G(t) = \text{Green'sche Funktion}$

Gestalt von G :

betrachte folgenden Fall: Einheitskraftstoß
 Resultat: $t < 0$ Oszillator in Ruhe
 $t = 0$ Kraftwirkung
 $t > 0$ harmonisch gedämpfter Oszillator

Alle anderen Fälle (z.B. Einheitsstoß am Schwingenden Oszillator) sind durch Superposition zu erhalten

Was gilt demzufolge für $G(t)$

$$t < 0 \quad G(t) := G^-(t) \equiv 0$$

$G(t)$ ist Lösung der Schwingungsgleichung, $t < 0$ keine Schwingung

$$t > 0 \quad G(t) := G^+(t)$$

für diesen Zeitraum ist $G(t)$ Lösung der harmonischen DGL. $G^+(t)$ ist nicht mehr frei wählbar, da $G^+(t)$ die ABs erfüllen muss, die der Kraftstoß hervorgerufen hat

Vgl. Kausalitätsprinzip: keine Wirkung früher als Ursache

Integration der DGL für $G(t)$ über $[-\tau, \tau]$, Grenzwert für $\tau \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \dot{G}(\tau) - \dot{G}(-\tau) + 2b(G(\tau) - G(-\tau)) \right\} + \omega_0^2 \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau}^{\tau} G(t) dt &= \frac{1}{m} \\ \dot{G}^+(0) + 2bG^+(0) + \omega_0^2 \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\tau} G^+(t) dt &= \frac{1}{m} \end{aligned}$$

$G(t)$ soll stetig sein (Teilchenbahnen sind immer stetig)

$$\implies G^+(0) = 0$$

$$\implies \text{Integral verschwindet}$$

Es bleibt:

$$\dot{G}^+(0) = \frac{1}{m}$$

Damit haben wir zwei ABs für homogene DGLs erhalten:
allgemeine Lsg.:

$$\implies G(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} & t > 0 \end{cases}$$

einsetzen der ABs:

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2 \implies -C_1 = C_2 \\ \frac{1}{m} &= C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 \\ &= C_1 (\lambda_1 - \lambda_2) \\ \implies C_1 &= \frac{1}{m(\lambda_1 - \lambda_2)}; \quad C_2 = -\frac{1}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \end{aligned}$$

$$\implies G(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{1}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) & t \geq 0 \end{cases}$$

stetig in $t = 0$ + differenzierbar (Ableitung nicht stetig)

Bestimmung der partikulären Lösung $x_{part}(t)$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t') F(t') dt' = \int_{-\infty}^t G^+(t-t') F(t') dt'$$

Substitution $t'' = t - t'$

$$x(t) = \int_0^\infty G^+(t'')F(t-t'') dt''$$

Anwendung für harmonisches $F(t)$:

Ansatz: $F(t) = f \cos(\omega t) = \frac{f}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$

Einsetzen in $x(t)$ liefert:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{f}{2m(\lambda_1 - \lambda_2)} \int_0^\infty (e^{\lambda_1 t'} - e^{\lambda_2 t'}) (e^{i\omega(t-t')} - e^{-i\omega(t-t')}) dt' \\ &= \frac{f}{2m(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[e^{i\omega t} \int_0^\infty (e^{(\lambda_1 - i\omega)t'} - e^{(\lambda_2 - i\omega)t'}) dt' \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\omega t} \int_0^\infty (e^{(\lambda_1 + i\omega)t'} - e^{(\lambda_2 + i\omega)t'}) dt' \right] \\ &= \frac{f}{2m(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[e^{i\omega t} \left(\frac{1}{\lambda_1 - i\omega} \left(\lim_{a \rightarrow \infty} e^{(\lambda_1 - i\omega)a} - 1 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\lambda_2 - i\omega} \left(\lim_{a \rightarrow \infty} e^{(\lambda_2 - i\omega)a} - 1 \right) \right) + e^{-i\omega t} \left(\frac{1}{\lambda_1 + i\omega} \left(\lim_{a \rightarrow \infty} e^{(\lambda_1 + i\omega)a} - 1 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\lambda_2 + i\omega} \left(\lim_{a \rightarrow \infty} e^{(\lambda_2 + i\omega)a} - 1 \right) \right) \right] \end{aligned}$$

