

# **Klassische Mechanik**

Gelesen von  
Prof. Dr. phil. nat. Tom Kirchner

Skript zur Vorlesung

Achtung!  
Diese Version befindet sich noch in Bearbeitung  
und kann Fehler enthalten!

17. Januar 2006

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Inhaltsübersicht . . . . .	1
1.2	Bemerkungen zum Wesen der Theoretischen Physik . . . . .	2
1.3	Vorbemerkung zur Klassischen Mechanik . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Newton'sche Mechanik</b>	<b>5</b>
2.1	Die Newton'schen Axiome (1687) . . . . .	5
2.1.1	Analyse des 1. Axioms: Inertialsystem (IS) und Galilei-Transformation (GT) . . . . .	6
2.1.2	Analyse des 2. Axioms: Grundlegende BWGl gilt im IS . . . . .	7
2.1.3	Analyse des 3. Axioms: actio = reactio . . . . .	7
2.1.4	Abschließende Diskussion . . . . .	8
2.2	Grundbegriffe und Erhaltungssätze . . . . .	9
2.2.1	Impuls . . . . .	9
2.2.2	Drehimpuls . . . . .	10
2.2.3	Arbeit und Energie . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Anwendungen I</b>	<b>20</b>
3.1	Elementare Bewegungsprobleme . . . . .	20
3.1.1	Eindimensionale Probleme ( $E = T + U = \text{konst.}$ ) . . . . .	20
3.1.2	Reibung ( $\dot{E} \neq 0$ ) . . . . .	29
3.1.3	Diagramme . . . . .	33
3.2	Oszillatorprobleme I . . . . .	40
3.2.1	Motive für das Studium des harmonischen Oszillators . . . . .	40
3.2.2	Der gedämpfte harmonische Oszillator (1-dim.) . . . . .	41
3.2.3	Der getriebene harmonische Oszillator - erzwungene Schwingungen . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Hamilton'sches Prinzip und Lagrange'sche Mechanik</b>	<b>57</b>
4.1	Das Hamilton'sche Prinzip der stationären Wirkung (1823) . . . . .	57
4.1.1	Grundzüge der Variationsrechnung . . . . .	58
4.1.2	HP für den einfachsten Fall . . . . .	60

4.2	Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten . . . . .	61
4.2.1	Vorbereitungen für eine MP . . . . .	61
4.2.2	N-Teilchen Systeme . . . . .	65
4.3	Die Lagrange Gleichung 2. Art . . . . .	69
4.3.1	Herleitung der Lagrange-Gleichungen aus dem Hamilton- Prinzip . . . . .	69
4.3.2	Äquivalenz der Lagrange-Gleichung zur Newton'schen BWGl	71
4.3.3	Lagrange II und Erhaltungssätze . . . . .	76
4.3.4	Erweiterungen . . . . .	81
4.4	Kurze Zusammenfassung der Lagrange Mechanik . . . . .	84
<b>5</b>	<b>Anwendungen II</b>	<b>86</b>
5.1	Das Zweikörper-Zentralkraftproblem . . . . .	86
5.1.1	Reduktion auf ein Einkörperproblem . . . . .	87
5.1.2	Relativbewegung . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Hamilton'sche Mechanik</b>	<b>94</b>
<b>7</b>	<b>Mathematischer Anhang</b>	<b>95</b>
7.1	Einführung der $\delta$ -Funktion . . . . .	95
<b>8</b>	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>96</b>
<b>9</b>	<b>Wichtige Fundamental Konstanten</b>	<b>98</b>

# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 Inhaltsübersicht

I. Einführung

II. Newton'sche Mechanik

II.1 Axiome

II.2 Grundbegriffe + Erhaltungsgrößen

III. Anwendung I

III.1 Elementare Bewegungsprobleme

III.2 Oszillatorprobleme

III.3 Stoßprobleme

IV. Lagrange'sche Mechanik

IV.1 Zwangsbedingung und generalisierte Koordinaten

IV.2 Hamilton'sches Prinzip und Lagrange'sche Gleichung 2. Art

IV.3 Diskussion + Erweiterung + Ergänzung

V. Anwendung II

V.1 Keplerproblem

V.2 Beschleunigte Bezugssysteme

V.3 Starre Körper

V.4 Gekoppelte Oszillatoren

VI. Hamilton Mechanik

## 1.2 Bemerkungen zum Wesen der Theoretischen Physik

### Aufgaben der TP:

Formulierung, Analyse und Anwendung mathematischer Gesetze und Modelle zur Beschreibung physikalischer Phänomene und Prozesse (Mathematik ist die Sprache der Physik)

Werkzeuge der TP: Mathematik, Computer

Ziele und Nutzen der TP:

- Herausarbeiten weniger "roter Fäden" durch das Gebäude der Physik
- Auffinden allgemeiner Grundprinzipien
- Überprüfung und Interpretation empirischer Daten

"Kanon der TP":

- Klassische Mechanik → "Teilchen" ('Massenpunkte')
- Klassische Elektrodynamik → "Felder" (Wellen)
- Quantenmechanik → bewältigt Dualismus Welle-Teilchen
- Statistische Mechanik/Thermodynamik → Beschreibung von "Makrophänomenen" (typischerweise mit  $10^{23}$  Teilchen)

## 1.3 Vorbemerkung zur Klassischen Mechanik

### Definition:

"Mechanik ist die Lehre von der Bewegung materieller Gegenstände im Raum und den diese beherrschenden Gesetzmäßigkeiten" [6]

### Analyse:

- (i) Materielle Gegenstände → mit (träger) Masse ausgestattete Objekte  
Massenpunkte  $\Leftrightarrow$  Punktförmige Teilchen mit Masse
- (ii) Bewegung im Raum: erfordert Klärung der Begriffe Raum + Zeit

Eigenschaften des Raums: (im Rahmen der Kl. Mechanik)

- drei-dimensional
- allseitig unbegrenzt
- enthält Punkte, Geraden, Ebenen
- Parallelenaxiom
- homogen + isotrop

→ dreidimensionaler Euklidischer Raum

→ kartesische Koordinatensysteme definierbar

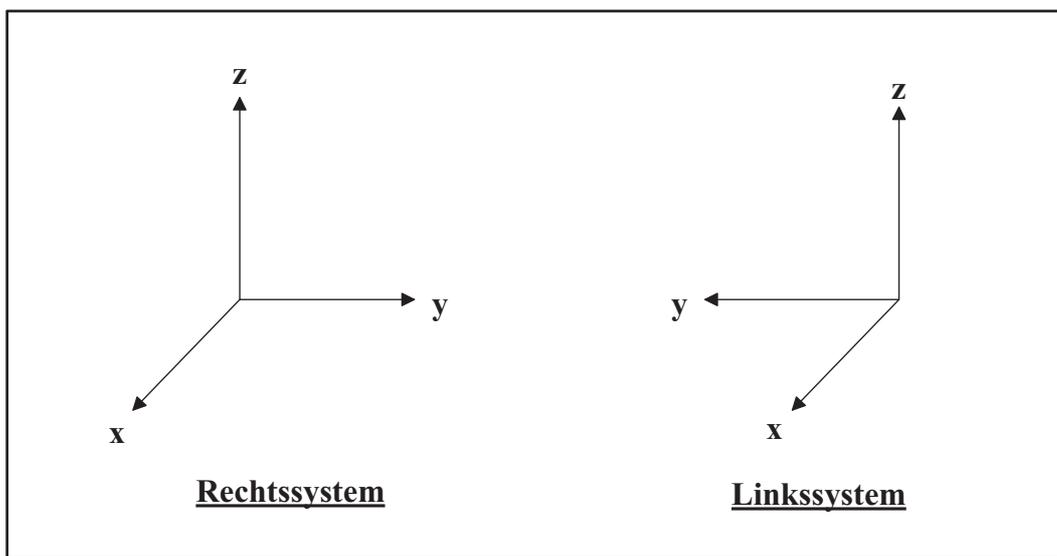


Abbildung 1.1: Kartesisches Rechts- / Linkssystem

⇒ Beschreibung von Gegebenheiten im Raum → Vektorrechnung im  $\mathcal{R}^3$

Eigenschaften der Zeit:

- homogener Parameter

→ Bewegung im Raum wird beschrieben durch:

- Bahnkurve (Trajektorie)  $\mathbf{r}(t)$
- Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$
- Beschleunigung  $\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$

⇒ 'Kinematik': mathematische Beschreibung von Bewegungen ohne Berücksichtigung der verursachenden Kräfte

Erweiterungen des Raumbegriffs:

- Spezielle Relativitätstheorie  $\rightarrow$  4-dim. (Raumzeit) "Minkowski" Raum
- Allgemeine Relativitätstheorie  $\rightarrow$  (lokal) gekrümmte Räume
- Quantenmechanik  $\rightarrow$   $\infty$ -dim. Hilbert-Raum

(iii) Gesetzmäßigkeiten  $\rightarrow$  "Dynamik":

Was bewirkt die Bewegung von Objekten?

$\rightarrow$  Newton'sche Axiome (Kraftbegriff)

$\rightarrow$  insbesondere Bewegungsgleichung (BWGl)  $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$

$$\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} \stackrel{DGL+AB}{\Leftrightarrow} \mathbf{r}(t)$$

$\rightarrow$  weitere Grundbegriffe (Impuls, Drehimpuls, Arbeit, Energie,...)

Darüber hinaus:

- Alternative (äquivalente) Formulierungen der KM ("Lagrange", "Hamilton")
- beruhen auf übergeordnetem "Wirkungsprinzip" (jenseits der KM gültig)
- ebnen den Weg zur QM
- sind (teilweise) flexibler in der Handhabung und praktischen Anwendung

# Kapitel 2

## Newton'sche Mechanik

### 2.1 Die Newton'schen Axiome (1687)

**Axiom:** Keines Beweises bedürftiger Grundsatz; Näheres: [6], Kap. 3.1

**Lex prima:** "Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seine Zustand zu ändern."

**Lex secunda:** "Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher die Kraft wirkt."

**Lex tertia:** "Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und entgegengesetzter Richtung."  
(actio = reactio)

**Lex quarta:** Kräfte addieren sich wie Vektoren (Kräfteparallelogramm)

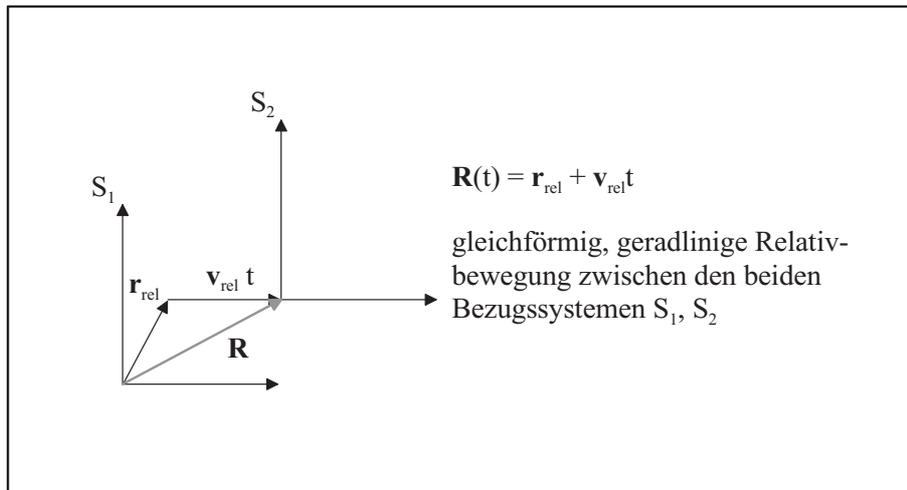
**Definition:** Impuls ("Bewegungsgröße"); Näheres zu Newton's Formulierung der Grundprinzipien: [6], Kap. 3.2; [12], §1

$$\mathbf{p} := m \cdot \mathbf{v}$$

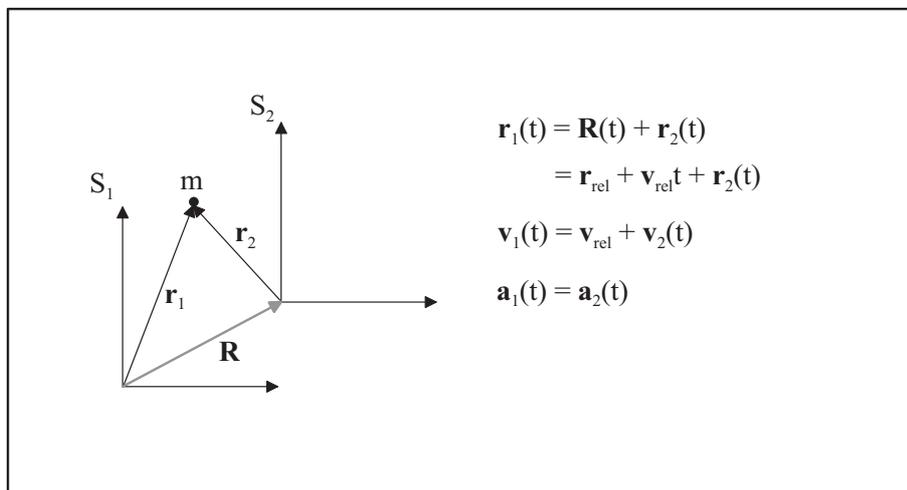
### 2.1.1 Analyse des 1. Axioms: Inertialsystem (IS) und Galilei-Transformation (GT)

”Galilei’sches Trägheitsprinzip”

falls  $\mathbf{F} = 0 \longrightarrow \mathbf{p} = \text{konst.}$



Beschreibung eines MPs aus Sicht von  $S_1$  und  $S_2$ :



**Inertialsystem**  $\iff$  Bezugssystem, in dem sich ein kräftefreier Körper geradlinig, gleichförmig bewegt. Falls  $\mathbf{F} = 0 \longrightarrow \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = 0$

**Galilei-Transformation**  $\iff (\mathbf{r}_1, t_1) \longrightarrow (\mathbf{r}_2, t_2)$   
 mit  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{\text{rel}} - \mathbf{v}_{\text{rel}}t$  und  $t_2 = t_1 = t$  (Näheres: Übung 1.4)

### 2.1.2 Analyse des 2. Axioms: Grundlegende BWGl gilt im IS

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$$

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}$$

falls  $\dot{m} = 0 \longrightarrow$

$$m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$$

$\dot{m} \neq 0$ : z.B. klassisches Raketenproblem, spezielle Relativitätstheorie

Folgerung:

(i)  $0 = \mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} \implies \mathbf{p} = \text{konst.} \longleftrightarrow$  1. Axiom

(ii) 'Forminvarianz' der BWGl unter GTs  $S_1 : m\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1 = m\mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_2 : S_2$

Beispiel: senkrechter Wurf aus fahrendem Zug ( $\mathbf{v}_{Zug} = \text{konst.}$ )

$S_1 \curvearrowright$

$S_2 \updownarrow$

### 2.1.3 Analyse des 3. Axioms: actio = reactio

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{F}_{12} : \text{Kraft von Teilchen 1 auf Teilchen 2} \\ \mathbf{F}_{21} : \text{Kraft von Teilchen 2 auf Teilchen 1} \end{array} \right\} \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

$$\xrightarrow{\text{2. Axiom}} m_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = -m_2\mathbf{a}_2$$

$$\implies \frac{m_1}{m_2} = \frac{|\mathbf{a}_2|}{|\mathbf{a}_1|} \equiv \frac{a_2}{a_1} \longrightarrow \text{definiertem Massenverhältnis}$$

$\rightarrow$  absolute Skala wird durch Festlegung der Standardmasse  $[m] = 1\text{kg}$  eingeführt

$\rightarrow$  'träge Masse': (skalares) Maß für den Widerstand gegen Bewegungsänderung

$\rightarrow$  Kraft: abgeleitete Größe (nach Newton II)  $[\mathbf{F}] = 1 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ N}$

Mögliche Situationen:

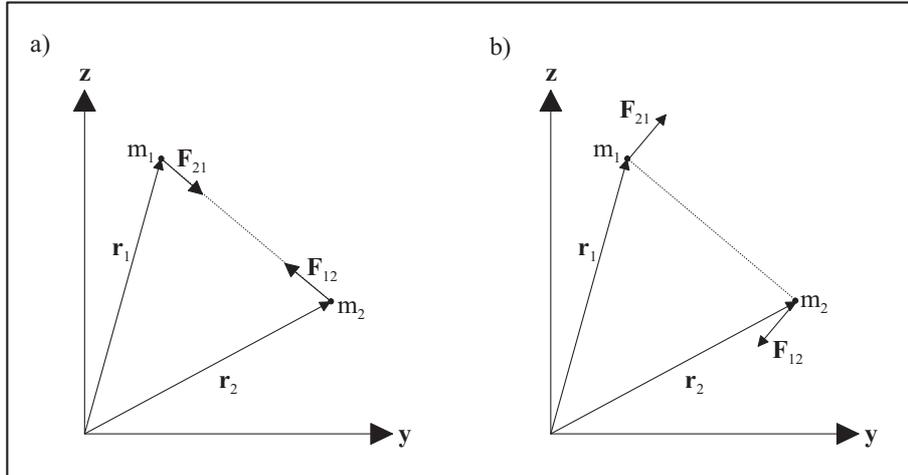


Abbildung 2.1: Die Kraftvektoren können auf einer gemeinsamen Geraden liegen oder parallel zu einander sein, müssen aber in unterschiedliche Richtung zeigen

- 3. Axiom erfüllt für Gravitations- und Coulombwechselwirkung
- Darüber hinaus gilt es i.a. nur in modifizierter Form [11], Kap. 3.1.6

### 2.1.4 Abschließende Diskussion

- Physikalischer Ursprung von Kräften wird in KM nicht behandelt
- Grundproblem der KM: Lsg. der gewöhnlichen DGl 2. Ordnung  $m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  (+ AB's) (Analytische Lösungsverfahren sind nur für Spezialfälle bekannt, ein numerisches Lösungsverfahren gibt es in [1] KM, Kap. 2.3)
- Erhaltungssätze folgen als Konsequenz der Axiome

## 2.2 Grundbegriffe und Erhaltungssätze

### 2.2.1 Impuls

a) Einfachste Situation: ein kräftefreier MP:

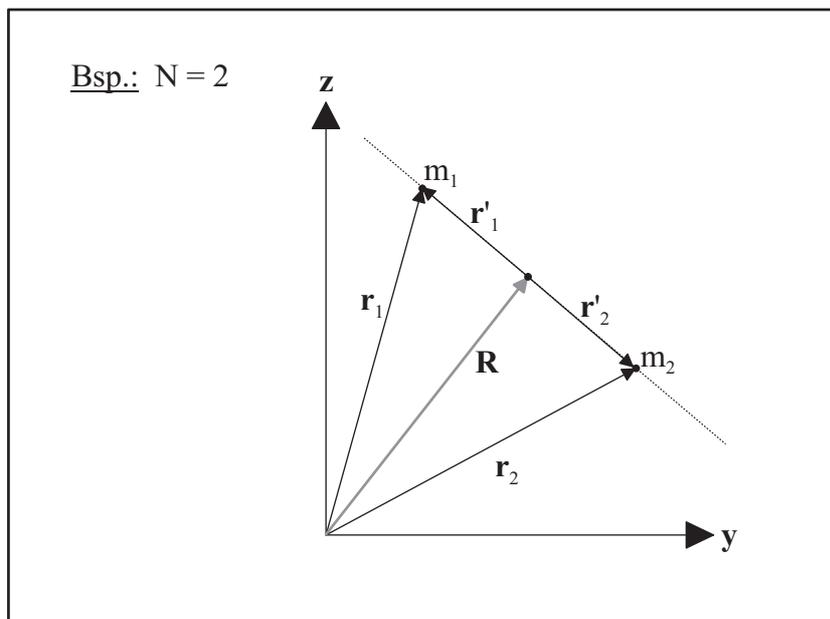
$$\mathbf{F} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{p} = \text{konst.} = m \cdot \mathbf{v}_0 \quad \text{Impulserhaltung}$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} \cdot t \quad \text{geradlinig, gleichförmige Bewegung}$$

b) System von N MPs:

- 'innere Kraft'  $\mathbf{f}_{ki}$ : Wechselwirkung zwischen zwei MPs (Kraft von k auf i)
- 'äußere Kraft'  $\mathbf{F}_i$ : äußerer Einfluß auf den i-ten MP
- 'Abgeschlossenes System': Keine äußeren Kräfte ( $\mathbf{F}_i = 0$  für  $i = 1, \dots, N$ )
- 'Offenes System':  $\mathbf{F}_i \neq 0$  für mindestens ein  $i \in \{1, \dots, N\}$
- Gesamtmasse:  $M = \sum_{i=1}^N m_i$
- Position des 'Schwerpunktes' (SP) (auch Massenmittelpunkt):  

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{r}_i$$
- SP-Geschwindigkeit:  $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{v}_i$
- SP (Gesamt-) Impuls:  $\mathbf{P} = M \cdot \mathbf{V} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i$
- Position eines MPs bzgl. SP:  $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$



◁ BWGl für k-ten MP:

$$\dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{F}_k + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{ik}$$

beachte :  $\mathbf{f}_{ik} = -\mathbf{f}_{ki} \longrightarrow \mathbf{f}_{kk} = 0$

$$\longrightarrow \sum_{k=1}^N \dot{\mathbf{p}}_k = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k + \sum_{i,k=1}^N \mathbf{f}_{ik}$$

$$\parallel \parallel \parallel$$

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_{ext} + 0$$

**”Impulssatz / SP-Satz”**

Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse in ihm vereinigt wäre und alle äußeren Kräfte an ihm angreifen würden.

falls  $\mathbf{F}_{ext} = 0 \implies \dot{\mathbf{P}} = 0 \longrightarrow \mathbf{P} = \text{konst.}$