da λ_1 und λ_2 negativ sind existiert der Grenzwert

$$x(t) = \frac{f}{2m(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[e^{i\omega t} \left(\frac{1}{\lambda_2 - i\omega} - \frac{1}{\lambda_1 - i\omega} \right) + e^{-i\omega t} \left(\frac{1}{\lambda_2 + i\omega} - \frac{1}{\lambda_1 + i\omega} \right) \right]$$

Weiterverarbeitung liefert dasselbe Resultat wie die direkte Lösung aus Kap. 3.2.3 a)

Zusammenfassung:

Voraussetzung der Methode:

- (i) $F(t)$ ist als 'Faltungsintegral' darstellbar:

$$F(t) = \int_{-\infty}^\infty F(t')\delta(t-t') dt'$$

- (ii) Partikulärlösung der DGL bekannt für δ -Anregung
(= Green'sche Fkt. $G(t)$)

(iii)

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')F(t') dt'$$

Rezept: (für beliebig lineare DGL)

- (i) Bestimme $G(t)$ (siehe Voraus. (ii))
- (ii) berechne $x_p(t)$ (gemäß (iii))

e) Kombination der Fourier- und Green's-Funktions-Methoden

$$\triangleleft \quad \ddot{G} + 2b\dot{G} + \omega_0^2 G = \frac{1}{m}\delta(t)$$

$$\underline{\text{Ansatz}}: \quad G(t) = \frac{1}{2\pi} \int G(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\text{benutze:} \quad \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega t} d\omega$$

$$\hookrightarrow \quad \int \left[G(\omega) \left\{ \frac{d^2}{dt^2} + 2b \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right\} e^{i\omega t} - \frac{1}{m} e^{i\omega t} \right] d\omega = 0$$

$$\iff \quad \int \left[\left(-\omega^2 + 2ib\omega + \omega_0^2 \right) G(\omega) - \frac{1}{m} \right] e^{i\omega t} d\omega = 0$$

$$\iff \quad mG(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega} \equiv \chi(\omega)$$

FT der Green'schen Funktion $\hat{=}$ dyn. SuszeptibilitätRezept:

- (i) Berechne $G(t) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega} d\omega$
(Mathematische Hilfsmittel: Residuensatz der Funktionstheorie)
- (ii) $x_p(t)$ (wie zuvor)

Diese Technik ist verallgemeinerbar auf andere DGLs und ein beliebtes Verfahren in der Elektrodynamik + Quantenmechanik.

Kapitel 4

Hamilton'sches Prinzip und Lagrange'sche Mechanik

Gründe für diese Formulierung der KM

Praxis: vorteilhaft für Bewegungsprobleme mit (geometrischen) Einschränkungen (Zwangsbedingungen)

Theorie: Einführung eines übergeordneten "Wirkungsprinzips"

4.1 Das Hamilton'sches Prinzip der stationären Wirkung (1823)

Die Bewegung eines (konservativen) mechanischen Systems von einer geg. Anfangs- zu einer geg. Endkonfiguration zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 verläuft so, dass das Integral