Impulserhaltung (gilt in abgeschlossenen Systemen)

In einem abgeschlossenen System kann man von einem 'raumfesten' IS durch eine GT in das (inertiale) 'SP-System' übergehen

### 2.2.2 Drehimpuls

a) ein MP:

Definition: Drehimpuls (= Moment des Impulses)

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$$

$$|\mathbf{l}| = l = r \cdot p \cdot \sin \gamma$$

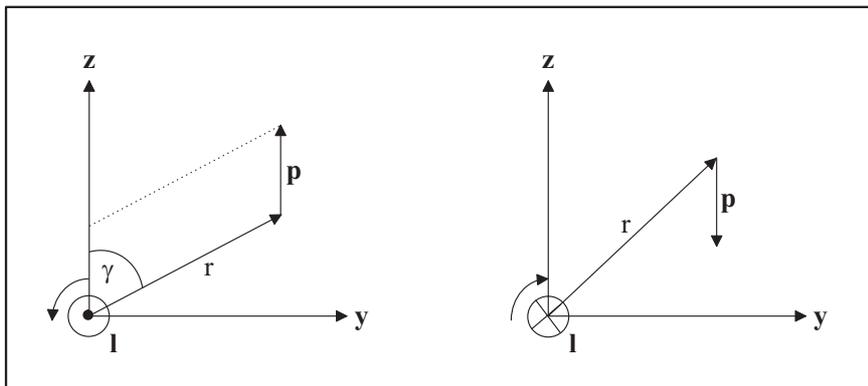


Abbildung 2.2: Im linken Bild zeigt der Drehimpulsvektor aus dem Bald heraus, im rechten Bild hinein

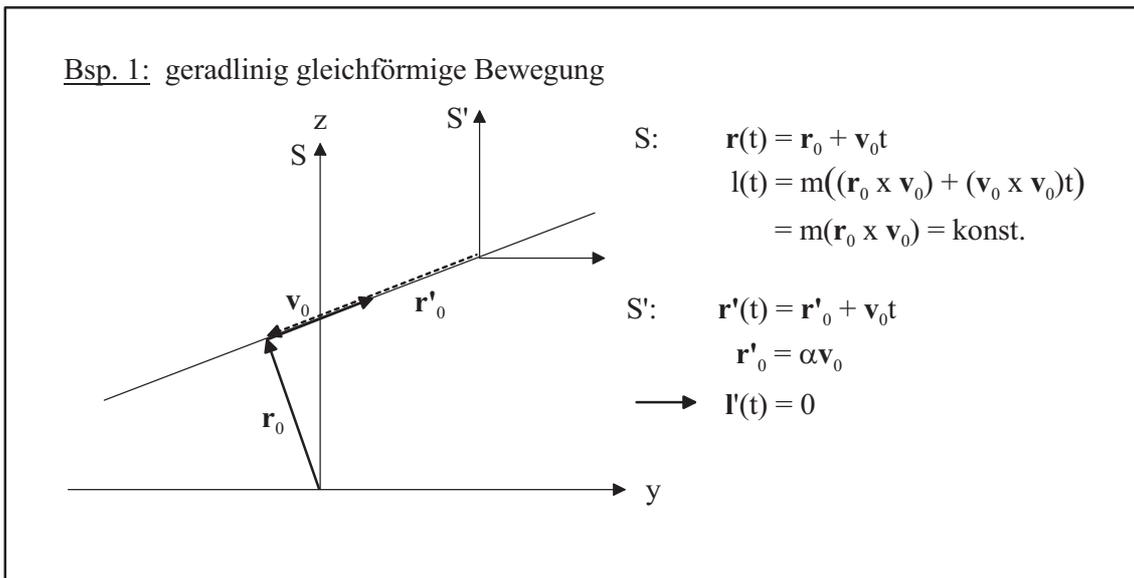


Abbildung 2.3: Bewegung von  $S$  transformiert in  $S'$

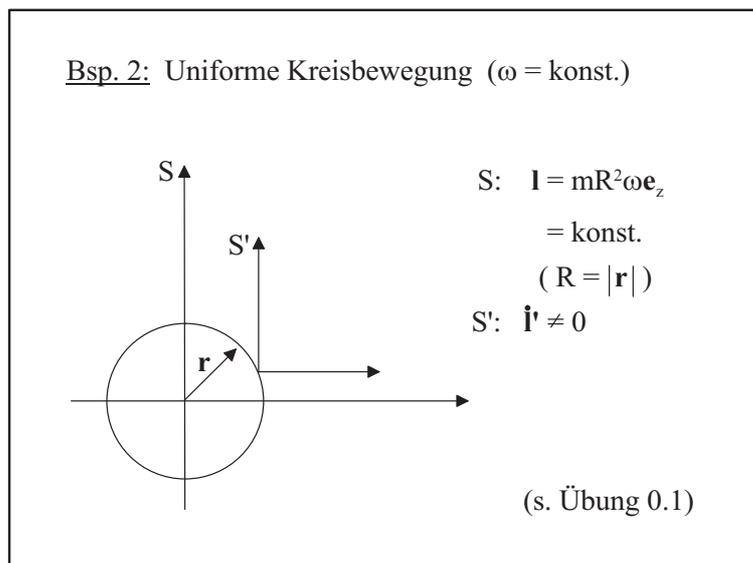


Abbildung 2.4: Uniforme Kreisbewegung

Bemerkung: Vollständige Angabe von  $\mathbf{l}$  verlangt Festlegung des Bezugspunktes für die Momentbildung (gilt für jedes Moment eines Vektors)

$$\triangleleft \quad \dot{\mathbf{i}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = m(\mathbf{v} \times \mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Definition: Drehmoment  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

$\dot{\mathbf{i}} = \mathbf{M}$	Drehimpulssatz
---------------------------------	----------------

falls $\mathbf{M} = 0 \implies \dot{\mathbf{i}} = 0, \mathbf{l} = \text{konst.}$	Drehimpulserhaltung
--	---------------------

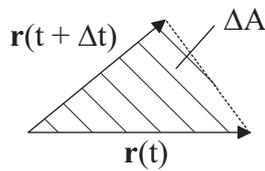
$$\mathbf{M} = 0 \quad \text{falls} \quad \begin{array}{l} (i) \quad \mathbf{F} = 0 \\ (ii) \quad \mathbf{F} = F\mathbf{e}_r : \text{Zentralkraft } \mathbf{F} \parallel \mathbf{r} \end{array}$$

Zwei Aspekte der Drehimpulserhaltung:

(i) Erhaltung der Richtung  $\longrightarrow$  ebene Bewegung

(ii) Erhaltung des Betrages:

$\triangleleft$



$$\begin{aligned} \Delta A &\approx \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t + \Delta t)| \\ &= \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times [\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)]| \\ \frac{\Delta A}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \left| \mathbf{r}(t) \times \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \right| \\ \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} &= \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| \\ \dot{\mathbf{A}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{2m} \mathbf{l} \end{aligned}$$

(als Richtung wird die Flächennormale festgelegt)

### 'Flächengeschwindigkeit'

$|\dot{\mathbf{A}}| = \text{konst.} \longrightarrow$  Flächensatz

("Gleiche Zeiten, gleiche Flächen")

b) System von N MPs:

Definition: Gesamtdrehimpuls

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}(t) &= \sum_{k=1}^N \mathbf{l}_k(t) \\
 &= \sum_k (\mathbf{r}_k(t) \times \mathbf{p}_k(t)) \\
 \longrightarrow \mathbf{L} &= \sum_k (\mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{p}}_k) \\
 &= \sum_{k=1}^N (\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k) + \sum_{i,k=1}^N (\mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_{ik}) \\
 \underline{\text{NR:}} \quad \sum_{i,k} (\mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_{ik}) &= \sum_{i,k} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ki}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \{(\mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_{ik}) + (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ki})\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \{(\mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_{ik}) - (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ik})\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{f}_{ik}\} = 0, \quad \text{falls} \\
 \mathbf{f}_{ik} &= \mathbf{f}_{ik} \cdot (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)
 \end{aligned}$$

( $\mathbf{f}_{ik}$  zeigt in Richtung von  $(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)$ ; vgl. Skizze auf Seite 8)

$$\text{Gesamtdrehmoment} \quad \mathbf{M} = \sum_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k) = \sum_k \mathbf{M}_k$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}} \quad \text{Drehimpulserhaltung}$$

$$\text{falls } \mathbf{M} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{L}} = 0 \\ \mathbf{L} = \text{konst.} \end{array} \right\} \quad \text{Drehimpulserhaltung}$$

(gilt in abgeschlossenen Systemen)

Drehimpuls + Schwerpunkt: (vgl. Skizze Seite 9)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_k &= \mathbf{r}'_k + \mathbf{R} \quad ; \quad \mathbf{v}_k = \mathbf{v}'_k + \mathbf{V} \\
 \longrightarrow \mathbf{L} &= \sum_k m_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k) \\
 &= \sum_k m_k \{ (\mathbf{r}'_k + \mathbf{R}) \times (\mathbf{v}'_k + \mathbf{V}) \} \\
 &= \underbrace{\sum_k m_k (\mathbf{R} \times \mathbf{V})}_{\hookrightarrow M(\mathbf{R} \times \mathbf{V})} + (\mathbf{R} + \mathbf{v}'_k) + (\mathbf{r}'_k \times \mathbf{V}) + (\mathbf{r}'_k \times \mathbf{v}'_k) \\
 \triangleleft \sum_k m_k \mathbf{r}'_k &= \sum_k m_k (\mathbf{r}_k - \mathbf{R}) = \sum_k m_k \mathbf{r}_k - M\mathbf{R} = M\mathbf{R} - M\mathbf{R} = 0 \\
 \longrightarrow \sum_k m_k \mathbf{v}'_k &= \frac{d}{dt} \sum_k m_k \mathbf{r}'_k = 0
 \end{aligned}$$

$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{SP} + \mathbf{L}'$	wobei $\mathbf{L}_{SP} = \mathbf{R} \times \mathbf{P}$ , $\mathbf{L}' = \sum \mathbf{l}'_k = \sum m_k (\mathbf{r}'_k \times \mathbf{v}'_k)$
--	---

$  \begin{aligned}  \mathbf{M} &= \sum_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k) = \sum_k \{ (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_k) \times \mathbf{F}_k \} \\  &= \mathbf{R} \times \sum_k \mathbf{F}_k + \sum_k (\mathbf{r}'_k \times \mathbf{F}_k) = \mathbf{R} \times \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{M}'_{ext} \\  &= \mathbf{M}_{SP} + \mathbf{M}'_{ext}  \end{aligned}  $
---

$$\xrightarrow{\text{Drehimpulssatz}} \dot{\mathbf{L}}_{SP} + \dot{\mathbf{L}}_{ext} = \mathbf{M}_{SP} + \mathbf{M}_{ext}$$

Wegen  $\dot{\mathbf{L}}_{SP} = M(\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{V}}) = \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{P}} \stackrel{SP\text{-Satz}}{=} \mathbf{R} \times \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{M}_{SP}$  folgt

$\dot{\mathbf{L}}_{SP} = \mathbf{M}_{SP}$	Drehimpulssatz für SP
---	-----------------------

$\dot{\mathbf{L}}' = \mathbf{M}'_{ext}$	Drehimpulssatz für Teilchensystem bzgl. SP
---	--

(hat die selbe Form wie der ursprüngliche Drehimpulssatz, obwohl das SP-System i.a. kein Inertialsystem ist)

### 2.2.3 Arbeit und Energie

a) Ein MP:

Definition: Sei  $\mathbf{r}(t)$  die in  $[t_0, t]$  durchlaufene Bahn

$$A := \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t'), t') \cdot \mathbf{v}(t') dt' \quad \text{Arbeit}$$

Falls Kraft "Vektorfeld"  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r)$  ist: [8], Kap. 4.2

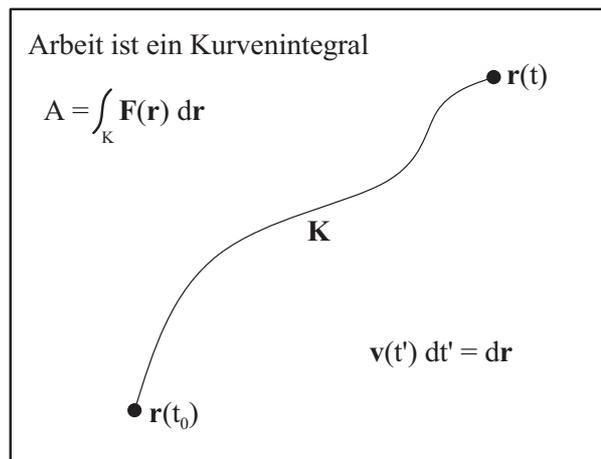


Abbildung 2.5: Kurvenintegral der Arbeit

Diskussion:

- (i) Falls  $\mathbf{F} = \text{konst.}$  und Weg geradlinig  $\rightarrow A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$
- (ii)  $A = 0$  falls  $\mathbf{F} \perp \mathbf{r}$

Beispiel 1: Anheben einer Masse  $m \perp$  zur Äquipotentialfläche des Schwerfeldes  $\rightarrow A = 0$  bei  $v_{\parallel} = 0$

Beispiel 2: Uniforme Kreisbewegung

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (R \cdot \cos \omega t, R \cdot \sin \omega t) \\ \mathbf{v} &= (-R \cdot \omega \cdot \sin \omega t, R \cdot \omega \cdot \cos \omega t) \\ \mathbf{a} &= (-R \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t, -R \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t) \\ &= -\omega^2 \cdot \mathbf{r} \\ \rightarrow m \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{F}(\mathbf{r}) \\ &= -m \cdot \omega^2 \cdot \mathbf{r} \\ \rightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0 &\iff \mathbf{F} \perp \mathbf{v} \implies A = 0 \end{aligned}$$

$$(iii) \text{ "Arbeit" } [A] = 1 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = 1 \text{Nm} = 1 \text{Joule}$$

$$(iv) P := \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t'), t') \cdot \mathbf{v}(t') dt' = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) \cdot \mathbf{v}(t)$$

$$\text{"Leistung" } [P] = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \text{Watt}$$

$$\begin{aligned} \triangleleft \quad A &= \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t'), t') \cdot \mathbf{v}(t') dt' \\ &= m \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{v}}(t') \cdot \mathbf{v}(t') dt' \\ &= \frac{m}{2} \int_{t_0}^t \frac{d}{dt'} (v^2(t')) dt' \\ &= \frac{m}{2} (v^2(t) - v^2(t_0)) \\ &= \frac{1}{2m} (\mathbf{p}^2(t) - \mathbf{p}^2(t_0)) \end{aligned}$$

Definition: kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{p^2}{2m} \geq 0$$

$$\boxed{\longrightarrow T(t) = T_0(t) + A(t_0 \rightarrow t)} \quad \text{'A-T-Relation'}$$

Definition: konservatives Kraftfeld

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &:= -\nabla U(\mathbf{r}) \\ \iff \int_{K_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' &= \int_{K_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ \iff \oint_K \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \stackrel{\text{'Beweis'}}{\implies} \int_{K_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' &= - \int_{K_1} \nabla U(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ &= - \int_{r_0}^r dU = U(\mathbf{r}_0) - U(\mathbf{r}) \end{aligned}}$$

Rückweg wird gezeigt unter der Zuhilfenahme des Mittelwertsatzes. Außerdem folgt:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = 0$$

Rückweg wird gezeigt mit dem Integralsatz von Stokes:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A} = \oint_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{siehe [8], Kap. 4.3})$$

Konservatives Kraftfeld:

$\mathbf{F} = -\nabla U$	$\iff$	$\nabla \times \mathbf{F} = 0$
$\Downarrow$	$\swarrow \searrow$	$\Downarrow$
$\int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$	$\iff$	$\oint_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$

$$U(\mathbf{r}) = - \int^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r} \quad \text{"potentielle Energie"}$$

Übliche Festlegung der unbestimmten Konstanten durch  $U(\mathbf{r}) \xrightarrow{\mathbf{r} \rightarrow \infty} 0$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \quad A &= U(1) - U(2) = T(2) - T(1) \\ \iff \quad T(1) + U(1) &= T(2) + U(2) \end{aligned}$$

$E = T + U = \text{konst.}$	Energieerhaltung
-----------------------------	------------------

Allgemeine Situation:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_{\text{konservativ}} + \mathbf{F}_{\text{dissipativ}} \\ \nabla \times \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F}_{\text{diss}} \neq 0 \end{aligned}$$

$\triangleleft$  Newton II:

$$\begin{aligned} m \cdot \dot{\mathbf{v}} &= -\nabla U(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_{\text{diss}} \\ \mathbf{F}_{\text{diss}} &= m \cdot \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \nabla U \cdot \mathbf{v} \\ \iff \mathbf{F}_{\text{diss}} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} v^2 + U(\mathbf{r}(t)) \right) \end{aligned}$$

$\frac{d}{dt} (T + U) = \frac{dE}{dt} = \mathbf{F}_{\text{diss}} \cdot \mathbf{v}$	"allg. Energiesatz"
--	---------------------

Definition:  $A_{\text{diss}} = \int \mathbf{F}_{\text{diss}} \cdot \mathbf{v} dt \longrightarrow \frac{dA_{\text{diss}}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{diss}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{P}_{\text{diss}}$

b) System von N MPs:

Ausgangspunkt: BWGl für k-ten MP:  $\dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{F}_k + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{ik}$

Einschränkungen:

- (i)  $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k(\mathbf{r}_k) = -\nabla_k \cdot U_k(\mathbf{r}_k)$  (äußere Kräfte sind konservativ)
- (ii)  $\mathbf{f}_{ik} = \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) = \mathbf{f}_{ki}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)$  (hängen nur jeweils von  $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)$  ab)
- (iii)  $\nabla_k \times \mathbf{f}_{ik} = \nabla_i \times \mathbf{f}_{ki} = 0$  (sind konservativ)

$$\longrightarrow \mathbf{f}_{ik} = -\nabla_k V_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k), \mathbf{f}_{ki} = -\nabla_i V_{ki}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)$$

Konservative innere Kräfte zwischen zwei MPs können auf ein gemeinsames Potential zurückgeführt werden (d.h.  $V_{ik} = V_{ki}$ )

$$\nabla_k V_{ik} = -\nabla_k V_{ki}$$

”zwei Teilchen WW”

$$\begin{aligned} \triangleleft \quad \dot{\mathbf{p}}_k &= \mathbf{F}_k + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{ik} \\ \longrightarrow \sum_k \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{v}_k &= \sum_k m_k \cdot \dot{\mathbf{v}}_k \cdot \mathbf{v}_k - \sum_k \mathbf{F}_k \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{v}_k \\ RS : &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_k m_k \mathbf{v}_k^2 + \sum_k \nabla_k U_k(\mathbf{v}_k) \cdot \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_k \left( \frac{m_k}{2} \mathbf{v}_k^2 + U_k(\mathbf{r}_k(t)) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \sum_k (T_k + U_k) = \frac{d}{dt} (T + U) \\ LS : &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \left( \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{v}_k + \mathbf{f}_{ki}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{v}_i \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \left( \mathbf{f}_{ik} \cdot \mathbf{v}_k - \mathbf{f}_{ik} \cdot \mathbf{v}_i \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \mathbf{f}_{ik} \cdot (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i) \end{aligned}$$

Angewandte Transformation :  $\mathbf{r}_{ik} := \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$   
 $\mathbf{v}_{ik} := \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_k$

$$\begin{aligned} \nabla_i V_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) &= \nabla_{ik} V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) = -\nabla_k V_{ik} \\ \hookrightarrow \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) &= -\nabla_k V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) = \nabla_{ik} V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow RS : &= -\frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) \cdot \mathbf{v}_{ik} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \nabla_{ik} V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) \cdot \frac{d\mathbf{r}_{ik}}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}(t)) \\ &= -\frac{d}{dt} V \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt} (T + U + V) &= 0 \\ T + U + V &= \text{konst.} \end{aligned}} \longrightarrow \text{Energieerhaltung}$$

Die Beträge der ges. Energie E:

- $T = \sum_k T_k$ : kinetische Energie des Teilchensystems
- $U = \sum_k U_k$ : potentielle Energie aufgrund äußerer Kräfte
- $V = \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} V_{ik} = \sum_{i < k} V_{ik}$ : 'interne' WW-Energie

Beispiele:

$$\begin{aligned} \underline{N=2} : \quad V &= \frac{1}{2} (V_{12} + V_{21}) \stackrel{V_{12} \equiv V_{21}}{=} V_{12} \\ \underline{N=3} : \quad V &= \frac{1}{2} (V_{12} + V_{13} + V_{23} + V_{21} + V_{31} + V_{32}) \\ &= \underbrace{V_{12} + V_{13} + V_{23}} \\ &\Rightarrow \sum_{i < k} V_{ik} \end{aligned}$$

# Kapitel 3

## Anwendungen I

### 3.1 Elementare Bewegungsprobleme

#### 3.1.1 Eindimensionale Probleme ( $E = T + U = \text{konst.}$ )

a) Qualitative Vorbemerkung:

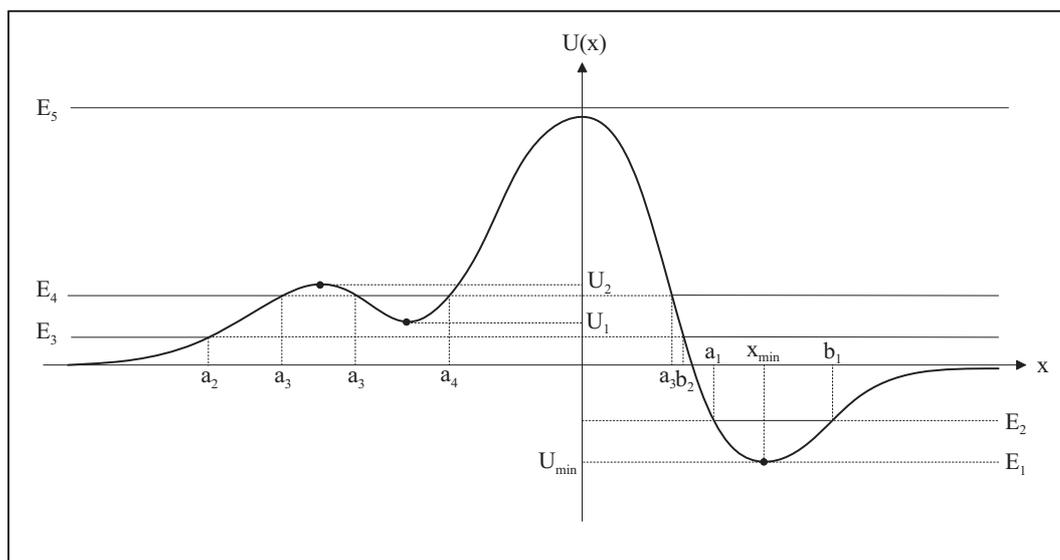


Abbildung 3.1: Potential

$$E = T + U \iff E - U(x) = T > 0$$

$\iff$

$$E \geq U(x)$$

- (i)  $E < U_{min}$  : nicht möglich
- (ii)  $E_1 = U_{min}$  : ruhender MP bei  $x = x_{min}$
- (iii)  $U_{min} < E_2 < 0$  : gebundene (finite) Bewegung in  $[a_1, b_1]$   
 $\dot{x}(a_1) = v(a_1) = v(b_1) = \dot{x}(b_1) = 0$ ;  $a_1, b_1$  Umkehrpunkte
- (iv)  $0 < E_3 < U_1$  : ungebundene (infinite) Bewegung entweder in  $(-\infty, a_2]$   
oder in  $[b_2, \infty)$
- (v)  $U_1 < E_4 < U_2$  : finite Bewegung in  $[a_3, b_3]$  oder infinite in  $(-\infty, a_3]$   
oder  $[b_3, \infty)$
- (vi)  $U_{max} < E_5$  : infinite Bewegung in  $(-\infty, \infty)$

Eine Analoge Diskussion ist möglich im dreidimensionalen Raum im Falle eines Zentralkraftproblems

b) Quantitative Vorbemerkung:

$$E = T + U \iff v^2(t) = \frac{2(E - U(x))}{m}$$

$$\iff \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2(E - U(x))}{m}}$$

Lösung der DGl durch 'Variablentrennung':

$$\pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2(E - U(x))}{m}}} = \int dt$$

$$\iff t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int [E - U(x)]^{-\frac{1}{2}} dx + konst. = t(x)$$

→ Umkehrung liefert  $x(t)$

→ Energiesatz = 1. Integral der BWGl

c) Mathematische Vorbemerkung zur gewöhnlichen DGl:

Siehe dazu [8], Kap.5; [1], Kap. 3.2, Anhang C.3; [11], Mathematische Ergänzungen (CD), Kap. 2 und 6

- (i) Hinreichende Existenz- und Eindeutigkeitsbedingungen:  $\dot{x} = f(x, t)$   
gewöhnliche DGl 1. Ordnung (explizit)  
Falls  $f$  stetig (partiell) differenzierbar ist, so existiert (für jedes Paar von Anfangswerten  $(x_0, t_0)$ ) eine eindeutige Lösung der DGl., d.h.

$$\exists x(t) : \dot{x} = f(x(t), t) \quad \text{mit} \quad x(t_0) = x_0$$

(ii) Analoges gilt für DGI-Systeme:

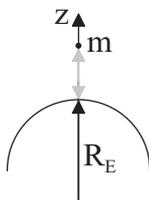
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n, t) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, t)\end{aligned}$$

(iii) Eine DGI n-ter Ordnung kann man auf ein System von DGI's 1. Ordnung zurückführen, insbesondere:

$$\begin{aligned}\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) &\implies \dot{x} = v \\ &\dot{v} = f(x, v, t)\end{aligned}$$

(iv) Systematische Lösungsmethoden sind nur für spezielle Typen von DGI's bekannt (insb. lineare DGI's mit konstanten Koeffizienten))

d) Bewegung im homogenen Schwerefeld (der Erde):



$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -m^* g \mathbf{e}_z \\ g &= \frac{M_E \cdot \gamma}{R_e^2} \\ &= 9,81 \frac{m}{s^2} \quad (\text{Gravitationsbeschleunigung})\end{aligned}$$

(Werte Siehe Kapitel 9)

**Frage 1:** Wie kommt man vom allg. Gravitationsgesetz zum homogenen Schwerefeld der Erde?

**Frage 2:** Träge und Schwere Masse

→ empirisch:  $m = m^*$  (mit Messgenauigkeit  $\frac{\Delta m}{m} = \frac{m-m^*}{m} \lesssim 10^{-10}$ )

→ theoretisch:  $m = m^*$  Ist eine Grundannahme der Allgemeinen Relativitätstheorie (Äquivalenzprinzip: Gravitationskräfte sind äquivalent zu Trägheitskräften)

**Exkurs zu Frage 1:** Ausgangspunkt: Newton's Gravitationsgesetz

$$\mathbf{F}_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\mathbf{F}_{12}$$

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

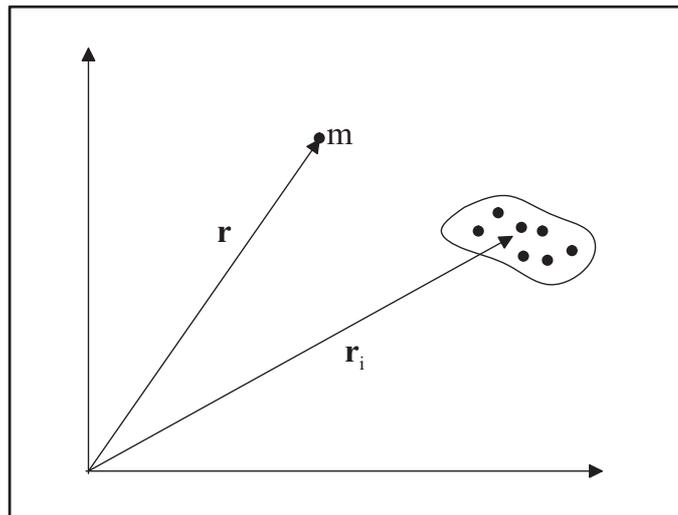
(zur Veranschaulichung siehe hierzu Abbildung 2.1)

$$\nabla_1 \times \mathbf{F}_{21} = \nabla \times \mathbf{F}_{12} = 0$$

→ potentielle Energie:

$$U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \equiv U_{12} = U_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

(Prüfe:  $\nabla_1 U_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{12} = -\nabla_2 U_{12}$ )

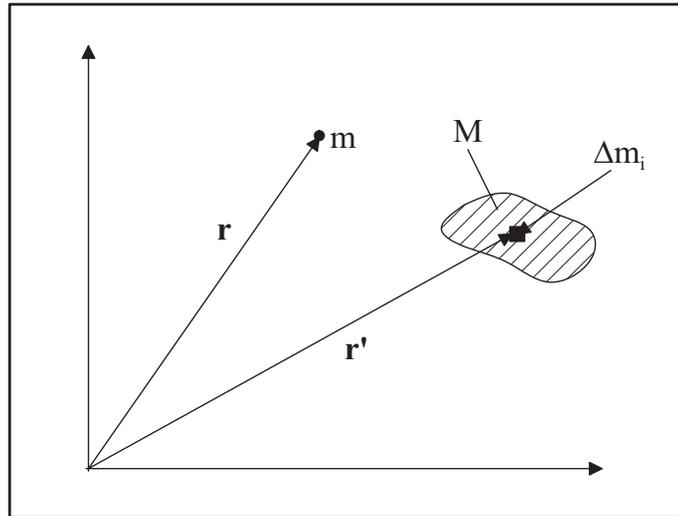


Schritte:

- Potentielle Energie des MPs  $m$  aufgrund der diskreten Massenverteilung  $(m_1, \dots, m_N)$

$$U(\mathbf{r}) = -\gamma m \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

- Potentielle Energie aufgrund kontinuierlicher Massenverteilung



$$\begin{aligned}
 m_i \equiv \Delta m_i &\approx \rho(\mathbf{r}_i) \Delta V_i \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} \rho(\mathbf{r}') dV' = \rho(\mathbf{r}') d^3 r' \\
 &\longrightarrow M = \int_V \rho(\mathbf{r}') d^3 r' \\
 &\longrightarrow U(\mathbf{r}) = -\gamma m \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'
 \end{aligned}$$

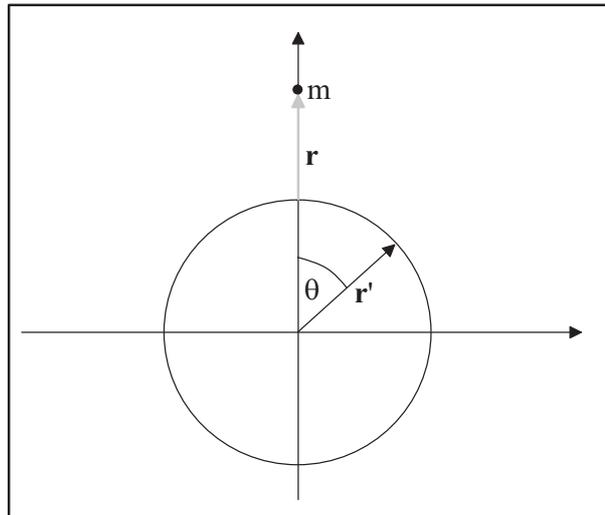
- Annahme: homogene Massenverteilung  $\rho(\mathbf{r}') = \rho_0$   
 Auswertung des Integrals:

$$\begin{aligned}
 d^3 r' &= r'^2 dr' \sin \Theta' d\Theta' d\phi' \\
 \mathbf{r} &= (0, 0, z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \longrightarrow U(\mathbf{r}) &= -\gamma m \rho_0 \int \frac{d^3 r'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Theta'}} \\
 &= -\gamma m \rho_0 \int_0^{R_E} dr' r'^2 \int_0^\pi \frac{\sin \Theta' d\Theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Theta'}} \int_0^{2\pi} d\phi'
 \end{aligned}$$

1. Substitution:

$$\begin{aligned}
 x &= \cos \Theta' ; & x(0) &= 1 \\
 dx &= -\sin \Theta' d\Theta' ; & x(\pi) &= -1
 \end{aligned}$$



$$U(\mathbf{r}) = -2\pi\gamma m\rho_0 \int_0^{R_E} dr' r'^2 \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'x}}$$

Bemerkung:

Zu diesem Zwischenergebnis gelangt man direkt durch die Zerlegung des Volumenelements  $d^3r' = r'^2 dr' d(\cos \Theta') d\phi'$  und der Verwendung der entsprechenden Integrationsgrenzen.

2. Substitution:

$$\begin{aligned} y &= r^2 + r'^2 - 2rr'x \\ dy &= -2rr' dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'x}} &= -\frac{1}{2rr'} \int_{y(-1)}^{y(1)} \frac{dy}{\sqrt{y}} \\ &= -\frac{1}{rr'} \left[ r^2 + r'^2 - 2rr'x \right]^{\frac{1}{2}} \Big|_{-1}^1 \\ &= -\frac{1}{rr'} \left[ \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'} - \sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr'} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{rr'} \left[ \sqrt{(r-r')^2} - \sqrt{(r+r')^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{rr'} \begin{cases} r - r' - (r + r') = \frac{2}{r} & r > r' \\ r' - r - (r + r') = \frac{2}{r} & r' > r \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Fall 1: } r > R_E \quad \longrightarrow \quad U(\mathbf{r}) &= -4\pi\gamma m\rho_0 \frac{1}{r} \int_0^{R_E} r'^2 dr' \\
 &= \underbrace{-\frac{4\pi}{3}\rho_0 R_E^3 \gamma \frac{m}{r}}_{M_E} \\
 &= -\gamma \frac{mM_E}{r} = U(r)
 \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{mM_E}{r^3} \mathbf{r} = -\gamma \frac{mM_E}{r^2} \mathbf{e}_r$$

Definition:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{'Gravitationsfeld'} \quad G(\mathbf{r}) &= \frac{1}{m} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{M_E}{r^2} \mathbf{e}_r \\
 \text{'Gravitationspotential'} \quad \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{m} U(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{M_E}{r}
 \end{aligned} \right\} \text{unabh. vom 'Probekörper' } m$$

Entwicklung für  $r = R_E + z'$  mit  $z' \ll R_E$ :

$$\begin{aligned}
 \longrightarrow U(r) &= -\gamma m M_E \frac{1}{R_E + z'} \\
 &= -\gamma \frac{m M_E}{R_E} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z'}{R_E}} \\
 &\approx -\gamma \frac{m M_E}{R_E} \cdot \left( 1 - \frac{z'}{R_E} + \left( \frac{z'}{R_E} \right)^2 - \dots \right)
 \end{aligned}$$

$$\approx -\gamma \frac{m M_E}{R_E} + \gamma \frac{m M_E}{R_E^2} z' \pm \dots$$

$$= U_0 + mgz' + \dots \quad \left( g = \gamma \frac{m M_E}{R_E^2} \right)$$

$$\longrightarrow \tilde{U} = U - U_0 = mgz' ; \quad \mathbf{F}(z) = -\frac{dU}{dz} \mathbf{e}_z = -mg \mathbf{e}_z$$

$$\text{Fall 2: } r < R_E \quad \longrightarrow \quad \int_0^{R_E} dr' = \underbrace{\int_0^r dr'}_{r > r'} + \underbrace{\int_r^{R_E} dr'}_{r' > r}$$

$$\begin{aligned}
 \longrightarrow U(r) &= -4\pi\gamma m\rho_0 \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r r'^2 dr' + \int_0^{R_E} r' dr' \right\} \\
 &= -4\pi\gamma m\rho_0 \left\{ \frac{1}{3} r^2 + \frac{1}{2} (R_E^2 - r^2) \right\} \\
 &= -4\pi\gamma m\rho_0 \left[ \frac{1}{2} R_E^2 - \frac{1}{6} r^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$M_E = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R_E^3 \iff \rho_0 = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{M}{R_E^3}$$

$$U(r) = -\gamma m M_E \left[ \frac{3}{2} \frac{1}{R_E} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R_E^3} \right]$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{m M_E}{R_E^3} \mathbf{r}$$

Zusammenfassung:

$$U(r) = -\gamma m M_E \begin{cases} \frac{1}{r} & r > R_E \\ \frac{3}{2} \frac{1}{R_E} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R_E^3} & r \leq R_E \end{cases}$$

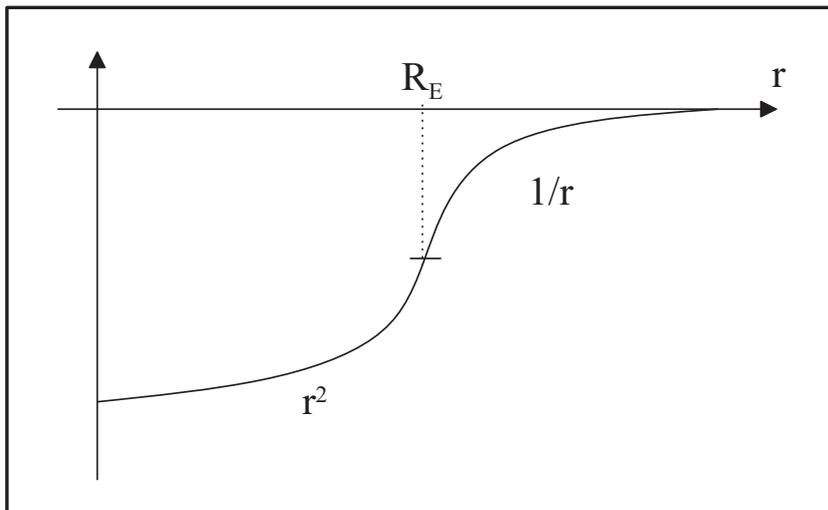


Abbildung 3.2: Potentialverlauf im inneren und im Außenbereich der Erde

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\gamma m M_E \begin{cases} \frac{1}{r^3} \mathbf{r} & r \geq R_E \\ \frac{1}{R_E^3} \mathbf{r} & r \leq R_E \end{cases}$$

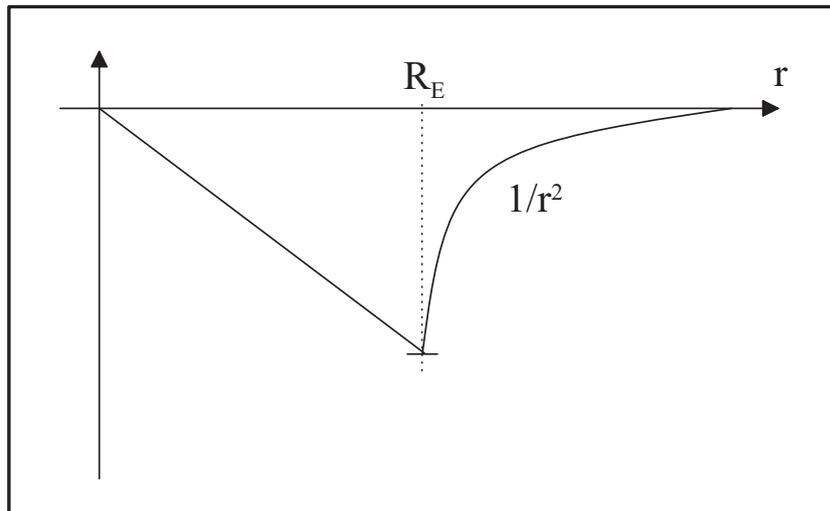


Abbildung 3.3: Verlauf der Erdanziehungskraft außerhalb und innerhalb der Erde

**Zusatzbemerkungen:**

- (i)  $\phi(r) = -\gamma \frac{M}{r}$  für  $r > R$  gilt für jede isotrope Dichteverteilung ( $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$ ). Das Gravitationspotential/-feld einer isotropen Massenverteilung sieht von außen aus wie das eines Massenpunktes der Gesamtmasse  $M$  im SP.
- (ii) Analoge Aussagen gelten in der Elektrostatik
- (iii) Alternative Rechenmethoden: "Gauß'sches Gesetz"; "Multipolentwicklung"

**BWGl für Bewegung im homogenen Schwerfeld:**

$$\begin{aligned}
 \ddot{z} &= -g \\
 \dot{z} &= v_z \\
 \dot{v}_z &= \frac{dv_z}{dt} = -g \\
 \text{Variablentrennung} \quad \int dv_z &= -g \int dt \\
 v_z(t) &= -gt + C_1 \\
 v_z(0) &= v_0 = C_1 \\
 \int dz &= -g \int dt + v_0 \int dt \\
 \implies z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C_2 \\
 AB : z(0) &= z_0 = C_2
 \end{aligned}$$

$$\text{insb. } \xrightarrow{v_0=0} \boxed{z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2} \quad \text{freier Fall}$$

Alternative Lösungsweg:

$$\text{Ausgangspunkt (E - Satz)} \quad t(z) = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{z_0}^z [E - U(z')]^{-\frac{1}{2}} dz' \quad (t_0 = 0)$$

$$\text{mit } U(z) = mgz \quad t(z) = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{z_0}^z \frac{dz'}{\sqrt{E - mgz'}}$$

$$t(z) = \sqrt{\frac{2}{mg^2}} \left\{ \sqrt{E - mgz} - \sqrt{E - mgz_0} \right\}$$

$$\sqrt{E - mgz} = \sqrt{\frac{m}{2}}gt + \sqrt{E - mgz_0}$$

$$E - mgz = \left( \sqrt{E - mgz_0} + \sqrt{\frac{m}{2}}gt \right)^2$$

$$\iff \boxed{z(t) = \frac{E}{mg} - \frac{1}{mg} \left( \sqrt{E - mgz_0} + \sqrt{\frac{m}{2}}gt \right)^2}$$

$$\text{ABs: } z(0) = z_0; \quad v_z(0) = 0; \quad \longrightarrow \quad E = T + U = T(0) + U(0) = mgz$$

$$\longrightarrow \boxed{z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2}$$

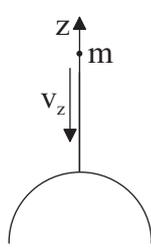
### 3.1.2 Reibung ( $\dot{E} \neq 0$ )

Phänomenologische Ansätze (Bewegung in einem Medium)

(i) Stokes'sche (viskose) Reibung  $\mathbf{F}_S = -\beta\mathbf{v}$  ( $\beta > 0$ )  
 $\longrightarrow$  gültig für 'kleine'  $\mathbf{v}$

(ii) Newton'sche Reibung  $\mathbf{F}_N = -\gamma v\mathbf{v}$  ( $\gamma > 0$ ); ( $v = |\mathbf{v}| > 0$ )  
 $\longrightarrow$  gültig für 'größere'  $\mathbf{v}$  (aber kleiner als Schallgeschwindigkeit)

a) Freier Fall mit Stokes'scher Reibung:



$$\begin{aligned} \ddot{z} &= -g - bv_z & (b = \frac{\beta}{m}) \\ &= -g - b\dot{z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dz}{dt} = v_z \\ \dot{v}_z = \frac{dv_z}{dt} = -g - bv_z \end{cases}$$