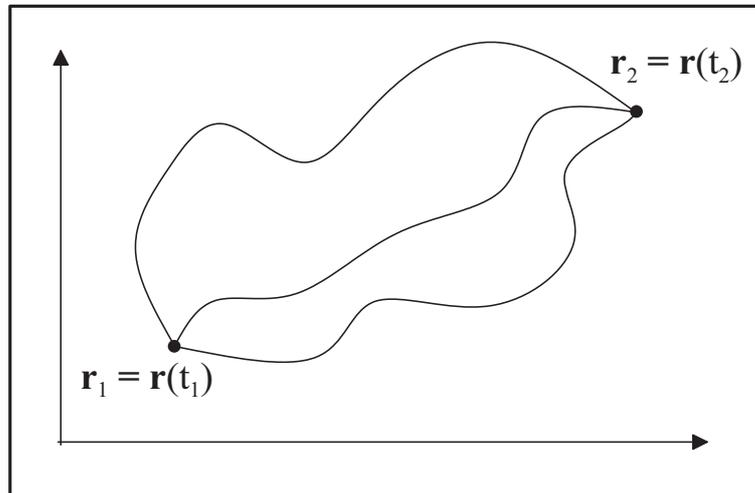
$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U - V) dt$$

'stationär' ist. ($\delta S = 0$)

Bemerkungen:

- (i) $L = T - U - V$ "Lagrange Funktion" (Dimension einer Energie)
- (ii) S : 'Wirkung' (Energie \times Zeit) (engl. 'action')
- (iii) Stationarität der Wirkung \triangleq in 1. Näherung ändert sich der Wert von S nicht bei 'kleinen' Variationen der durchlaufenen Bahn
(Analogie: $f'(x_0) = 0 \triangleq$ in 1. Näherung ändert sich der Wert von $f(x)$ nicht in der Umgebung von x_0)

$\delta S = 0$ ist notwendige Bedingung für Extremum von S . I.d.R. folgt aus $\delta S = 0$ ein Minimum ("Prinzip der kleinsten Wirkung"), d.h. bzgl. der tatsächliche durchlaufenen Bahn ist S (i.d.R.) minimal



- (iv) HP ist ein "ökonomisches" Prinzip
Historische + Philosophische Andeutungen: [7], [9] § 33 + 37
- (v) HP ist Integralprinzip
- (vi) HP ist fundamentales Ordnungsprinzip der modernen Physik
- (vii) Zu gegebener Lagrange-Funktion sowie Anfangs- und Endkonfiguration kann die tatsächliche Bewegung eines mechanischen Systems aus dem HP bestimmt werden

4.1.1 Grundzüge der Variationsrechnung

Gegeben: $f(x, \dot{x}, t)$ (2 mal stetig partiell differenzierbar)

Gesucht: 2 mal stetig diff.bare 'Kurve' $x(t)$ mit $x(t_1) = x_1$ und $x(t_2) = x_2$:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f(x, \dot{x}, t) dt \quad \text{extremal}$$

↔ Notwendige Bedingung: das Bestehen der "Euler-Lagrange"-Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0$$

Beweis: Sei $x(t)$ die gesuchte Kurve

Variationsansatz: $x_v(t) = x(t) + \varepsilon\varphi(t)$ mit $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$

$$\hookrightarrow \dot{x}_v(t) = \dot{x}(t) + \varepsilon\dot{\varphi}(t)$$

$$\triangleleft I(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} f(x_v, \dot{x}_v, t) dt$$

$I(\varepsilon)$ sei extremal für $\varepsilon = 0 \iff \left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$

$$\hookrightarrow \frac{dI}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} f(x_v, \dot{x}_v, t) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(x_v, \dot{x}_v, t) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_v} \frac{\partial x_v}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_v} \frac{\partial \dot{x}_v}{\partial \varepsilon} \right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_v} \varphi(t) + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_v} \dot{\varphi}(t) \right) dt$$