Variablentrennung  $\rightarrow$

$$\int \frac{dv_z}{g + bv_z} = - \int dt = -t + konst.$$

$$\ln(g + bv_z) = -bt + konst.$$

$$g + bv_z = C_1 e^{-bt}$$

$$v_z(t) = \frac{C_1}{\beta} m \cdot e^{-\frac{\beta t}{m}} - \frac{mg}{\beta}$$

AB :  $v_z(0) = v_0 = \frac{C_1}{\beta} m - \frac{mg}{\beta}$

$$\Leftrightarrow C_1 = \frac{v_0 \beta}{m} + g$$

$\Leftrightarrow$

$$v_z(t) = \left( v_0 + \frac{mg}{\beta} \right) \cdot e^{-\frac{\beta t}{m}} - \frac{mg}{\beta}$$

2. Integration  $\rightarrow$

$$z(t) = -\frac{m}{\beta} \left( v_0 + \frac{mg}{\beta} \right) \cdot e^{-\frac{\beta t}{m}} - \frac{mgt}{\beta} + C_2$$

AB :  $z(0) = z_0 = -\frac{m}{\beta} \left( v_0 + \frac{mg}{\beta} \right) + C_2$

$\Leftrightarrow$

$$z(t) = z_0 - \frac{mgt}{\beta} + \frac{m}{\beta} \left( v_0 + \frac{mg}{\beta} \right) \left( 1 - e^{-\frac{\beta t}{m}} \right)$$

Diskussion:

(i) Beschleunigung  $a_z(t) = \dot{v}_z = -\frac{\beta}{m} \left( v_0 + \frac{mg}{\beta} \right) \cdot e^{-\frac{\beta t}{m}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

$\rightarrow$  Langzeitverhalten:

$$v_z(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\frac{mg}{\beta} \equiv -v_\infty = konst.$$

$$z(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} z_0 + \frac{v_0 + v_\infty}{b} - v_\infty t$$

} geradlinig, gleichförmige Bewegung

(ii) Kurzzeitverhalten: ( $t \rightarrow 0$ )

benütze 
$$e^{-bt} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b^n}{n!} t^n \approx 1 - bt + \frac{1}{2} b^2 t^2 \pm \dots$$

$$z(t) \approx z_0 - v_{\infty} t + \frac{v_0 + v_{\infty}}{b} (1 - 1 + bt - \frac{1}{2} b^2 t^2 \pm \dots)$$

$$= z_0 - v_0 t - \frac{b}{2} (v_0 + v_{\infty}) t^2$$

für  $v_0 = 0$  
$$z(t) = z_0 - \frac{g}{2} t^2$$

→ ungebremster freier Fall für  $t \rightarrow 0$

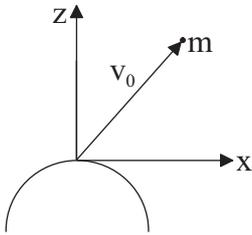
(iii) Reibungsfreier Grenzfall ( $\beta \rightarrow 0$ )

$\xrightarrow{s.(ii)}$  
$$z(t) = z_0 - \frac{g}{2} t^2$$

(iv) Starke Reibung ( $\beta \rightarrow \infty$ )

$$z(t) = z_0$$
 (keine Bewegung im  $\infty$ -zähen Medium)

b) Schiefer Wurf mit Stokes'scher Reibung:



BWGl: 
$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\mathbf{e}_z - \beta\dot{\mathbf{r}}$$

$$\rightarrow \ddot{x} = -b\dot{x} \quad (b = \frac{\beta}{m})$$

$$\ddot{z} = -g - b\dot{z}$$

x-Komponente:

$$\dot{x} = v_x; \frac{dv_x}{dt} = -bv_x \rightarrow \int \frac{dv_x}{v_x} = -b \int dt$$

$$\rightarrow v_x(t) = v_0^x \cdot e^{-bt}$$

$$\xrightarrow{v_x = \dot{x}} x(t) = x(0) + \frac{v_0^x}{b} (1 - e^{-bt})$$

Diskussion:

- (i)  $t \rightarrow \infty$   $x(t) \rightarrow x(0) + \frac{v_0^x}{b} = x_{max}$  Maximale Wurfmasse =  $\frac{v_0^x}{b}$
- (ii)  $t \rightarrow 0$   $x(t) \approx x(0) + v_0^x t \rightarrow$  geradlinig, gleichförmige Bewegung
- (iii)  $\beta \rightarrow 0$   $\rightarrow$  siehe (ii)
- (iv)  $\beta \rightarrow \infty$   $x(t) \rightarrow x_0$

(v) Raumkurve (Orbit):

$$\begin{aligned} x(t) &= \underbrace{x_0}_{=x(0)} + \frac{v_0^x}{b}(1 - e^{-bt}) \\ \Leftrightarrow e^{-bt} &= 1 - \frac{b}{v_0^x}(x - x_0) \\ t &= -\frac{1}{b} \cdot \ln\left(1 - \frac{b}{v_0^x}(x - x_0)\right) \end{aligned}$$

$$z(x) = z_0 + \frac{v_\infty}{b} \cdot \ln\left(1 - \frac{b}{v_0^x}(x - x_0)\right) + \frac{v_0^z + v_\infty}{v_0^x}(x - x_0)$$

c) Freier Fall mit Newton'scher Reibung:

BWGl :

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= -mg\mathbf{e}_z - \gamma v\mathbf{v} \\ \dot{v}_z = \ddot{z} &= -g - c|v_z|v_z \quad (c = \frac{\gamma}{m}) \\ \Leftrightarrow \int \frac{dv_x}{g + c|v_z|v_z} &= -\int dt = -t + konst. \end{aligned}$$

Integrale:

$$\int \frac{dx}{a^2 + |x|x} = \frac{1}{a} \begin{cases} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) & 0 \leq x \\ \operatorname{artanh}\left(\frac{x}{a}\right) & -|a| < x \leq 0 \\ \operatorname{arcoth}\left(\frac{x}{a}\right) & x < -a \end{cases}$$

Näheres siehe Übung 3.3

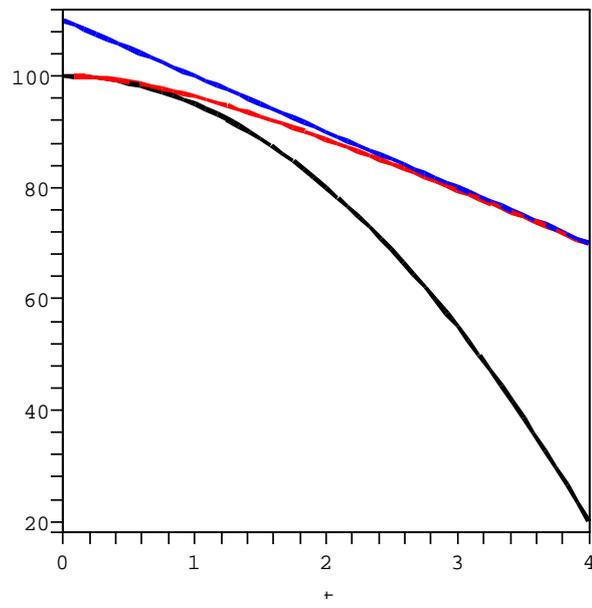
d) Abschließende Bemerkungen:

- (i) Reibungskräfte sind nicht konservativ, sondern dissipativ
- (ii) Allg. E-Satz:  $\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}(T - U) = \mathbf{F}_R \cdot \mathbf{v} = -F_R \cdot v < 0$   
 $\rightarrow$  mechanische Energie nimmt ab (Umwandlung in Wärme)
- (iii)  $A_R = -\int_{t_0}^t F_R(\mathbf{v}(t'), t')v(t') dt'$  (wegunabhängig)
- (iv) Statt Potential kann man "Dissipationsfunktion" angeben (s. Kap. 4)

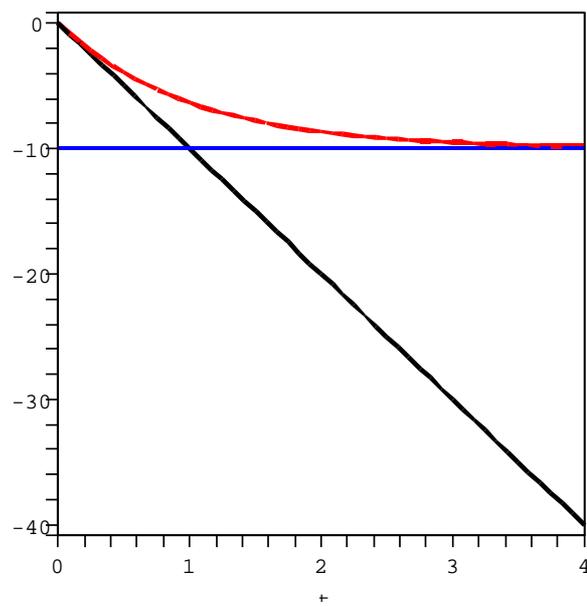
### 3.1.3 Diagramme

$v_0 = 0$ :

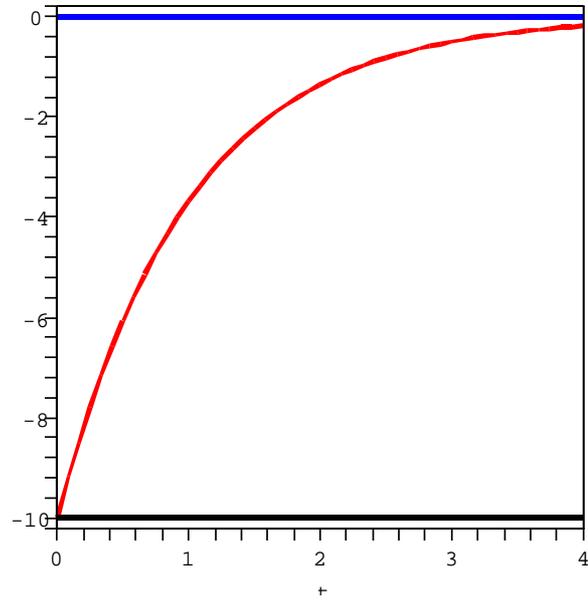
z-t-Diagramm



v-t-Diagramm

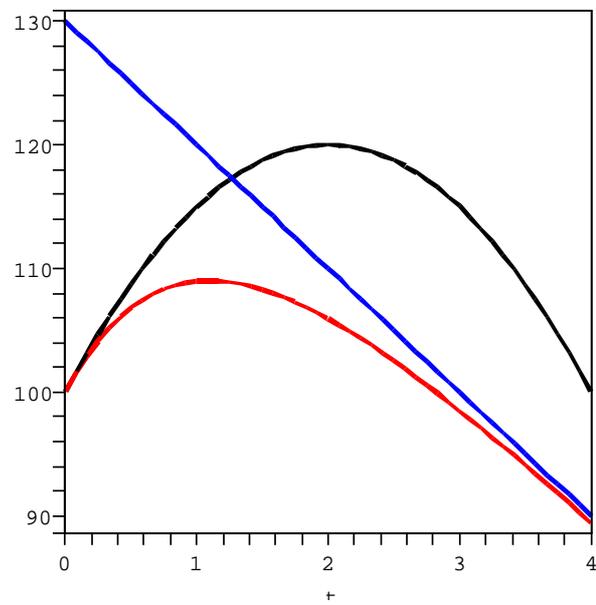


a-t-Diagramm

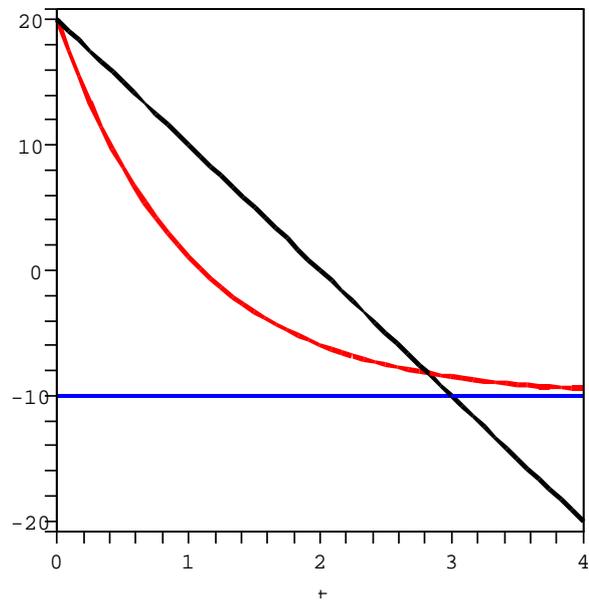


$v_0 = +20$ :

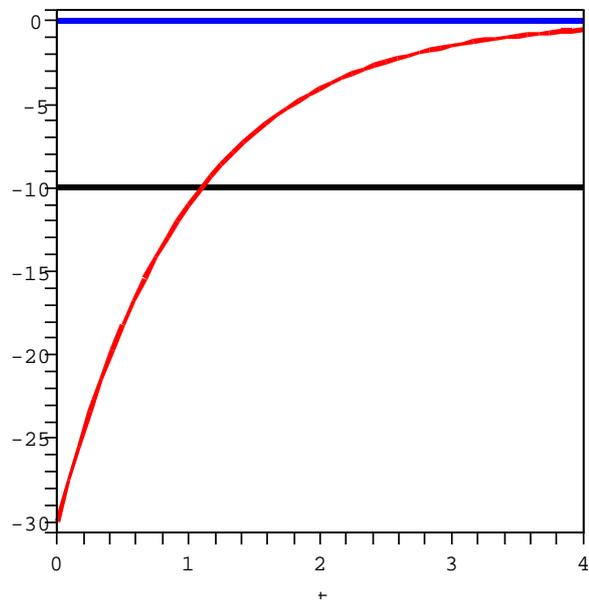
z-t-Diagramm



v-t-Diagramm

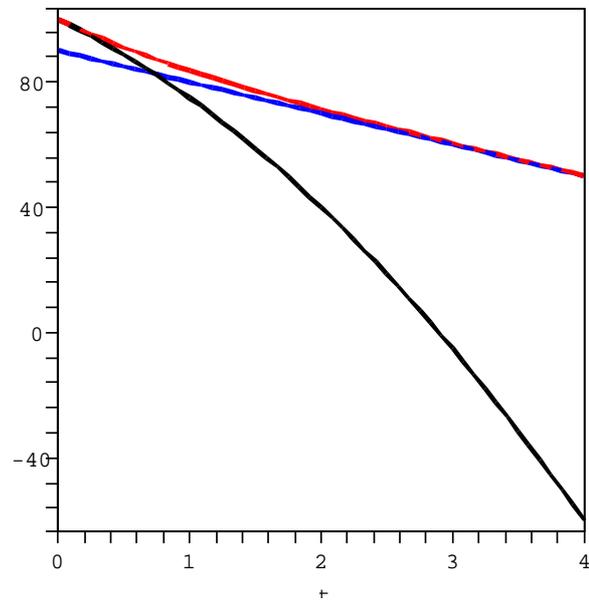


a-t-Diagramm

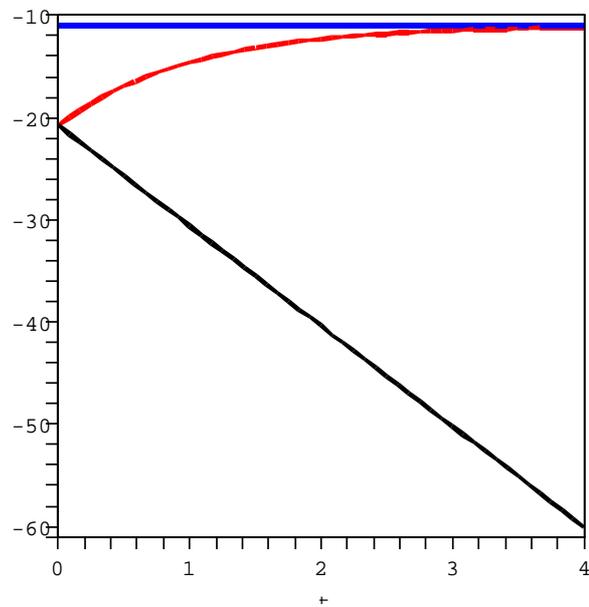


$v_0 = -20$ :

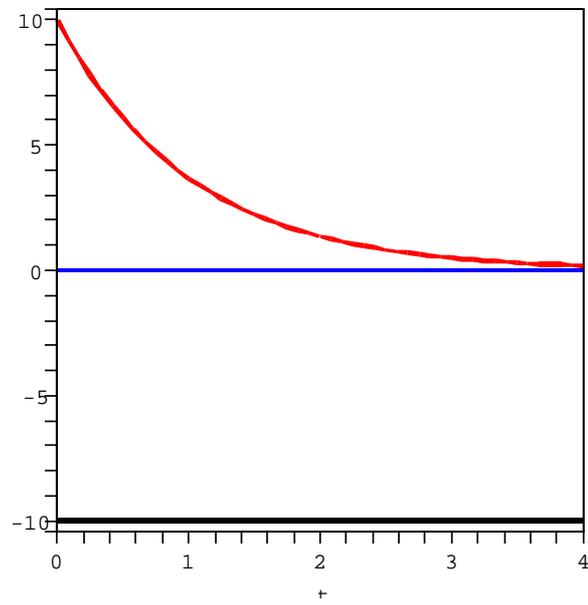
z-t-Diagramm



v-t-Diagramm

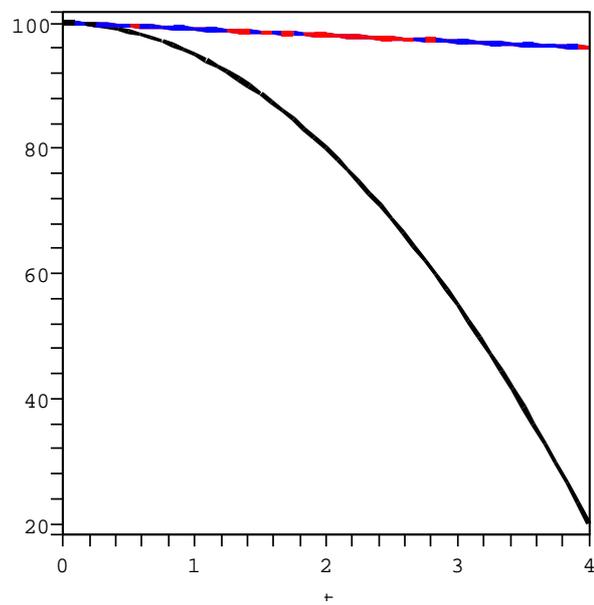


a-t-Diagramm

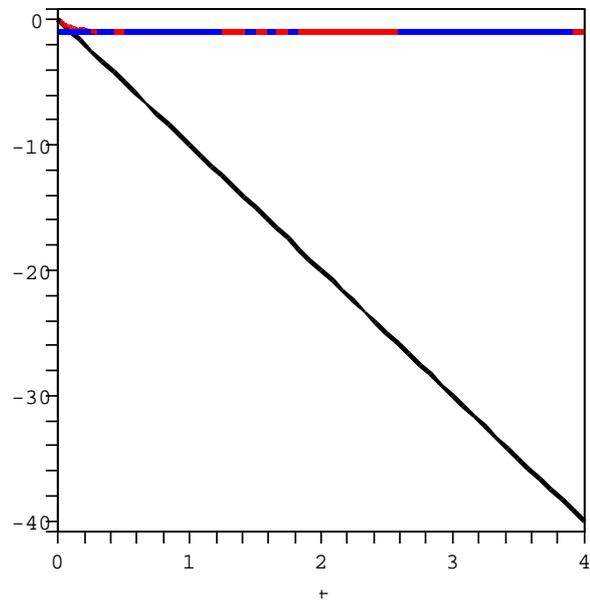


$v_0 = 0$ , starke Reibung:

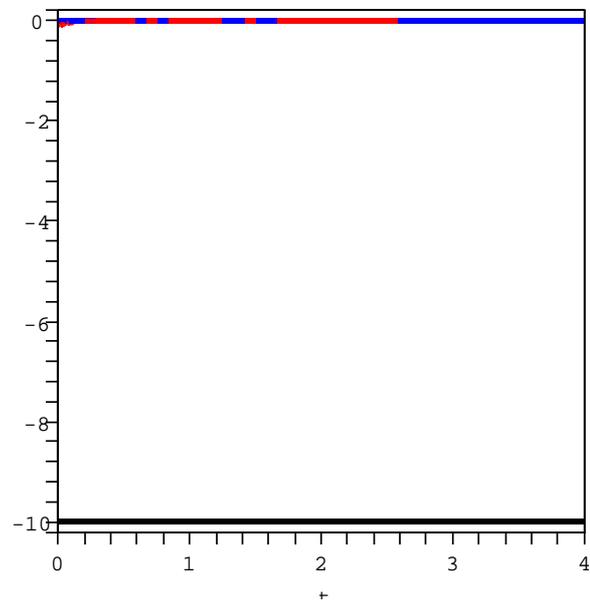
z-t-Diagramm



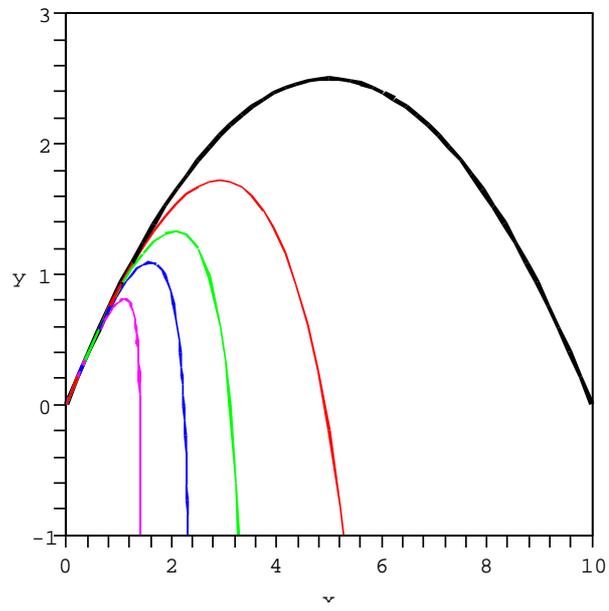
v-t-Diagramm



a-t-Diagramm



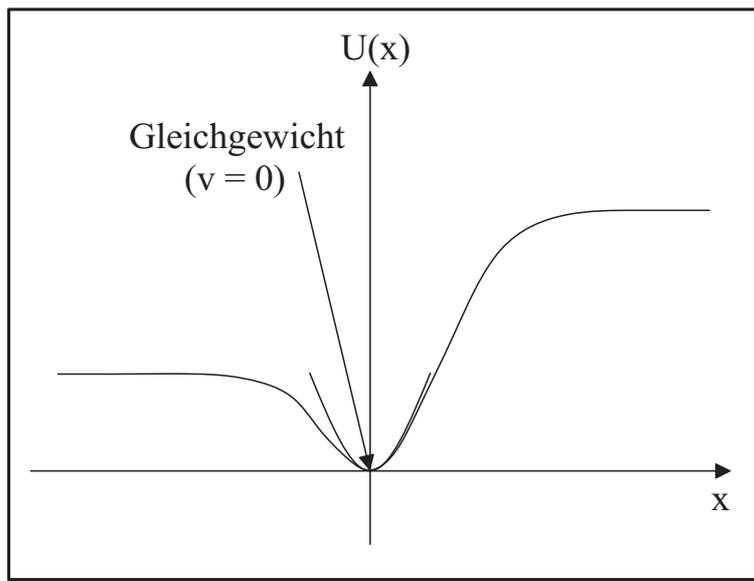
Raumkurven



## 3.2 Oszillatorprobleme I

### 3.2.1 Motive für das Studium des harmonischen Oszillators

- (i) Beschreibt Bewegungen in der Umgebung eines stabilen Gleichgewichts



Taylorentwicklung von  $U(x)$  um  $x = 0$ :

$$\begin{aligned}
 U(x) &= \underbrace{U(0)}_0 + \underbrace{\frac{dU}{dx}\bigg|_{x=0}}_0 x + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dx^2}\bigg|_{x=0} x^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3U}{dx^3}\bigg|_{x=0} x^3 + \dots \\
 &= a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \\
 &\longrightarrow F(x) = -\frac{dU}{dx} = -2a_2 x - 3a_3 x + \dots
 \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$  1. Näherung:  $U(x) \propto x^2$ ,  $F(x) \propto -x \longrightarrow$  Hooke'sches Gesetz

Einige Realisierungen:

$$\begin{array}{l}
 \text{klassische Oszil.} \left\{ \begin{array}{l} \text{Mechanik : Feder – und Fadenpendel} \\ \text{Elektrodynamik : Schwingkreis} \end{array} \right. \\
 \text{QM Oszil.} \left\{ \begin{array}{l} \text{Molekülphysik : 'Vibrationen' der Kerne gegeneinander} \\ \quad \quad \quad \text{(z.B. 2 – atomiges Molekül)} \\ \text{FK – Physik : Gitterschwingungen} \\ \text{Kernphysik : Vibrationen deformierter Kerne} \end{array} \right.
 \end{array}$$

- (ii) Kann in KM und QM exakt gelöst werden (und ist Grundlage der sog. 'Feldquantisierung' in der 'höheren' QT)

### 3.2.2 Der gedämpfte harmonische Oszillator (1-dim.)

$$\text{BWGl:} \quad m\ddot{x} = \underbrace{-kx}_{\text{Hooke'sches Gesetz}} + \underbrace{-\beta\dot{x}}_{\text{Reibung nach Stokes}}$$

$$b = \frac{1}{2} \frac{\beta}{m}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{Eigenfrequenz})$$

$$\hookrightarrow \boxed{\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

$\hookrightarrow$  homogene, lineare DGl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} \text{Lösungsansatz:} \quad x(t) &= e^{\lambda t} \\ \longrightarrow (\lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} &= 0 \\ \text{'charakteristische Gleichung':} \quad 0 &= \lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2 \\ \longrightarrow \lambda_{1/2} &= -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2} \end{aligned}$$

Fall 1:  $\omega_0^2 > b^2$  Schwache Dämpfung/Schwingfall

$$\text{Def.:} \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} \quad \epsilon \Re \rightarrow \lambda_{1/2} = -b \pm i\omega_1$$

Allg. Lsg.:  $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$   
(Linearkombination von zwei linear unabhängigen Lösungen)

$$\hookrightarrow x(t) = e^{-bt} \cdot (C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t})$$

Grenzfall  $b=0$ :  $\omega_1 = \omega_0$

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \\ &= C_1 (\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t) + C_2 (\cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t) \\ &= (C_1 + C_2) \cos \omega_0 t + i(C_1 - C_2) \sin \omega_0 t \\ &= A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad A, B \in \Re \iff C_2 = C_1^* \\ &= D \sin(\omega_0 t + \delta) \\ \longrightarrow D &= \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan \varphi = \frac{A}{B} \end{aligned}$$

$b \neq 0$  : reelle Form der allg. Lösung

$$x(t) = De^{-bt} \sin(\omega_1 t + \delta)$$

$$\text{ABs : } \left. \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array} \right\} \longrightarrow x(t) = \frac{v_0}{\omega_1} e^{-bt} \sin \omega_1 t \xrightarrow{b \rightarrow 0} \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} > \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0$  : Gedämpfte Schwingung ist streng periodisch, wobei Periode größer ist als im ungedämpften Fall

Fall 2:  $\omega_0^2 < b^2$  Starke Dämpfung/Kriechfall

$$\Re \ni \lambda_{1/2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2} < 0$$

$$\text{ABs : } \left. \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array} \right\} \longrightarrow x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{b^2 - \omega_0^2}} e^{-bt} \sinh\left(\sqrt{b^2 - \omega_0^2} t\right)$$

(wobei  $\sinh y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ )

Fall 3:  $\omega_0^2 = b^2$  Aperiodischer Grenzfall

$$\lambda_{1/2} = -b \quad \in \Re$$

Zum Auffinden einer 2. linear unabhängigen Lsg. betrachte DGL für  $\omega^2 = b^2$ :

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + b^2x = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Ansatz : } \quad x(t) &= R(t)e^{-bt} \\ \dot{x} &= (\dot{R} - bR)e^{-bt} \\ \ddot{x} &= (\ddot{R} - 2b\dot{R} + b^2R)e^{-bt} \\ \xrightarrow{\text{einsetzen}} 0 &= (\ddot{R} - 2b\dot{R} + b^2R + 2b\dot{R} - 2b^2R + b^2R)e^{-bt} \\ \ddot{R} = 0 &\longrightarrow R(t) = C_1 + C_2t \\ \hookrightarrow x(t) &= (C_1 + C_2t)e^{-bt} \end{aligned}$$

$$\text{ABs : } \left. \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array} \right\} \longrightarrow x(t) = v_0 t e^{-bt}$$

Energie des gedämpften harmonischen Oszillators:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(T + U) = \mathbf{F}_R \cdot \mathbf{v} = -F_R \cdot \dot{x} = -2mb\dot{x}^2$$

$$\hookrightarrow E(t) = E(0) - 2mb \int_0^t \dot{x}^2 dt'$$

(Näheres siehe Übung 5.1)

### 3.2.3 Der getriebene harmonische Oszillator - erzwungene Schwingungen

$$\text{BWGl : } \quad \ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

$\implies$  inhomogene DGl 2. Ordnung mit konstantem Koeffizienten

Allg. Lsg. der inhomogenen DGl = allg. Lsg. der homogenen DGl + eine spezielle Lsg. der inhomogenen DGl

$$x(t) = x_{\text{hom}}(C_1, C_2, t) + x_{\text{part}}(t)$$

a) Harmonische Anregung

$$\begin{array}{ll} \text{Wenn} & f(t) = f_0 e^{i\omega t} \quad (f_0 \in \mathfrak{R}) \\ \text{und} & z(t) = x(t) + iy(t) \\ \longrightarrow & \ddot{z} + 2b\dot{z} + \omega_0^2 z = f_0 e^{i\omega t} \\ & \ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t) \end{array}$$

$$\text{Ansatz : } \quad z_{\text{part}}(t) = C e^{i\omega t}$$

$$\longrightarrow \left[ C(-\omega^2 + 2ib\omega + \omega_0^2) - f_0 \right] e^{i\omega t} = 0$$

$$\longrightarrow C = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega} \equiv f_0 \chi(\omega)$$

$\chi$ : "(dynamische) Suszeptibilität", beschreibt die Antwort des Systems

$$\begin{array}{ll} \chi(\omega) & = |\chi(\omega)| e^{-i\phi} = A(\omega) e^{-i\phi} \\ \hookrightarrow z_{\text{part}}(t) & = A(\omega) e^{-i\phi} f_0 e^{i\omega t} = A(\omega) f_0 e^{i(\omega t - \phi)} \\ x_{\text{part}}(t) & = A(\omega) f_0 \cos(\omega t - \phi) \\ \longrightarrow A(\omega) & = \left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2 \omega^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ \tan \phi & = \frac{2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{NR:} \quad \chi &= \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2ib\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2} \\ |\chi|^2 &= \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2\right]^2} = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2} \\ \tan \phi &= \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = -\frac{\text{Im } \chi}{\text{Re } \chi} = \frac{2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

Diskussion:

- (i) Endgültige Lösung  $x(t) = x_{norm}(C_1, C_2, t) + x_p(t)$  (zu vorgegebenen ABs) i.a. kompliziert
- (ii)  $x(t) \xrightarrow{\text{gro\ss e } t} x_p(t)$  (falls  $b \neq 0$ )  $\rightarrow$  Oszillator folgt der harmonischen Anregung mit Phasenverschiebung  $\phi$
- (iii)  $b = 0$ : ungedämpfter Oszillator

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \left[|\omega_0^2 - \omega^2|\right]^{-1}, \quad \phi(\omega) = 0 \\ x(t) &= D \cos(\omega_0 t + \delta) + A(\omega) f_0 \cos \omega t \\ \text{ABs:} \quad x(0) &= \dot{x}(0) = 0 \implies (D = -A(\omega) f_0; \delta = 0) \\ x(t) &= A(\omega) f_0 (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \end{aligned}$$

Spezialfall:  $\omega_0 = \omega + \Delta\omega; \quad 0 < \Delta\omega \ll \omega$

Für  $\Delta\omega t \ll 1$ :

$$\begin{aligned} \cos \omega t - \cos \omega_0 t &= \cos \omega t - \cos(\omega + \Delta\omega)t \\ &= \cos \omega t - \cos \omega t \cos \Delta\omega t + \sin \omega t \sin \Delta\omega t \\ &\approx (\Delta\omega t) \sin \omega t \end{aligned}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{(\omega + \Delta\omega)^2 - \omega^2} = \frac{1}{2\omega\Delta\omega + \Delta\omega^2} \approx \frac{1}{2\omega\Delta\omega}$$

$\rightarrow x(t) \stackrel{\Delta\omega t \ll 1}{\approx} \frac{f_0}{2\omega} t \cdot \sin \omega t$  Amplitude wächst linear an  $\rightarrow$  (Resonanz)

Resonanzkatastrophe:  $A(\omega) \xrightarrow{\Delta\omega \rightarrow 0} 0$

- (iv) Kurvendiskussion für  $A(\omega)$  (für  $b \neq 0$ )

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \\ A(\omega = 0) &= \frac{1}{\omega_0^2} \end{aligned}$$

$$A(\omega) \xrightarrow{\omega \gg \omega_0} \frac{1}{\sqrt{(\omega^4 + 4b^2\omega^2)}} \rightarrow \frac{1}{\omega^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{aligned} \text{Extrema?} \quad \frac{dA}{d\omega} &= 0 \iff \omega[\omega_0^2 - \omega^2 - 2b^2] = 0 \\ \longrightarrow (\omega_1 = 0); \quad \omega_2 &= \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2} \equiv \omega_R \longrightarrow \text{Maximum} \\ \longrightarrow A(\omega_R) &= \frac{1}{2b\sqrt{\omega_0^2 - b^2}} \end{aligned}$$

(v) Phasenfunktion  $\phi(\omega)$

$$\left. \begin{aligned} \phi(\omega) &= \arctan\left(\frac{2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(\omega = \omega_0) &= \frac{\pi}{2} \\ \phi(\omega) &\xrightarrow{\omega \gg \omega_0} \pi \end{aligned} \right\} 0 \leq \phi \leq \pi$$

→ Oszillator läuft Anregung hinterher ( $x_p \propto \cos(\omega t - \phi)$ )

b) Allgemeine periodische Anregung ( $F(t + T) = F(t)$ )  
 Superpositionsprinzip: Seien  $x_n(t)$  Partikulärlösungen der DGL

$$\ddot{x}_n + 2b\dot{x}_n + \omega_0^2 x_n = f_n(t) \quad (n = 1, \dots, N)$$

und

$$F(t) = \sum_{n=1}^N f_n(t) \implies x(t) = \sum_{n=1}^N x_n(t)$$

löst die DGL  $\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$

Insbesondere, falls:

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n=1}^N f_n(t) = \sum_{n=1}^N f_0^{(n)} \cos(\omega_n t) \\ \implies x_p(t) &= \sum_{n=1}^N A(\omega_n) f_0^{(n)} \cos(\omega_n t - \phi_n) \\ A(\omega_n) &= \left[ (\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4b^2\omega_n^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ \tan \varphi_n &= \frac{2b\omega_n}{\omega_0^2 - \omega_n^2} \end{aligned}$$

Allgemeinere Aussage: Eine "hinreichend-gutartige" periodische Funktion  $F(t+T) = F(t)$  kann als Fourier-Reihe dargestellt werden:

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

$$\Leftrightarrow c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(t) e^{-in\omega t} dt$$

Bemerkungen:

(i)

$$\sum_{n=-N}^{n=N} c_n e^{in\omega t} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} F(t)$$

Welche Art von Konvergenz wird gefordert?  $\longleftrightarrow$  Anforderungen an  $F(t)$

a) Punktweise Konvergenz

$$\forall t \in \mathfrak{R}; \quad \epsilon > 0; \quad \exists N = N(t, \epsilon) : |f_n(t) - F(t)| < \epsilon; \quad \forall n \geq N$$

b) Gleichmäßige Konvergenz

$$\forall t \in \mathfrak{R}; \quad \epsilon > 0; \quad \exists \underline{N} = N(\epsilon) : |f_n(t) - F(t)| < \epsilon; \quad \forall n \geq N$$

ist gegeben, falls  $F(t)$  stückweise stetig differenzierbar

c) Konvergenz im quadr. Mittel

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |f_n(t) - F(t)|^2 dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

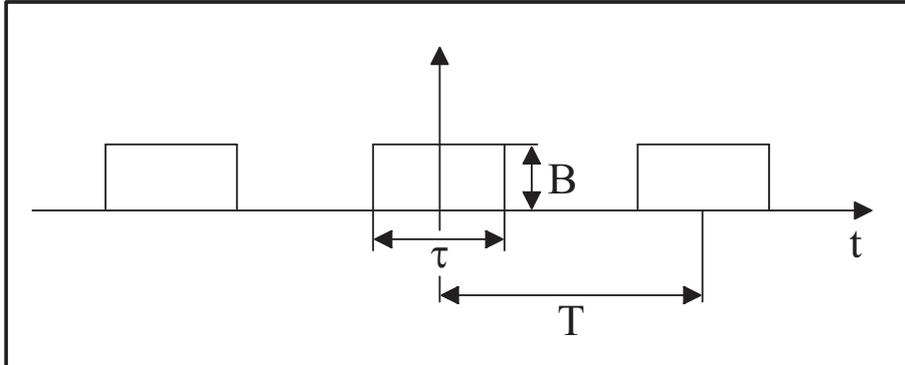
ist gegeben, falls  $F(t)$  (Riemann-) integrierbar ist.

Den Fourier-Reihen ist die Konvergenz im quadr. Mittel i.a. besser angepasst. (siehe hierzu [3], Kap. 23)

(ii) Es existieren alternative Entwicklungen nach "vollständigen Funktionssystemen"  $F(t) = \sum_n^\infty a_n g_n(t)$ , wobei  $\{g_n\}$  z.B.:

- \* trigonometrische Fkt. ( $\rightarrow$  Fourier Reihe)
- \* Legendre Polynome
- \* Bessel Fkt.

$\longrightarrow$  spezielle Funktionen der (mathematischen) Physik

(iii) Beispiel: Zug von Rechteckpulsen

Fourier-Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} F(t) e^{-in\omega t} dt \\
 &= \frac{B}{T} \frac{i}{n\omega} e^{-in\frac{\pi}{T}t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\
 &= \frac{B}{n\pi} \frac{i}{2} \left( e^{-in\frac{\pi}{T}\tau} - e^{in\frac{\pi}{T}\tau} \right) \\
 &= \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \cdot \frac{B}{n\pi}
 \end{aligned}$$

beachte :  $c_0 = \frac{B\tau}{T}$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow F(t) &= \frac{B}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi\tau}{T}}{n} e^{un\omega t} \\
 &= B \left\{ \frac{\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \cos(n\omega t) \right\}
 \end{aligned}$$

→ reelle Lösung der Oszillatorgleichung:

$$\begin{aligned}
 x_p(t) &= \frac{B\tau}{T\omega_0^2} + B \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \cos(n\omega t - \varphi_n) \\
 A_n &= \left[ \left( \omega_0^2 - (n\omega)^2 \right)^2 + 4b^2(n\omega)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\
 \tan \varphi &= \frac{2nb\omega}{\omega_0^2 - n^2\omega^2}
 \end{aligned}$$

- c) Nicht-periodische Anregung: Fourier-Integral  
 ◁ Heuristische Argumente zur Konstruktion:

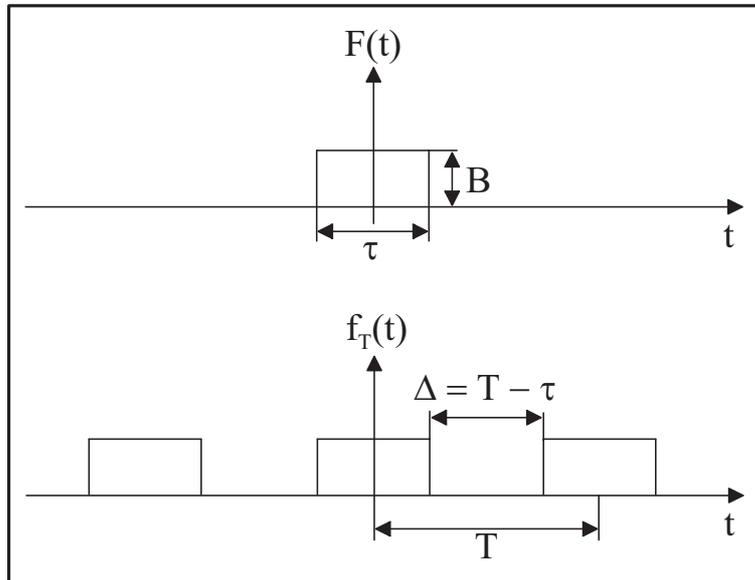


Abbildung 3.4: Einzelner Rechteckpuls

$$\implies F(t) = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} f_T(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) \Big|_{\tau = \text{konst.}}$$

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-in\omega t} dt$$

Umschreibung:

$$\begin{aligned} \omega_n &:= n\omega \\ \Delta\omega_n &:= \omega_n - \omega_{n-1} = \omega = \frac{2\pi}{T} \iff T = \frac{2\pi}{\Delta\omega_n} \\ \tilde{c}_n &:= Tc_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \quad f_T(t) &= \frac{1}{T} \sum_n \tilde{c}_n e^{i\omega_n t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n e^{i\omega_n t} \Delta\omega_n \\ T \rightarrow \infty; \Delta\omega_n \rightarrow 0 &\quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ \tilde{c}_n &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-i\omega_n t} dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \equiv \tilde{F}(\omega) \end{aligned}$$

$\implies$  **Fourier-Transformations-Paar**  $F(t) \longleftrightarrow \tilde{F}(\omega)$

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ \tilde{F}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

Hinreichende (Dirichlet) Bedingungen für die Existenz der Fourier-Transformation (FT) von der Funktion  $F(t)$

- (i)  $F(t)$  stückweise stetig und differenzierbar
- (ii)  $\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)| dt < \infty$

Bemerkungen:

- (i) Bedingungen sind nicht notwendig
- (ii) alternative Formulierung

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega & \left( \tilde{F}(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{\sqrt{2\pi}} \right) \\ \tilde{F}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

- (iii) Erweiterung auf höhere Dimensionen

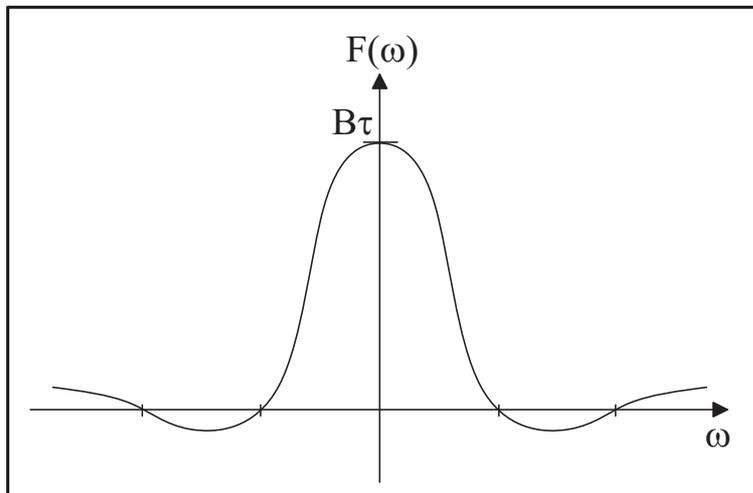
$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{F}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k \\ \tilde{F}(\mathbf{k}) &= \int F(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3r \end{aligned}$$