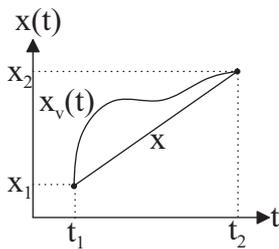
part. Int. $= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial x_v} \varphi(t) dt + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_v} \varphi(t) \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_v} \right) \varphi(t) dt$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_v} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_v} \right) \varphi(t) dt \quad (\text{da } \varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0)$$

$$\hookrightarrow \left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \varphi(t) dt$$

$$\implies \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0$$

Elementares Beispiel:



kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten

$$\text{Bogenlänge } S = \int \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt$$

$$\hookrightarrow f(x, \dot{x}, t) = \sqrt{1 + \dot{x}^2} = f(\dot{x})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} \xrightarrow{E-L-Gl.} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} \right) = 0$$

$$\implies \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = \text{konst.} = C_1$$

$$\hookrightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{C_1^2}{1 - C_1^2}} = C_2 \implies x(t) = C_2 t + C_3 \quad (\text{Geradengleichung})$$

Bemerkungen zur Variationsrechnung:

- (i) $I = \int f(x, \dot{x}, t) dt = I[x]$ "Funktional" (Funktion \mapsto Zahl)
- (ii) Funktionalableitung $\frac{\delta I}{\delta x}$ definierbar
- (iii) Man findet dann $\frac{\delta I}{\delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}$ für $I = \int f dt$
 Alternativ: definiere 'totale Variation' von I

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta \int f(x, \dot{x}, t) \\ \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \delta x dt \\ \hookrightarrow \delta I &= 0 \iff \text{E-L-Gl.} \end{aligned}$$

(erklärt symbolische Notation des Hamilton'schen Prinzips $\delta S = 0$)

4.1.2 HP für den einfachsten Fall

\triangleleft 1 MP in eindimensionalen Welt

$$L = T - U = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - U(x) = L(x, \dot{x}); \quad F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

$$\text{HP :} \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}) dt = 0$$

$$\iff \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0} \quad \text{Lagrange-Gl. 2. Art}$$

Auswertung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x}; & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\ddot{x}; \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{dU}{dx} = F(x) \end{aligned}$$

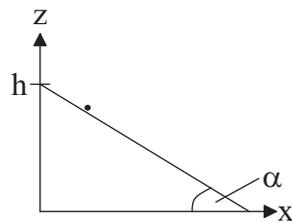
$$\hookrightarrow m\ddot{x} = F(x) \iff \text{Lg II} \iff \text{HP}$$

4.2 Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten

4.2.1 Vorbereitungen für eine MP

a) Beispiele für Zwangsbedingungen (ZBs)

(i) (Reibungsfreie) Bewegung auf der schiefen Ebene

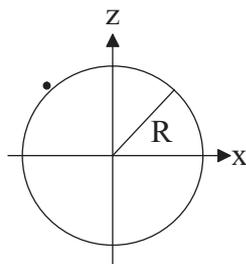


$$\text{ZB: } z = (-\tan \alpha)x + h$$

(y ist beliebig)

→ System hat zwei Freiheitsgrade (FGs)

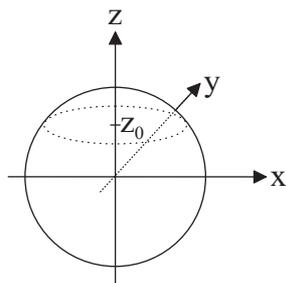
(ii) Bewegung auf Kugeloberfläche



$$\text{ZB: } x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

→ zwei FGs

(iii) Bewegung auf Kreisrand mit Radius $r^2 = R^2 - z_0^2$



$$\text{ZBs: } x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

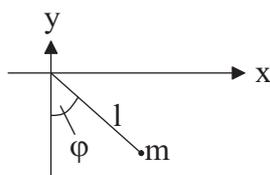
$$z = z_0 < R$$

→ ein FG

Spezialfall: $z_0 = R$

kein FG (keine Bewegung)

(iv) Ebenes math. Pendel



$$\text{ZBs: } z = 0$$

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{konst.}$$

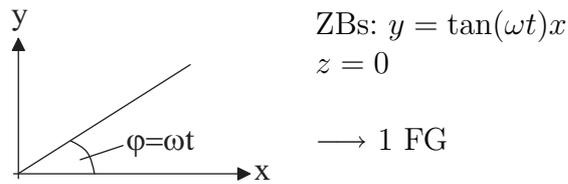
entspricht Beispiel (iii)

KAPITEL 4. HAMILTON'SCHES PRINZIP UND LAGRANGE'SCHE MECHANIK 62

ZBs in Bsp. (i) - (iv) werden charakterisiert durch Gleichung der Form $f(x, y, z) = 0$

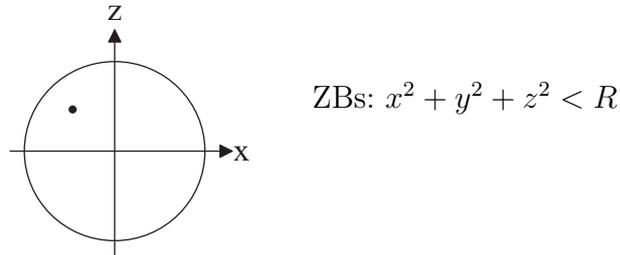
→ "holonom - skleronome" ZBs
 ↓ ↓
 (ganz, vollständig) (starr)

(v) Perle auf rotierendem Draht

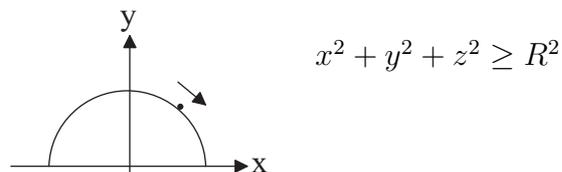


Variante: Perle auf Wippe ZBs: charakterisiert durch Gleichung der Form $f(x, y, z, t) = 0$ (holonom - rheonom (=fließend))

(vi) In Kugel eingesperrter MP



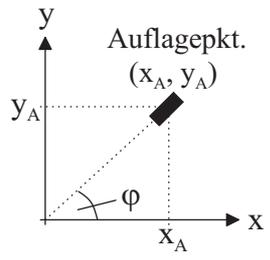
Variante:



→ nicht-holonome ZBs (charakterisiert durch Ungleichungen)

→ reduzieren Zahl der FGs nicht

(vii) In der Ebene rollendes Rad



$$\begin{aligned} \text{ZB: } \frac{dy}{dx} &= \tan \varphi(x_A, y_A) \\ \iff dy &= \tan \varphi(x_A, y_A) dx \\ \iff v_y &= \tan \varphi(x_A, y_A) v_x \end{aligned}$$

→ differentielle ZB (nicht-holonom)
→ Zahl der FGs wird nicht reduziert

b) Generalisierte Koordinaten und Lagrange Ungleichungen

– Einfachste Situation:

hol. ZB $f(x, y, z) = 0$ lasse sich auflösen in $z = g(x, y)$

Siehe Bsp. (i): Schiefe Ebene im homogenen Schwerfeld

ZB: $z = h - x \tan \alpha$, $y = 0$ (ignorabel)

Lagrange Fkt.: $L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$

ZB einsetzen: $= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}^2 \tan^2 \alpha) - mg(h - x \tan \alpha)$

HP $\iff \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

Auswertung:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}(1 - \tan^2 \alpha), \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m\ddot{x}}{\cos^2 \alpha}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = mg \tan \alpha$$

$$\xrightarrow{\text{BWGl}} m\ddot{x} - mg \tan \alpha \cos^2 \alpha = 0$$

$$\iff \boxed{\ddot{x} = g \sin \alpha \cos \alpha}$$

Lsg.: $x(t) = \frac{g}{2}(\sin \alpha \cos \alpha)t^2 + C_1 t - C_2$

$$z(t) = h - \frac{g}{2}(\sin^2 \alpha)t^2 - (C_1 t + C_2) \tan \alpha \quad (\text{bestimmt aus ZB})$$

(Äquivalenz zu Newton bleibt zu zeigen)