Beispiele:

(i) Rechteckimpuls (siehe Skizze 3.4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)| dt = B \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} dt = B\tau < \infty \quad (\text{Dirichlet - Bedingung erfüllt})$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt = B \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i\omega t} dt \\ &= -\frac{B}{\omega} \left( e^{-i\omega \frac{\tau}{2}} - e^{i\omega \frac{\tau}{2}} \right) \\ &= B\tau \left( \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \right) \end{aligned}$$



(ii)  $F(t) = \delta(t)$

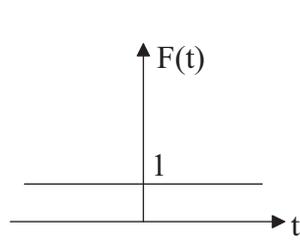
$$\begin{aligned} \longrightarrow F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= e^{-i\omega 0} = 1 \end{aligned}$$

FT - Paar	$\delta(t) \longleftrightarrow$	1
-----------	---------------------------------	---

Umkehrung: Nützliche Integraldarstellung der  $\delta$ -Funktion

$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt$
---

(iii)



$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)| dt \longrightarrow \infty$$

Dirichlet-Bedingung verletzt, aber  $FT$  existiert:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt \\ &\stackrel{x=-t}{=} - \int_{\infty}^{-\infty} e^{-i\omega x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dx = 2\pi\delta(\omega) \\ &= 2\pi\delta(-\omega) \implies \delta(\omega) = \delta(-\omega) \end{aligned}$$

FT – Paar  $1 \iff 2\pi\delta(\omega)$

(iv)  $F(t) = e^{i\omega_0 t}$

$$\int_{-A}^A |F(t)| dt = \int_{-A}^A dt \xrightarrow{A \rightarrow \infty} \infty$$

Dirichlet-Bedingung verletzt, aber  $FT$  existiert:

$$\implies F(\omega) = \int e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

(v) Beliebige periodische Funktion

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \\ \implies F(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{in(\omega_0 - \omega)t} dt \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned}$$

Anwendung auf komplexe Oszillorgleichung

$$\ddot{z} + 2b\dot{z} + \omega_0^2 z = F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Ansatz:

$$z_P(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\begin{aligned} \implies & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) \left( \frac{d^2}{dt^2} + 2b \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ \iff & \int_{-\infty}^{\infty} \left[ (-\omega^2 + 2ib\omega + \omega_0^2) Z(\omega) - F(\omega) \right] e^{i\omega t} d\omega = 0 \\ \iff & \left[ (-\omega^2 + 2ib\omega + \omega_0^2) Z(\omega) - F(\omega) \right] = 0 \\ \iff & Z(\omega) = \frac{F(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega} = F(\omega) \chi(\omega) \end{aligned}$$

(wobei  $\chi(\omega)$  die auf in 3.2.3 eingeführte dynamische Suszeptibilität ist)

$$z_p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega} e^{i\omega t} d\omega$$

reelle Lösung (falls  $F(\omega) \in \Re$ )  $\implies x_p(t) = \operatorname{Re} z_p(t)$

### Zusammenfassung (FT-Methode):

Rezept:

- (i) Berechne zu geg. Inhomogenität  $F(t)$  die Fourier-Trafo.  $F(\omega)$
- (ii) Berechne  $z_p(t)$  als Fourierintegral (inverse Fourier-Trafo zu  $F(\omega)\chi(\omega)$ )

Voraussetzungen der Methode:

- (i)  $F(t)$  ist als Fourierintegral darstellbar
  - (ii) Partikulärlösung bekannt für harmonische Anregung  $\chi(\omega)$
  - (iii) Superpositionsprinzip (lineare DGL)
- d) Allgemeine Anregung: Methode der Green'schen Funktion  
(Erarbeitet von Jan Metje)

zur Diskussion steht:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$$

Aus der Vorlesung ist die partikuläre Lösung für eine harmonische Anregung bekannt. Betrachte jetzt: beliebiges  $F(t)$

Es gilt:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t') F(t') dt'$$

(Zur  $\delta$ -Funktion siehe Kap. 7.1)

$$\triangleleft \quad \ddot{G}(t) + 2b\dot{G}(t) + \omega_0^2 G(t) = \frac{1}{m}\delta(t)$$

$G(t)$  ist definiert als eine Lösung dieser DGL. Genaueres Aussehen wird später untersucht.

Ansatz : 
$$x_{part}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')F(t') dt'$$

Zur Überprüfung jeweils ein und zweimal ableiten:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(t-t')F(t') dt' \\ \ddot{x}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{G}(t-t')F(t') dt'\end{aligned}$$

Einsetzen in DGL liefert:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \ddot{G}(t-t') + 2b\dot{G}(t-t') + \omega_0^2 G(t-t') \right) F(t') dt' \\ &= \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t') F(t') dt' \\ &= \frac{1}{m} F(t)\end{aligned}$$

Korrektur Ansatz, da DGL erfüllt ist. Weiterhin gibt es zunächst keine Aussage über die Gestalt von  $G$ . Zusammenhang erlaubt partikuläre Lösung für beliebiges  $F$  bei Kenntnis von  $G(t)$

Vgl. direkte Methode:

Für jedes  $F(t)$  muss part. Lsg.  $x_{part}(t)$  gesondert bestimmt werden  $\implies G(t) = \text{Green'sche Funktion}$

Gestalt von  $G$ :

betrachte folgenden Fall: Einheitskraftstoß

Resultat:  $t < 0$  Oszillator in Ruhe

$t = 0$  Kraftwirkung

$t > 0$  harmonisch gedämpfter Oszillator

Alle anderen Fälle (z.B. Einheitsstoß am Schwingenden Oszillator) sind durch Superposition zu erhalten

Was gilt demzufolge für  $G(t)$

$$t < 0 \quad G(t) := G^-(t) \equiv 0$$

$G(t)$  ist Lösung der Schwingungsgleichung,  $t < 0$  keine Schwingung

$$t > 0 \quad G(t) := G^+(t)$$

für diesen Zeitraum ist  $G(t)$  Lösung der harmonischen DGL.  $G^+(t)$  ist nicht mehr frei wählbar, da  $G^+(t)$  die ABs erfüllen muss, die der Kraftstoß hervorgerufen hat

Vgl. Kausalitätsprinzip: keine Wirkung früher als Ursache

Integration der DGL für  $G(t)$  über  $[-\tau, \tau]$ , Grenzwert für  $\tau \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \dot{G}(\tau) - \dot{G}(-\tau) + 2b(G(\tau) - G(-\tau)) \right\} + \omega_0^2 \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau}^{\tau} G(t) dt &= \frac{1}{m} \\ \dot{G}^+(0) + 2bG^+(0) + \omega_0^2 \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\tau} G^+(t) dt &= \frac{1}{m} \end{aligned}$$

$G(t)$  soll stetig sein (Teilchenbahnen sind immer stetig)

$$\implies G^+(0) = 0$$

$$\implies \text{Integral verschwindet}$$

Es bleibt:

$$\dot{G}^+(0) = \frac{1}{m}$$

Damit haben wir zwei ABs für homogene DGLs erhalten:  
allgemeine Lsg.:

$$\implies G(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} & t > 0 \end{cases}$$

einsetzen der ABs:

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2 \implies -C_1 = C_2 \\ \frac{1}{m} &= C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 \\ &= C_1 (\lambda_1 - \lambda_2) \\ \implies C_1 &= \frac{1}{m(\lambda_1 - \lambda_2)}; \quad C_2 = -\frac{1}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \end{aligned}$$

$$\implies G(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{1}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) & t \geq 0 \end{cases}$$

stetig in  $t = 0$  + differenzierbar (Ableitung nicht stetig)

Bestimmung der partikulären Lösung  $x_{part}(t)$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')F(t') dt' = \int_{-\infty}^t G^+(t-t')F(t') dt'$$

Substitution  $t'' = t - t'$

$$x(t) = \int_0^\infty G^+(t'')F(t-t'') dt''$$

Anwendung für harmonisches  $F(t)$ :

Ansatz:  $F(t) = f \cos(\omega t) = \frac{f}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$

Einsetzen in  $x(t)$  liefert:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{f}{2m(\lambda_1 - \lambda_2)} \int_0^\infty (e^{\lambda_1 t'} - e^{\lambda_2 t'}) (e^{i\omega(t-t')} - e^{-i\omega(t-t')}) dt' \\ &= \frac{f}{2m(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[ e^{i\omega t} \int_0^\infty (e^{(\lambda_1 - i\omega)t'} - e^{(\lambda_2 - i\omega)t'}) dt' \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\omega t} \int_0^\infty (e^{(\lambda_1 + i\omega)t'} - e^{(\lambda_2 + i\omega)t'}) dt' \right] \\ &= \frac{f}{2m(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[ e^{i\omega t} \left( \frac{1}{\lambda_1 - i\omega} \left( \lim_{a \rightarrow \infty} e^{(\lambda_1 - i\omega)a} - 1 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\lambda_2 - i\omega} \left( \lim_{a \rightarrow \infty} e^{(\lambda_2 - i\omega)a} - 1 \right) \right) + e^{-i\omega t} \left( \frac{1}{\lambda_1 + i\omega} \left( \lim_{a \rightarrow \infty} e^{(\lambda_1 + i\omega)a} - 1 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\lambda_2 + i\omega} \left( \lim_{a \rightarrow \infty} e^{(\lambda_2 + i\omega)a} - 1 \right) \right) \right] \end{aligned}$$

da  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  negativ sind existiert der Grenzwert

$$x(t) = \frac{f}{2m(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[ e^{i\omega t} \left( \frac{1}{\lambda_2 - i\omega} - \frac{1}{\lambda_1 - i\omega} \right) + e^{-i\omega t} \left( \frac{1}{\lambda_2 + i\omega} - \frac{1}{\lambda_1 + i\omega} \right) \right]$$

Weiterverarbeitung liefert dasselbe Resultat wie die direkte Lösung aus Kap. 3.2.3 a)

### Zusammenfassung:

Voraussetzung der Methode:

- (i)  $F(t)$  ist als 'Faltungsintegral' darstellbar:

$$F(t) = \int_{-\infty}^\infty F(t')\delta(t-t') dt'$$

- (ii) Partikulärlösung der DGL bekannt für  $\delta$ -Anregung  
(= Green'sche Fkt.  $G(t)$ )

(iii)

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')F(t') dt'$$

Rezept: (für beliebig lineare DGL)

- (i) Bestimme  $G(t)$  (siehe Voraus. (ii))
- (ii) berechne  $x_p(t)$  (gemäß (iii))

e) Kombination der Fourier- und Green's-Funktions-Methoden

$$\triangleleft \quad \ddot{G} + 2b\dot{G} + \omega_0^2 G = \frac{1}{m}\delta(t)$$

$$\underline{\text{Ansatz}}: \quad G(t) = \frac{1}{2\pi} \int G(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\text{benutze:} \quad \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega t} d\omega$$

$$\hookrightarrow \quad \int \left[ G(\omega) \left\{ \frac{d^2}{dt^2} + 2b \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right\} e^{i\omega t} - \frac{1}{m} e^{i\omega t} \right] d\omega = 0$$

$$\iff \quad \int \left[ \left( -\omega^2 + 2ib\omega + \omega_0^2 \right) G(\omega) - \frac{1}{m} \right] e^{i\omega t} d\omega = 0$$

$$\iff \quad mG(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega} \equiv \chi(\omega)$$

FT der Green'schen Funktion  $\hat{=}$  dyn. SuszeptibilitätRezept:

- (i) Berechne  $G(t) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega} d\omega$   
(Mathematische Hilfsmittel: Residuensatz der Funktionstheorie)
- (ii)  $x_p(t)$  (wie zuvor)

Diese Technik ist verallgemeinerbar auf andere DGLs und ein beliebtes Verfahren in der Elektrodynamik + Quantenmechanik.

# Kapitel 4

## Hamilton'sches Prinzip und Lagrange'sche Mechanik

Gründe für diese Formulierung der KM

Praxis: vorteilhaft für Bewegungsprobleme mit (geometrischen) Einschränkungen (Zwangsbedingungen)

Theorie: Einführung eines übergeordneten "Wirkungsprinzips"

### 4.1 Das Hamilton'sches Prinzip der stationären Wirkung (1823)

Die Bewegung eines (konservativen) mechanischen Systems von einer geg. Anfangs- zu einer geg. Endkonfiguration zwischen den Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  verläuft so, dass das Integral

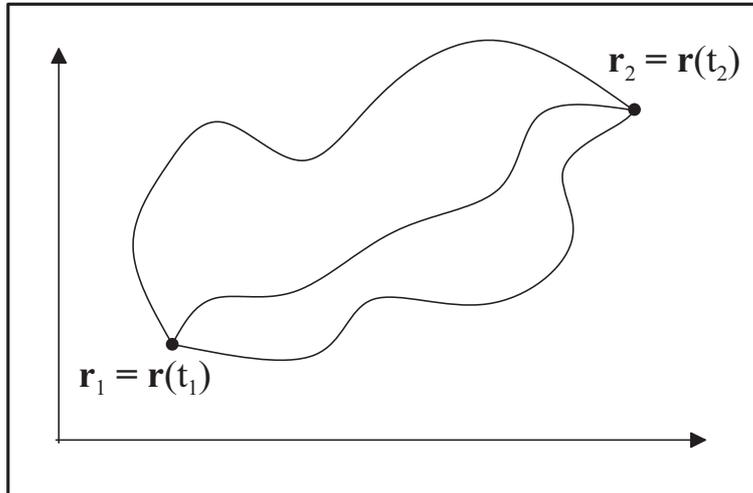
$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U - V) dt$$

'stationär' ist. ( $\delta S = 0$ )

Bemerkungen:

- (i)  $L = T - U - V$  "Lagrange Funktion" (Dimension einer Energie)
- (ii)  $S$ : 'Wirkung' (Energie  $\times$  Zeit) (engl. 'action')
- (iii) Stationarität der Wirkung  $\triangleq$  in 1. Näherung ändert sich der Wert von  $S$  nicht bei 'kleinen' Variationen der durchlaufenen Bahn  
(Analogie:  $f'(x_0) = 0 \triangleq$  in 1. Näherung ändert sich der Wert von  $f(x)$  nicht in der Umgebung von  $x_0$ )

$\delta S = 0$  ist notwendige Bedingung für Extremum von  $S$ . I.d.R. folgt aus  $\delta S = 0$  ein Minimum ("Prinzip der kleinsten Wirkung"), d.h. bzgl. der tatsächliche durchlaufenen Bahn ist  $S$  (i.d.R.) minimal



- (iv) HP ist ein "ökonomisches" Prinzip  
Historische + Philosophische Andeutungen: [9], [12] § 33 + 37
- (v) HP ist Integralprinzip
- (vi) HP ist fundamentales Ordnungsprinzip der modernen Physik
- (vii) Zu gegebener Lagrange-Funktion sowie Anfangs- und Endkonfiguration kann die tatsächliche Bewegung eines mechanischen Systems aus dem HP bestimmt werden

### 4.1.1 Grundzüge der Variationsrechnung

Gegeben:  $f(x, \dot{x}, t)$  (2 mal stetig partiell differenzierbar)

Gesucht: 2 mal stetig diff.bare 'Kurve'  $x(t)$  mit  $x(t_1) = x_1$  und  $x(t_2) = x_2$ :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f(x, \dot{x}, t) dt \quad \text{extremal}$$

↔ Notwendige Bedingung: das Bestehen der "Euler-Lagrange"-Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0$$

Beweis: Sei  $x(t)$  die gesuchte Kurve

Variationsansatz:  $x_v(t) = x(t) + \varepsilon\varphi(t)$  mit  $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$

$$\hookrightarrow \dot{x}_v(t) = \dot{x}(t) + \varepsilon\dot{\varphi}(t)$$

$$\triangleleft I(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} f(x_v, \dot{x}_v, t) dt$$

$I(\varepsilon)$  sei extremal für  $\varepsilon = 0 \iff \left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$

$$\hookrightarrow \frac{dI}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} f(x_v, \dot{x}_v, t) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(x_v, \dot{x}_v, t) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_v} \frac{\partial x_v}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_v} \frac{\partial \dot{x}_v}{\partial \varepsilon} \right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_v} \varphi(t) + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_v} \dot{\varphi}(t) \right) dt$$

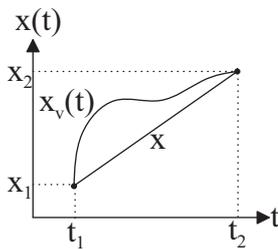
part. Int.  $= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial x_v} \varphi(t) dt + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_v} \varphi(t) \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_v} \right) \varphi(t) dt$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_v} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_v} \right) \varphi(t) dt \quad (\text{da } \varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0)$$

$$\hookrightarrow \left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \varphi(t) dt$$

$$\implies \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0$$

Elementares Beispiel:



kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten

$$\text{Bogenlänge } S = \int \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt$$

$$\hookrightarrow f(x, \dot{x}, t) = \sqrt{1 + \dot{x}^2} = f(\dot{x})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} \xrightarrow{E-L-Gl.} \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} \right) = 0$$

$$\implies \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = \text{konst.} = C_1$$

$$\hookrightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{C_1^2}{1 - C_1^2}} = C_2 \implies x(t) = C_2 t + C_3 \quad (\text{Geradengleichung})$$

Bemerkungen zur Variationsrechnung:

- (i)  $I = \int f(x, \dot{x}, t) dt = I[x]$  "Funktional" (Funktion  $\mapsto$  Zahl)
- (ii) Funktionalableitung  $\frac{\delta I}{\delta x}$  definierbar
- (iii) Man findet dann  $\frac{\delta I}{\delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}$  für  $I = \int f dt$   
 Alternativ: definiere 'totale Variation' von I

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta \int f(x, \dot{x}, t) \\ \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \delta x dt \\ \hookrightarrow \delta I &= 0 \iff \text{E-L-Gl.} \end{aligned}$$

(erklärt symbolische Notation des Hamilton'schen Prinzips  $\delta S = 0$ )

### 4.1.2 HP für den einfachsten Fall

$\triangleleft$  1 MP in eindimensionalen Welt

$$L = T - U = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - U(x) = L(x, \dot{x}); \quad F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

$$\text{HP :} \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}) dt = 0$$

$$\iff \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0} \quad \text{Lagrange-Gl. 2. Art}$$

Auswertung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x}; & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\ddot{x}; \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{dU}{dx} = F(x) \end{aligned}$$

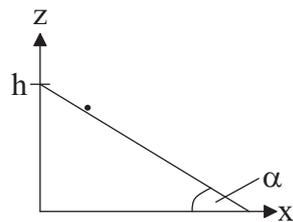
$$\hookrightarrow m\ddot{x} = F(x) \iff \text{Lg II} \iff \text{HP}$$

## 4.2 Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten

### 4.2.1 Vorbereitungen für eine MP

a) Beispiele für Zwangsbedingungen (ZBs)

(i) (Reibungsfreie) Bewegung auf der schiefen Ebene

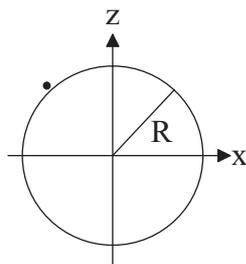


$$\text{ZB: } z = (-\tan \alpha)x + h$$

( $y$  ist beliebig)

→ System hat zwei Freiheitsgrade (FGs)

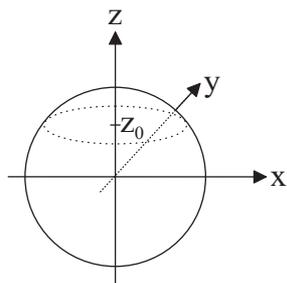
(ii) Bewegung auf Kugeloberfläche



$$\text{ZB: } x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

→ zwei FGs

(iii) Bewegung auf Kreisrand mit Radius  $r^2 = R^2 - z_0^2$



$$\text{ZBs: } x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

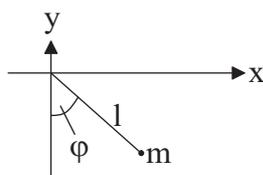
$$z = z_0 < R$$

→ ein FG

Spezialfall:  $z_0 = R$

kein FG (keine Bewegung)

(iv) Ebenes math. Pendel



$$\text{ZBs: } z = 0$$

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{konst.}$$

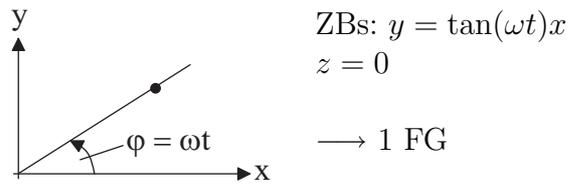
entspricht Beispiel (iii)

KAPITEL 4. HAMILTON'SCHES PRINZIP UND LAGRANGE'SCHE MECHANIK 62

ZBs in Bsp. (i) - (iv) werden charakterisiert durch Gleichung der Form  $f(x, y, z) = 0$

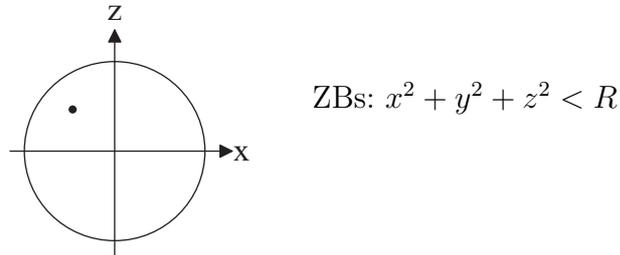
→ "holonom - skleronome" ZBs  
 ↓ ↓  
 (ganz, vollständig) (starr)