Siehe Bsp. (iv): Ebenes math. Pendel im homogenen Schwerfeld

ZB: $z = 0$ (ignorabel)

$$x = \pm \sqrt{l^2 - y^2}$$

$$U = mgy$$

$$\begin{aligned}
 L = T - U &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \\
 &= \frac{m}{2} \left(\frac{y^2 \dot{y}^2 + \dot{y}^2(l^2 - y^2)}{l^2 - y^2} \right) - mgy \\
 &= \frac{m}{2} \left(\frac{\dot{y}^2 l^2}{l^2 - y^2} \right) - mgy \\
 &\longrightarrow \text{komplizierte Lagrange - Gleichung}
 \end{aligned}$$

Wie geht es leichter? Polarkoordinaten!

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x^2 + y^2} = l = \text{konst.} \quad (\text{ignorabel}) \\
 \tan \varphi &= -\frac{x}{y} \\
 \{\iff\} \quad x &= r \cdot \sin \varphi & y &= -r \cdot \cos \varphi \\
 &= l \cdot \sin \varphi & &= -l \cdot \cos \varphi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U &= mgy = -mgl \cos \varphi \\
 \dot{x} &= l\dot{\varphi} \cos \varphi & \dot{y} &= l\dot{\varphi} \sin \varphi \\
 \hookrightarrow L &= \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi = L(\varphi)
 \end{aligned}$$

Auswertung:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi$$

$$\stackrel{\text{Lg. Gl.}}{\implies} \quad ml^2 + mgl \sin \varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

– kleine Ausschläge: $\sin \varphi \approx \varphi$

$$\implies \ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 \implies \varphi(t) = a \sin(\omega t - \beta)$$

– größere Ausschläge:

Näherungsverfahren: siehe [5], Kap. 2.4.3

(für $\sin \varphi \approx \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3$)

Vollständige Diskussion siehe [3], § 24

(ellipt. Integrale) [8], Kap. 4.2.1

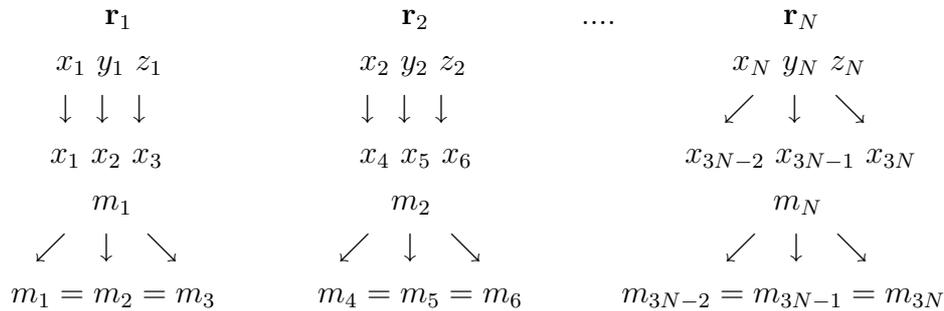
Bemerkungen:

– Es existiert kein universelles Rezept für das Auffinden geeigneter (generalisierter) Koordinaten

- 'Natürliche' Methode (falls möglich): Transformation auf (krummlinige) Koordinaten, die der Geometrie des Systems (der ZBs) besonders gut angepasst sind
- Gegebenenfalls führt das auf eine BWGl bzgl. nicht-inertialer Bezugssysteme

4.2.2 N-Teilchen Systeme

Zweckmäßige Nomenklatur:



liefert z.B. :
$$\left(T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 \right)$$

k unabhängige holonome ZBs reduzieren die Zahl der FGs von $3N$ auf $3N - k$

a) Klassifikation von Zwangsbedingungen

(i) k holonom-skleronome ZBs

$$f_j(x_1, \dots, x_{3N}) = 0 ; \quad j = 1, \dots, k$$

(ii) l holonom-rheonome ZBs

$$f_j(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0 ; \quad j = 1, \dots, l$$

(iii) m differentielle ZBs

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dx_j + a_{it} dt = 0 ; \quad i = 1, \dots, m$$

(Bsp.: rollendes Rad: $\tan \varphi(x_A, y_A) dx - dy = 0$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \quad a_{11} &= \tan \varphi(x_0, y_0) \\ a_{12} &= -1 \\ a_{1t} &= 0 \end{aligned})$$

$$a_{it} \begin{cases} = 0 & \text{nicht holonom – skleronom} \\ \neq 0 & \text{nicht holonom – rheonom} \end{cases}$$

Kapitel 5

Anwendungen II

Kapitel 6

Hamilton'sche Mechanik

Kapitel 7

Mathematischer Anhang

7.1 Einführung der δ -Funktion

(Distribution: Beschreibung singulärer phys. Objekte in der Mathematik)

Definition:

(i)

$$\delta(x - a) = 0 \quad x \neq a$$

(ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Daraus folgt:

$$\delta(x - a) \longrightarrow \infty \quad x = a$$

Faltungssatz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a)$$

insb. :
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

Diese Eigenschaften bleiben ohne Beweis. Es genügt in diesem Fall, sich die δ -Funktion als einen 'Automaten' vorzustellen, der den Funktionswert an der Stelle Null (bzw. a) ausgibt, wenn man die Funktion eingibt.

Kapitel 8

Symbolverzeichnis

1 Abkürzungen

1.1 Lateinisch

a	Beschleunigung
A	Fläche, Arbeit
C	Integrationskonstante
e, exp	Exponentialfunktion, Eulerzahl
E	Energie
f	innere Kräfte
F	Kraft
g	Gravitationsbeschleunigung in der Nähe der Erdoberfläche
h	Höhe
l	Drehimpuls eines MP
L	Drehimpuls eines Teilchensystems
m, M	Masse
P	Leistung
r, R	Radius, Weg
\Re	Reelle Zahlen
s, S	Abstand
t	Zeit
T	kinetische Energie
U	potentielle Energie
v	Geschwindigkeit
V	Potential (aufgrund innerer Kräfte)
x, y	Abstand, Entfernung

1.2 Griechisch

Δ	Differenz, Laplace Operator
γ	Gravitationskonste
∇	Nabla Operator
ω	Winkelgeschwindigkeit

2 Indizes

0	Ursprung, Beginn
1, 2	Ort, Zeitpunkt
i, k	Laufvariablen
diss	dissipativ
ext	extern
E	Erde
hom	homogen
kin	kinetisch
p, part	rartikulär
SP	Schwerpunkt

Kapitel 9

Wichtige Fundamental Konstanten

$$\begin{array}{lcl} \gamma & \approx & 6,6726 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \\ g & \approx & 9,81 \frac{m}{s^2} \\ M_E & \approx & 5,97 \cdot 10^{24} kg \\ R_E & \approx & 6,378 \cdot 10^6 m \end{array}$$

Literaturverzeichnis

- [1] BLÖCHL, P.: *Theoretische Physik I: Klassische Mechanik*. Internetadresse: <http://www.pt.tu-clausthal.de/atp/education.shtml>.
- [2] FORSTER, O.: *Analysis I*.
- [3] GREINER, W.: *Theoretische Physik 1+2*. H. Deutsch, Frankfurt.
- [4] JELITTO, R.: *Theoretische Physik 1+2*. Aula, Wiesbaden.
- [5] KUYPERS, F.: *Klassische Mechanik*. Wiley-VCH.
- [6] LÜCKE, W.: *Mathematische Methoden der Physik*. Internetadresse: <http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/etp.html>.
- [7] LINHARD, F.: *Klassische Mechanik*. Fischer, Frankfurt, 2002.
- [8] R. M. DREIZLER und C. S. LÜDDE: *Theoretische Physik 1*. Springer.
- [9] SOMMERFELD, A.: *Vorlesungen über Theoretische Physik 1: Mechanik*.