(v) Perle auf rotierendem Draht

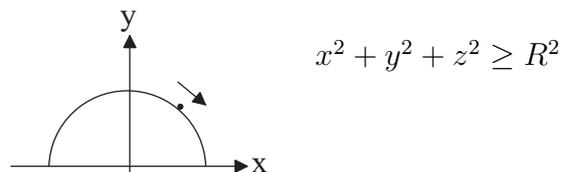


Variante: Perle auf Wippe ZBs: charakterisiert durch Gleichung der Form  $f(x, y, z, t) = 0$  (holonom - rheonom (=fließend))

(vi) In Kugel eingesperrter MP



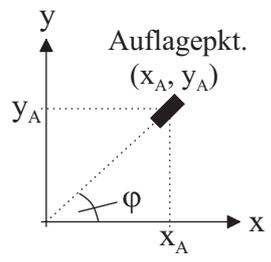
Variante:



→ nicht-holonome ZBs (charakterisiert durch Ungleichungen)

→ reduzieren Zahl der FGs nicht

(vii) In der Ebene rollendes Rad



$$\begin{aligned} \text{ZB: } \frac{dy}{dx} &= \tan \varphi(x_A, y_A) \\ \iff dy &= \tan \varphi(x_A, y_A) dx \\ \iff v_y &= \tan \varphi(x_A, y_A) v_x \end{aligned}$$

→ differentielle ZB (nicht-holonom)  
→ Zahl der FGs wird nicht reduziert

b) Generalisierte Koordinaten und Lagrange Ungleichungen

– Einfachste Situation:

hol. ZB  $f(x, y, z) = 0$  lasse sich auflösen in  $z = g(x, y)$

Siehe Bsp. (i): Schiefe Ebene im homogenen Schwerfeld

ZB:  $z = h - x \tan \alpha$ ,  $y = 0$  (ignorabel)

Lagrange Fkt.:  $L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$

ZB einsetzen:  $= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}^2 \tan^2 \alpha) - mg(h - x \tan \alpha)$

HP  $\iff \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

Auswertung:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}(1 - \tan^2 \alpha), \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m\ddot{x}}{\cos^2 \alpha}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = mg \tan \alpha$$

$$\xrightarrow{\text{BWGl}} m\ddot{x} - mg \tan \alpha \cos^2 \alpha = 0$$

$$\iff \boxed{\ddot{x} = g \sin \alpha \cos \alpha}$$

Lsg.:  $x(t) = \frac{g}{2}(\sin \alpha \cos \alpha)t^2 + C_1 t - C_2$

$$z(t) = h - \frac{g}{2}(\sin^2 \alpha)t^2 - (C_1 t + C_2) \tan \alpha \quad (\text{bestimmt aus ZB})$$

(Äquivalenz zu Newton bleibt zu zeigen)

Siehe Bsp. (iv): Ebenes math. Pendel im homogenen Schwerfeld

ZB:  $z = 0$  (ignorabel)

$$x = \pm \sqrt{l^2 - y^2}$$

$$U = mgy$$

$$\begin{aligned}
 L = T - U &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \\
 &= \frac{m}{2} \left( \frac{y^2 \dot{y}^2 + \dot{y}^2(l^2 - y^2)}{l^2 - y^2} \right) - mgy \\
 &= \frac{m}{2} \left( \frac{\dot{y}^2 l^2}{l^2 - y^2} \right) - mgy \\
 &\longrightarrow \text{komplizierte Lagrange - Gleichung}
 \end{aligned}$$

Wie geht es leichter? Polarkoordinaten!

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x^2 + y^2} = l = \text{konst.} \quad (\text{ignorabel}) \\
 \tan \varphi &= -\frac{x}{y} \\
 \{\iff\} \quad x &= r \cdot \sin \varphi & y &= -r \cdot \cos \varphi \\
 &= l \cdot \sin \varphi & &= -l \cdot \cos \varphi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U &= mgy = -mgl \cos \varphi \\
 \dot{x} &= l\dot{\varphi} \cos \varphi & \dot{y} &= l\dot{\varphi} \sin \varphi \\
 \hookrightarrow L &= \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi = L(\varphi)
 \end{aligned}$$

Auswertung:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi$$

$$\stackrel{\text{Lg. Gl.}}{\implies} \quad ml^2 + mgl \sin \varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

– kleine Ausschläge:  $\sin \varphi \approx \varphi$

$$\implies \ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 \implies \varphi(t) = a \sin(\omega t - \beta)$$

– größere Ausschläge:

Näherungsverfahren: siehe [7], Kap. 2.4.3

(für  $\sin \varphi \approx \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3$ )

Vollständige Diskussion siehe [5], § 24

(ellipt. Integrale) [11], Kap. 4.2.1

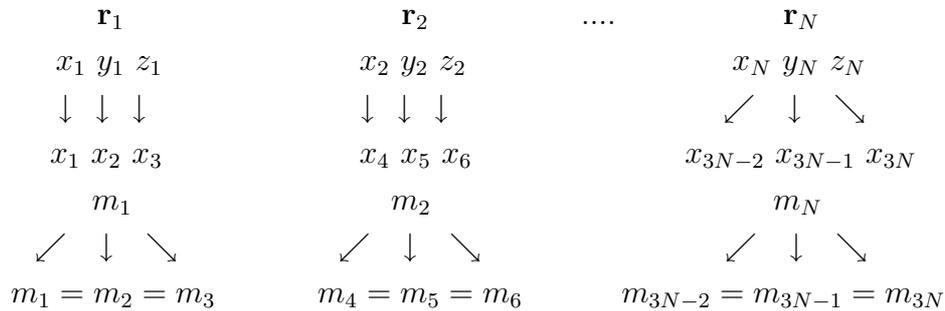
Bemerkungen:

– Es existiert kein universelles Rezept für das Auffinden geeigneter (generalisierter) Koordinaten

- 'Natürliche' Methode (falls möglich): Transformation auf (krummlinige) Koordinaten, die der Geometrie des Systems (der ZBs) besonders gut angepasst sind
- Gegebenenfalls führt das auf eine BWGl bzgl. nicht-inertialer Bezugssysteme

### 4.2.2 N-Teilchen Systeme

Zweckmäßige Nomenklatur:



liefert z.B. : 
$$\left( T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 \right)$$

$k$  unabhängige holonome ZBs reduzieren die Zahl der FGs von  $3N$  auf  $3N - k$

a) Klassifikation von Zwangsbedingungen

(i)  $k$  holonom-skleronome ZBs

$$f_j(x_1, \dots, x_{3N}) = 0 ; \quad j = 1, \dots, k$$

(ii)  $l$  holonom-rheonome ZBs

$$f_j(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0 ; \quad j = 1, \dots, l$$

(iii)  $m$  differentielle ZBs

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dx_j + a_{it} dt = 0 ; \quad i = 1, \dots, m$$

(Bsp.: rollendes Rad:  $\tan \varphi(x_A, y_A) dx - dy = 0$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \quad a_{11} &= \tan \varphi(x_0, y_0) \\ a_{12} &= -1 \\ a_{1t} &= 0 \end{aligned} )$$

$$a_{it} \begin{cases} = 0 & \text{nicht holonom - skleronom} \\ \neq 0 & \text{nicht holonom - rheonom} \end{cases}$$

◁ totales Differential der holonom-skleronomen ZB  $f(x_1, \dots, x_{3N}) = 0$

$$\begin{aligned} df(x_1, \dots, x_{3N}) &= \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \\ &= \nabla f \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{wobei } \nabla = (\partial x_1, \dots, \partial x_{3N})) \end{aligned}$$

↪ gewinne  $f$  durch (Kurven-) Integration

$$f(x_1, \dots, x_{3N}) = \int df = \int \nabla f \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{wegunabhängig})$$

$$\iff \text{"Integrabilitätsbedingungen"} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_j}$$

(sind erfüllt, falls  $f$  2 mal stetig diff.bar (Satz von Schwarz))

↪  $k$  differentielle ZBs  $\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dx_j + a_{it} dt$  sind holonom

$$\text{falls} \quad \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l} = \frac{\partial a_{il}}{\partial x_j}; \quad \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_t} = \frac{\partial a_{it}}{\partial x_j}$$

"Beweis": für hol. ZB  $f_i(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0$  gilt

$$\begin{aligned} df_i &= \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f_i}{\partial t} dt = 0 \\ &= \sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dx_j + a_{it} dt \quad \text{mit} \quad a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad a_{it} = \frac{\partial f_i}{\partial t} \end{aligned}$$

⇒ Integrabilitätsbedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_l} &= \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_l \partial x_j}, & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial t} &= \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial x_j} \\ \parallel & & \parallel & \\ \frac{\partial a_{il}}{\partial x_j} &= \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l}, & \frac{\partial a_{it}}{\partial x_j} &= \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \end{aligned}$$

b) Generalisierte Koordinaten und der Konfigurationsraum

Ziel: Beschreibung des Teilchensystems mittels geeigneter Koordinaten

Punkt-Transformation  $(x_1, \dots, x_{3N}) \longleftrightarrow (q_1, \dots, q_{3N})$

kartesische Koordinaten  $x_i = x_i(q_1, \dots, q_{3N}, t) \quad i = 1, \dots, 3N$

generalisierte Koordinaten  $q_\mu = q_\mu(x_1, \dots, x_{3N}, t) \quad \mu = 1, \dots, 3N$

Annahme: existieren  $k$  unabhängige, holonome ZBs

$f_j(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0$  (bzw.  $f_j(q_1, \dots, q_{3N}, t) = 0$ ),  $j = 1, \dots, k$

Wähle:

$$\left. \begin{aligned} q_{3N-k+1} &= f_1(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0 \\ q_{3N-k+2} &= f_2(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0 \\ &\vdots \\ q_{3N} &= f_k(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0 \end{aligned} \right\} \text{(ignorable Koordinaten)}$$

$\implies$  es bleiben  $3N - k$  unabhängige, generalisierte Koordinaten, die das System vollständig beschreiben

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (q_1, \dots, q_{3N-k}) : \text{ "Konfiguration(-vektor)" } \\ &= \text{Punkt im } (3N - k)\text{-dim. Konfigurationsraum} \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow x_i = x_i(q_1, \dots, q_{3N-k}, t)$$

$$\hookrightarrow \dot{x}_i = \frac{d}{dt} x_i(q_1, \dots, q_{3N-k}, t)$$

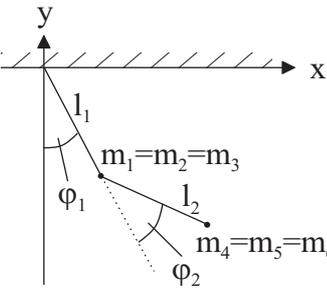
$$= \sum_{\mu=1}^{3N-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu} \dot{q}_\mu + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$$= \dot{x}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad i = 1, \dots, 3N$$

" $\dot{q}_\mu$ : generalisierte Geschwindigkeit"

$$\hookrightarrow L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

Beispiel: ebenes Doppelpendel ( $N = 2$ )



kartesische Koordinaten  $(x_1, \dots, x_6)$

$$\left. \begin{aligned} \text{ZB : } x_3 &= x_6 = 0 \\ l_1 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ &\vdots \\ l_2 &= \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (x_5 - x_2)^2} \end{aligned} \right\} \implies 4\text{ZBs}$$

$\implies 2 \text{ FGs}$

Generalisierte Koordinaten:

$$\left. \begin{array}{l} q_1 = \varphi_1 \\ q_2 = \varphi_2 \end{array} \right\} \text{ charakterisieren Bewegung im 2 - dim. Konfigurationsraum}$$

$$\left. \begin{array}{l} q_3 = x_3 = 0, \quad q_6 = x_6 = 0 \\ q_4 = l_1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0 \\ q_5 = l_2 - \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (x_5 - x_2)^2} = 0 \end{array} \right\} \text{ ignorabel}$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 m_i \dot{x}_i^2 - g(m_2 x_2 + m_5 x_5)$$

Kotrafos:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \varphi_1 = l_1 \sin q_1 \\ x_2 &= -l_1 \cos \varphi_1 = -l_1 \cos q_1 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= l_1 \sin q_1 + l_2 \sin q_2 \\ x_5 &= -l_1 \sin q_1 - l_2 \sin q_2 \\ x_6 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{allg. Form : } x_i = x_i(q_1, q_2), \quad i = 1, \dots, 6$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l_1 \dot{q}_1 \cos q_1 \\ \dot{x}_2 &= l_1 \dot{q}_1 \sin q_1 \\ \dot{x}_3 &= 0 \\ \dot{x}_4 &= l_1 \dot{q}_1 \cos q_1 + l_2 \dot{q}_2 \cos q_2 \\ \dot{x}_5 &= l_1 \dot{q}_1 \sin q_1 + l_2 \dot{q}_2 \sin q_2 \\ \dot{x}_6 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{allg. Form : } \dot{x}_i = \dot{x}_i(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2), \quad i = 1, \dots, 6$$

Mit der konventionellen Nomenklatur für die Massen:

$$(m_1, m_2, m_3) \longrightarrow m_1 \quad (m_4, m_5, m_6) \longrightarrow m_2$$

$$\begin{aligned}
 \hookrightarrow L &= \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{q}_1^2 (\cos^2 q_1 + \sin^2 q_1) + \frac{m_2}{2} \left[ (l_1 \dot{q}_1 \cos q_1 + l_2 \dot{q}_2 \cos q_2)^2 \right. \\
 &\quad \left. + (l_1 \dot{q}_1 \sin q_1 + l_2 \dot{q}_2 \sin q_2)^2 \right] + m_1 g l_1 \cos q_1 + m_2 g (l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2) \\
 &= \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{q}_2^2 + m_2 l_2 l_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 (\cos q_1 \cos q_2 + \sin q_1 \sin q_2) \\
 &\quad + (m_1 + m_2) g l_1 \cos q_1 + m_2 g l_2 \cos q_2 \\
 &= \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{q}_2^2 + m_2 l_2 l_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2) \\
 &\quad + (m_1 + m_2) g l_1 \cos q_1 + m_2 g l_2 \cos q_2 \\
 &= L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)
 \end{aligned}$$

### 4.3 Die Lagrange Gleichung 2. Art

Wiederholung: Hamilton'sches Prinzip

Die Bewegung eines (konservativen) mechanischen Systems (mit  $3N-k$  FGs) von einer gegebenen Anfangskonfiguration  $\mathbf{q}(t_1)$  zu einer Endkonfiguration  $\mathbf{q}(t_2)$  zwischen  $t_1$  und  $t_2$  verläuft derart, dass

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt = 0 \\
 L &= T - U - V
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
 U + V = W(x_1, \dots, x_{3N}) & \xrightarrow{x_i = x_i(\mathbf{q}, t)} & W(\mathbf{q}, t) \\
 T = T(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{3N}) & \xrightarrow{\dot{x}_i = \dot{x}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)} & T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)
 \end{array}$$

”Bewegung”: ist die Zeitentwicklung des Systems auf einer ”Kurve”

$$\mathbf{q}(t) = \{q_1(t), \dots, q_{3N-k}(t), t_1 \leq t \leq t_2\}$$

im  $(3N-k)$ -dimensionalen Konfigurationsraum

#### 4.3.1 Herleitung der Lagrange-Gleichungen aus dem Hamilton-Prinzip

vgl. Kapitel 4.1.1

- HP:  $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$
- Sei  $\mathbf{q}(t)$  die Kurve, bzgl. derer  $\delta S = 0$

- Variationsansatz:

$$\begin{aligned} q_{\mu,v}(t) &= q_{\mu}(t) + \varepsilon \varphi_{\mu}(t) & (\mu = 1, \dots, 3N - k) \\ \text{mit } \varphi_{\mu}(t_1) &= \varphi_{\mu}(t_2) = 0 \\ \dot{q}_{\mu,v}(t) &= \dot{q}_{\mu}(t) + \varepsilon \dot{\varphi}_{\mu}(t) \end{aligned}$$

- $\triangleleft \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}_v, \dot{\mathbf{q}}_v, t) dt$

- Notwendige Bedingung für Minimum bei  $\varepsilon = 0$  :  $\left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$

- $$\begin{aligned} \frac{dS}{d\varepsilon} &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(\mathbf{q}_v, \dot{\mathbf{q}}_v, t) dt \\ &= \sum_{\mu=1}^{3N-k} \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_{\mu,v}} \frac{\partial q_{\mu,v}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu,v}} \frac{\partial \dot{q}_{\mu,v}}{\partial \varepsilon} \right) dt \\ &= \sum_{\mu=1}^{3N-k} \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_{\mu,v}} \varphi_{\mu}(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu,v}} \dot{\varphi}_{\mu}(t) \right) dt \\ &= \underbrace{\sum_{\mu=1}^{3N-k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu,v}} \varphi_{\mu}(t) \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} + \sum_{\mu=1}^{3N-k} \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_{\mu,v}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu,v}} \right) \varphi_{\mu}(t) dt \end{aligned}$$

- $\left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \sum_{\mu=1}^{3N-k} \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_{\mu}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu}} \right) \varphi_{\mu}(t) dt$

- HP  $\iff \left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$

$$\iff \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu}} - \frac{\partial L}{\partial q_{\mu}} = 0, \quad \mu = 1, \dots, 3N - k}$$

Lagrange – Gleichungen 2. Art

### 4.3.2 Äquivalenz der Lagrange-Gleichung zur Newton'schen BWGI

- a) System ohne ZBs in kartesischen Koordinaten  
zu zeigen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, 3N$$

$$\iff \dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{F}_k + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{ik}, \quad k = 1, \dots, N$$

Beweis:

$$L = T - U - V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j^2 - U(x_1, \dots, x_{3N}) - V(x_1, \dots, x_{3N})$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m_i \ddot{x}_i = \dot{p}_i, \quad (i = 1, \dots, 3N)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} (U + V) = F_i + \sum_{j=1}^{3N} f_{ji}$$

Erläuterung zur letzten Gleichung:

- (i) Äußere Kräfte:

$$U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{k=1}^N U_k(\mathbf{r}_k) = U_1(x_1 x_2 x_3) + U_2(x_4 x_5 x_6) \\ + \dots + U_N(x_{3N-2} x_{3N-1} x_{3N})$$

→ äußere Kraft auf k-ten MP:  $\mathbf{F}_k = -\nabla_k U_k \hookrightarrow$  m-te Komponente der Kraft auf k-ten MP:

$$F_k^m = -\frac{\partial}{\partial x_m^k} U_k = -\frac{\partial U}{\partial x_m^k} \quad (k = 1, \dots, N; m = 1, 2, 3)$$

$$\left( \begin{array}{l} F_k^1 \equiv F_k^x = -\frac{\partial U}{\partial x_k} \\ F_k^2 \equiv F_k^y = -\frac{\partial U}{\partial y_k} \\ F_k^3 \equiv F_k^z = -\frac{\partial U}{\partial z_k} \end{array} \right) \iff F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, 3N$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 F_1^x & F_1^y & F_1^z & F_2^x & F_2^y & F_2^z & \dots & F_N^x & F_N^y & F_N^z \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & & F_{3N-2} & F_{3N-1} & F_{3N}
 \end{array}$$

(ii) Innere Kräfte:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{ji} &= \nabla_i V_{ji} = -\nabla_i V_{ij} \\
 V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) &= \sum_{j<i}^N V_{ji}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = V_{12}(x_1x_2x_3, x_4x_5x_6) \\
 &\quad + V_{13}(x_1x_2x_3, x_7x_8x_9) + \dots + V_{23}(x_4x_5x_6, x_7x_8x_9) + \dots \\
 &\quad + \dots + V_{N-1,N}(x_{3N-5}x_{3N-4}x_{3N-3}, x_{3N-2}x_{3N-1}x_{3N})
 \end{aligned}$$

Betrachte einige Beispiele:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial V}{\partial x_1} &= -\frac{\partial}{\partial x_1}(V_{12} + V_{13} + \dots + V_{1N}) \\
 &= -\frac{\partial}{\partial x_1}(V_{21} + V_{31} + \dots + V_{N1}) = f_1^x = \sum_{j=1}^N f_{j1}^x \\
 &= \sum_{j=1}^{3N} f_{j1} \\
 -\frac{\partial V}{\partial x_5} &= -\frac{\partial}{\partial x_5}(V_{12} + V_{32} + V_{42} + \dots + V_{N2}) \\
 &= f_2^y = \sum_{j=1}^N f_{jN}^y = \sum_{j=1}^{3N} f_{j5} \\
 &\quad \vdots \\
 -\frac{\partial V}{\partial x_{3N}} &= -\frac{\partial}{\partial x_{3N}}(V_{N1} + V_{N2} + \dots + V_{N,N-1}) \\
 &= f_N^z = \sum_{j=1}^N f_{jN}^z = \sum_{j=1}^{3N} f_{j3N} \\
 \Leftrightarrow \text{allg. : } -\frac{\partial V}{\partial x_i} &= \dots = \sum_{j=1}^{3N} f_{ji}
 \end{aligned}$$

wobei Matrix  $f_{ij}(3N \times 3N)$  die folgende Struktur hat:

$j \setminus i$	1	2	3	4	5	6	7	..	..	3N-k	3N-1	3N
1	0	0	0	x	0	0	x	..	..	x	0	0
2	0	0	0	0	x	0	0	..	..	0	x	0
3	0	0	0	0	0	x	0	..	..	0	0	x
4	x	0	0	0	0	0	x	..	..	x	0	0
5	0	x	0	0	0	0	0	..	..	0	x	0
6	0	0	x	0	0	0	0	..	..	0	0	x
7	x	0	0	x	0	0	0	0	0	.		
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$			0	..	..	$\vdots$		
3N												

Zusammenfassung:  $f_{ji} \neq 0$  falls  $1 \leq j = i \pm 3n \leq 3N$ ;  $n = (1, \dots, N-1)$

es ist also :

$$-\frac{\partial V}{\partial x_1} = \sum_{j=1}^{3N} f_{ji}, \quad i = 1, \dots, 3N$$

$$\iff -\nabla_i V_{ij} = \mathbf{f}_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, N$$

$$\implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \dot{p}_i - F_i - \sum_{j=1}^{3N} f_{ji} = 0$$

$$\iff \dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{F}_k + \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_{jk}, \quad k = 1, \dots, N \quad (\text{q.e.d.})$$

b) Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen unter Punkttransformation

bisher: Lagrange II = Newton II in kart. Koordinaten

Zeige:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \iff \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = 0$$

Wobei:  $x_i = x_i(q_1, \dots, q_{3N}, t)$ ,  $i = 1, \dots, 3N$

$\implies$  Lagrange-Gleichungen in 3N general. Koordinaten  $\iff$  Newton II in kart. Koordinaten

Allgemeiner: Zeige Forminvarianz von Lagrange II bzgl.

Punkttransformation:  $q_\mu \rightarrow Q_\alpha = Q_\alpha(\mathbf{q}, t)$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$

Umkehrung:  $q_\mu = q_\mu(\mathbf{Q}, t)$ ,  $\mu = 1, \dots, n$

Zutaten :

$$\dot{q}_\mu = \frac{d}{dt} q_\mu(Q_1, \dots, Q_n, t) = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\beta} \dot{Q}_\beta + \frac{\partial q_\mu}{\partial t}$$

$$= \dot{q}_\mu(Q_1 \dots Q_n, \dot{Q}_1 \dots \dot{Q}_\beta, t)$$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial \dot{Q}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_\alpha} \left( \sum_\beta \frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\beta} \dot{Q}_\beta + \frac{\partial q_\mu}{\partial t} \right) = \frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\alpha}}$$

Annahme :  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = 0, \quad \mu = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} L(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n, t) &= L(q_1(Q_1 \dots Q_n, t), q_2(Q_1 \dots Q_n, t), \dots, \dot{q}_1(Q_1 \dots Q_n, \dot{Q}_1 \dots \dot{Q}_n, t), \\ &= \tilde{L}(Q_1 \dots Q_n, \dot{Q}_1 \dots \dot{Q}_n, t) \end{aligned}$$

zu zeigen :  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_\alpha} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n$

- $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_\alpha} = \sum_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial q_\mu} \frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial Q_\alpha} \right)$
- $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_\alpha} = \sum_\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial \dot{Q}_\alpha} = \sum_\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\alpha}$
- $\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_\alpha} = \frac{d}{dt} \left( \sum_\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\alpha} \right) = \sum \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \right) \frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\alpha}}_{= \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial Q_\alpha}} \right]$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_\alpha} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_\alpha} = \sum_\mu \left[ \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\mu}}_{= 0} \right] \frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\alpha} = 0 \quad (\text{q.e.d.})$$

Bemerkungen:

- (i) Forminvarianz gilt insbesondere für  $n = 3N$  und  $Q_\alpha \equiv x_i$   
 $\hookrightarrow$  Lagrange-Gleichungen in  $3N$  generalisierten Koordinaten  $\iff$  Newton's BWGl in kartesischen Koordinaten
- (ii) Newton's BWGl nicht forminvariant unter allg. Punkttransformation:

aus :  $m_i \ddot{x}_i = F_i$  folgt nicht  $m_\mu \ddot{x}_\mu = F_\mu$  (siehe Kap. V)

(iii) Einbau holonomer ZBs

$$\text{Annahme : } \mathbf{q} = \{q_1 \dots q_{3N-k}, \underbrace{q_{3N-k-1} \dots q_{3N}}_{\text{ignorabel}}\}$$

$$\text{HP : } \delta S = 0 \text{ für } L = L(q_1 \dots q_{3N}, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_{3N}, t)$$

$$\iff 0 = \left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \sum_{\mu=1}^{3N} \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \right) \varphi_\mu(t) dt$$

$$= \sum_{\mu=1}^{3N-k} \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \right) \varphi_\mu(t) dt$$

$$+ \sum_{\mu=3N-k+1}^{3N} \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \right) \underbrace{\varphi_\mu(t)}_{=0} dt$$

$$= 0 \text{ für } \mu = 3N - k + 1, \dots, 3N$$

(da diese Koordinaten nicht variiert werden)

$$\iff \boxed{\frac{\partial L}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = 0 \text{ für } \mu = 1, \dots, 3N - k}$$

→ HP ⇔ Lagrange II für 3N - k gen. Koordinaten ↔ Newton II für 3N kart. Koordinaten + Zwangskräfte aufgrund holonomer ZBs

(iv) Diskussion des Doppelpendels

$$\hookrightarrow L(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) \implies \text{Lg - Gl. für } q_1 = \varphi_1, q_2 = \varphi_2 \text{ aufstellen + lösen}$$

$$\begin{array}{cc} \parallel & \parallel \\ q_1 & q_2 \end{array}$$

(siehe Übungsaufgabe 8.3)

(v) Gebrauchsanweisung für Lagrange II

- Formuliere k (holonome) ZBs
- Wähle 3N generalisierte Koordinaten, wobei k Stück mit ZBs identifiziert werden und ignorabel sind
- Stelle T - U - V in 3N kartesischen oder geeigneten, krummlinigen Koordinaten auf
- Finde Kotrafo zwischen diesen und den (3N - k) unabhängigen generalisierten Koordinaten

- Bestimme  $L = T - U - V$  als  $L(q_1 \dots q_{3N-k}, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_{3N-k}, t)$
- Bilde  $3N - k$  Lagrange-Gleichungen durch Auswertung von

$$\frac{\partial L}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = 0 \quad (\mu = 1, \dots, 3N - k)$$

- Löse BWGL'en und analysiere Lösung

(vi)  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \tilde{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t)$ , d.h. die Lagrangefunktion selbst ist nicht forminvariant unter Punkttransformationen. In praxi nimmt man darauf in der Notation meistens keine Rücksicht und schreibt  $L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t)$  statt  $\tilde{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t)$

### 4.3.3 Lagrange II und Erhaltungssätze

a) Generalisierte (kanonische) Impulse + zyklische Koordinaten

Definition: generalisierter Impulse  $p_\mu := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}$

Beispiel 1: kartesische Koordinaten

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left( \sum_j m_j \cdot \dot{x}_j^2 \right) = m_i \dot{x}_i$$

→ der übliche mechanische (oder kinetische) Impuls

Beispiel 2: Ebenes Pendel (xy-Ebene)

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} l^2 \dot{q}^2 + mgl \cos \varphi \quad (q = \varphi) \\ \hookrightarrow p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = ml^2 \dot{q} = ml^2 \dot{\varphi} = l_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z \end{aligned}$$

→ z-Komponente des Drehimpulses

Wann gilt  $\dot{p}_\mu = 0$ ?

$$\hookrightarrow \text{Lg II : } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = \dot{p}_\mu = \frac{\partial L}{\partial q_\mu}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\text{falls } \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = 0 \text{ folgt } \begin{cases} \dot{q}_\mu = 0 \\ p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = \text{konst.} \end{cases}}$$

Definition: "zyklische Koordinaten"  $q_\mu : \iff \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = 0$

→ Der zur generalisierten Koordinate  $q_\mu$  zugehörige Impuls  $p_\mu$  ist Erhaltungsgröße, falls  $q_\mu$  zyklisch ist

Triviales Beispiel: freies Teilchen

$$L = T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2$$

$$\iff \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \iff p_i = m_i \dot{x}_i = \text{konst.}$$

b) Energie und Hamiltonfunktion

Zur Vorbereitung:

– Definition:  $f(x_1 \dots x_m)$  ist homogene Funktion n-ten Grades:  $\iff$

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_m) = \lambda^n f(x_1 \dots x_m)$$

– Satz von Euler: Sei  $f$  homogen vom Grad  $n$

$$\implies \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f(x_1, \dots, x_m)$$

Beweis:  $y_i = \lambda x_i$

$$\begin{aligned} \triangleleft \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda}(y_1, \dots, y_m) &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \lambda} \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} x_i \\ &= n \lambda^{n-1} f(x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

für  $\lambda = 1$  : ( $y_i = x_i$ )

$$\iff \sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f(x_1, \dots, x_m) .$$

Behauptung: Für nicht explizit zeitabhängige Transformationen  $x_i \longleftrightarrow q_\mu$  ( $x_i = x_i(\mathbf{q})$ ) ist die kinetische Energie einer homogenen Funktion 2. Grades in den generalisierten Geschwindigkeiten

Beweis:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu} \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} \dot{q}_\mu \dot{q}_\nu .$$

$$\xrightarrow{\text{Euler}} \boxed{\sum_{\mu} \dot{q}_{\mu} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\mu}} = 2T}$$

$$\begin{aligned} \triangleleft \quad \frac{d}{dt} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) &= \sum_{\mu} \left( \frac{\partial L}{\partial q_{\mu}} \dot{q}_{\mu} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu}} \ddot{q}_{\mu} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &\stackrel{LG II}{=} \sum_{\mu} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu}} \right) \dot{q}_{\mu} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu}} \frac{d}{dt} \dot{q}_{\mu} \right] + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{\mu} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu}} \dot{q}_{\mu} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &\iff \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{\mu} p_{\mu} \dot{q}_{\mu} - L \right\} = - \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

Definition: Hamiltonfunktion

$$\boxed{H = \sum_{\mu} p_{\mu} \dot{q}_{\mu} - L}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{dH}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}}$$

$$\implies \boxed{\text{falls } \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \text{ folgt } \begin{cases} \dot{H} = 0 \\ H = \text{konst.} \end{cases}}$$

Bemerkungen:

- (i)  $[H] = J = Nm$  (Dimension einer Energie)
- (ii)  $H \equiv E = T + U + V$ , falls
  - konservatives System mit allenfalls holonomem ZBs

- zeitunabhängige Transformation  $x_i \rightarrow q_\mu$  (d.h skleronome ZB und ruhende Bezugssysteme)

Beweis:

$$\begin{aligned}
 p_\mu &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \stackrel{\text{(konservativ)}}{=} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} \quad (\text{da } \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\mu}(U + V) = 0) \\
 \hookrightarrow H &= \sum_\mu p_\mu \dot{q}_\mu - L = \sum_\mu \dot{q}_\mu \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} - L = 2T - T + U + V \\
 &= T + U + V
 \end{aligned}$$

- (iii) Genannte Voraussetzungen für  $H = E = T + U + V$  sind hinreichend, aber nicht notwendig
- (iv)  $H = E$  und  $\dot{H} = 0$  sind unabhängige Aussagen
- $\hookrightarrow \dot{H} = 0$  und  $H \neq E$  ist möglich
- $\hookrightarrow \dot{H} \neq 0$  und  $H = E$  ebenfalls
- (iv) Falls Bedingungen in Bemerkung (ii) erfüllt und falls  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

$\implies$

$H = E = T + U + V = \text{konst.}$
-------------------------------------

Beispiele:

- (i) Eindimensionaler harmonischer Oszillator

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{m}{2} \dot{x}^2, \quad U = \frac{m}{2} \omega^2 x^2, \quad L = T - U = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) \\
 \hookrightarrow H &= p\dot{x} - L = m\dot{x}^2 - \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} \omega^2 x^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = E = \text{konst.}
 \end{aligned}$$

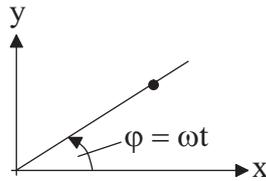
- (ii) Ebenes Pendel

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi \\
 \text{mit } p_\varphi &= ml^2 \dot{\varphi} \\
 H &= p_\varphi \dot{\varphi} - L = ml^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi \\
 &= \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = T + U = E = \text{konst.}
 \end{aligned}$$

(iii) Ebenes Doppelpendel

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\
 U &= -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 - m_2 g l_2 \cos \varphi_2 \\
 p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\
 p_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\
 H &= p_1 \dot{\varphi}_1 + p_2 \dot{\varphi}_2 - T + U \\
 &= (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\
 &\quad + m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\
 &\quad - T + U = T + U = E = \text{konst.}
 \end{aligned}$$

(iv) Perle auf rotierendem Draht ( $U = 0$ )



rheonome ZB :  $y = x \cdot \tan \omega t \iff \varphi - \omega t = 0$

gen. Koordinaten  $\begin{cases} q_1 = r \\ q_2 = \varphi - \omega t = 0 \end{cases}$  (ignorabel)

$$\begin{aligned}
 L = T &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2) = E \\
 H = p\dot{r} - L &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \dot{r} - L = m\dot{r}^2 - \frac{m}{2} \dot{r}^2 - \frac{m}{2} r^2 \omega^2 \\
 &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 - r^2 \omega^2) \neq E
 \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dH}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad H = \text{konst.}$$

Lagrange-Gleichung:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0 \\
 \parallel \quad \parallel & \\
 m\ddot{r} - m\omega^2 r &= 0 \iff \ddot{r} - \omega^2 r = 0
 \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned}
 r(t) &= C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} \\
 \dot{r}(t) &= C_1 \omega e^{\omega t} - C_2 \omega e^{-\omega t} \\
 \hookrightarrow H &= \frac{m}{2} \left\{ \left( C_1 \omega e^{\omega t} - C_2 \omega e^{-\omega t} \right)^2 - \omega^2 \left( C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} \right)^2 \right\} \\
 &= \frac{m}{2} \left\{ C_1^2 \omega^2 e^{2\omega t} + C_2^2 \omega^2 e^{-2\omega t} - 2C_1 C_2 \omega^2 - C_1^2 \omega^2 e^{2\omega t} \right. \\
 &\quad \left. - C_2^2 \omega^2 e^{-2\omega t} - 2\omega^2 C_1 C_2 \right\} \\
 &= -2m\omega^2 C_1 C_2 = \text{konst.} \\
 \hookrightarrow L &= m\omega^2 \left( C_1^2 e^{2\omega t} + C_2^2 e^{-2\omega t} \right) = E(t)
 \end{aligned}$$

(v) Teilchen im zeitlich veränderlichen homogenen Kraftfeld (1-dim. Welt)

$$\begin{aligned}
 F(t) &= F_0 t \\
 \hookrightarrow U(x) &= -F_0 x t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L &= T - U = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + F_0 x t \\
 H &= p\dot{x} - L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - F_0 x t = T + U = E = E(t)
 \end{aligned}$$

$$\left( \frac{\partial L}{\partial t} = F_0 x = -\dot{H} \right)$$

Allgemeinere Diskussion von Erhaltungssätzen durch Betrachtung von Symmetrien  $\rightarrow$  Noether-Theorem, siehe hierzu [7], Kap. 7 (insb. 7.3) und [2], Kap 11 + 15

### 4.3.4 Erweiterungen

a) Verallgemeinerte (generalisierte) Potentiale

$$\text{bisher : } -\frac{\partial}{\partial x_i} W = -\frac{\partial}{\partial x_i} (U+V) = F_i + \sum_{j=1}^{3N} f_{ij} \equiv K_i, \quad i = 1, \dots, 3N$$

$$\begin{aligned}
 \triangleleft -\frac{\partial W}{\partial q_\mu} &= -\sum_i \frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu} = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu} \\
 &\equiv Q_\mu \quad \text{"generalisierte Kraftkomponenten"} \\
 &(\quad = Q_\mu(q_1 \dots q_{3N-k}, t))
 \end{aligned}$$

Sei  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - W(\mathbf{q}, t)$

$$\text{Lg - Gl'en : } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} = \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = \frac{\partial T}{\partial q_\mu} - \frac{\partial W}{\partial q_\mu}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial T}{\partial q_\mu} = Q_\mu, \quad \mu = 1, \dots, 3N - k}$$

→ Alternative Form der Lagrange-Gleichungen

Erweiterung: betrachte 'verallgemeinerte' Potentialfunktion  $W^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$

$$Q_\mu = - \left( \frac{\partial W^*}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W^*}{\partial \dot{q}_\mu} \right)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial T}{\partial q_\mu} = \frac{d}{dt} \frac{\partial W^*}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial W^*}{\partial q_\mu}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = 0 \\ \text{für } L = T - W^* \end{array}}$$

Beispiel: für  $W^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ : Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

$$\begin{aligned} \text{Lorentzkraft : } \quad \mathbf{F} &= q(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})) \\ \Leftrightarrow F_i &= - \left( \frac{\partial W^*}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W^*}{\partial \dot{x}_i} \right) \quad \text{mit} \\ W^* &= q(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \quad \text{und} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

siehe [10] II, Kap. 1.2.3 und [4], Kap. 1.5, (7.3)

$$\text{gen. Impulse : } p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = \underbrace{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}}_{\text{"mechanischer (kinetischer) Impuls"}} + \frac{\partial W^*}{\partial \dot{q}_\mu}$$

Bemerkung: Man findet für dieses Beispiel

$$H = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 + q\phi = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + q\mathbf{A})^2 + q\phi = E$$

aber bei zeitabhängigen Feldern  $\dot{E} \neq 0$ .

b) Reibung

$$F_i = F_i^{kon} + F_i^{diss} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + F_i^{diss} \quad (\text{siehe Kap. 2.2.3})$$

$$\triangleleft \quad \text{Ansatz : } F_i^{diss} = -\beta_i \dot{x}_i \quad (\text{Stokes'sche Reibung})$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \quad Q_\mu^{diss} &= \sum_i F_i^{diss} \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu} = -\sum_i \beta_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu} \\ &= -\sum_i \beta_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_\mu} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\mu} \left( \sum_i \frac{\beta_i}{2} \dot{x}_i^2 \right) \end{aligned}$$

Definition: Rayleigh'sche Dissipationsfunktion

$$R := \sum_i \frac{\beta_i}{2} \dot{x}_i^2 = R(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

$$\begin{aligned} \text{Lg - Gl. : } \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial T}{\partial q_\mu} &= Q_\mu = -\frac{\partial W}{\partial q_\mu} + Q_\mu^{diss} \\ &= -\frac{\partial W}{\partial q_\mu} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\mu} \end{aligned}$$

$$\iff \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial L}{\partial q_\mu} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\mu} = 0}$$

$$(L = T - W = T - U - V)$$

Energiesituation (siehe Kap. 3.1.2)

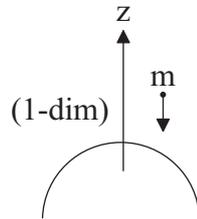
$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} (T + U + V) = \mathbf{F}^{diss} \cdot \mathbf{v} \quad (1 \text{ MP})$$

$$\text{bzw : } \frac{d}{dt} (T + U + V) = \sum_{i=1}^{3N} F_i^{diss} \dot{x}_i \quad (\text{N MPs})$$

$$\text{für : } F_i^{diss} = -\beta_i \dot{x}_i$$

$$\iff \boxed{\frac{dE}{dt} = \sum_i \beta_i \dot{x}_i^2 = -2R}$$

Beispiel: freier Fall mit Stokes'scher Reibung



$$R = \frac{\beta}{2} \dot{z}^2$$

$$L = \frac{m}{2} \dot{z}^2 - mgz$$

$$\begin{aligned} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= m\ddot{z}, & \frac{\partial L}{\partial z} &= -mg, & \frac{\partial R}{\partial \dot{z}} &= \beta\dot{z} \\ \xrightarrow{\text{Lag-Gl.}} & m\ddot{z} + mg + \beta\dot{z} = 0 & & & & \text{(wie zuvor)} \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- (i) Anspruchsvollere Beispiele (+ Aufgaben): siehe [7], Kap. 6
- (ii) (Etwas) allgemeinerer Reibungsansatz: siehe [10] II, Kap. 1.2.4 und [5] II, Kap. 17
- (iii) Hamiltonprinzip für nichtkonservative Systeme: siehe [4], Kap. 2.4

## 4.4 Kurze Zusammenfassung der Lagrange Mechanik

- Ziel: Beschreibung klassischer Bewegungsprobleme für  $N$  Massenpunkte mit
  - (konservativen) äußeren + inneren Kräften
  - ggf. (holonomen) Zwangsbedingungen
- Axiom: Hamiltonsches Prinzip

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt = 0$$

Lagrange – Funktion  $L = T - U - V$

- BWGl'en: HP  $\iff$  Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = 0, \quad \mu = 1, \dots, 3N - k$$

$$\iff \text{Newtonsche BWGl} \quad \dot{p}_i = F_i + \sum_{j=1}^{3N} f_{ji} \quad (+ \text{ ggf. Zwangskräfte})$$

- Erhaltungsaussagen

- zyklische Koordinaten + generalisierte Impulse

$$\text{falls } \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = 0 \implies p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = \text{konst.}$$

- Energie + Hamiltonfunktion

$$H = \sum_{\mu} p_{\mu} \dot{q}_{\mu} - L$$

$\hookrightarrow$  falls  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \implies H = \text{konst.}$  (Hamiltonfunktion ist Erhaltungsgröße)

$\hookrightarrow$  falls System konservativ, ZBs holonom, ruhende KOS:

$$H = E = T + U + V$$

- Erweiterungen

- Verallgemeinerte Potentiale
- Reibung, Dissipationsfunktion

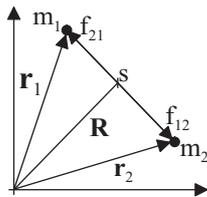
- Varianten (die nicht behandelt werden)

- Lagrange-Gleichung 1. Art  
 $\longrightarrow$  Berechnung von Zwangskräften ("Methode der Lagrange-Multiplikatoren")  
 Literatur: [11], Kap. 5.1 und [7], Kap. 9
- d'Alembert'sche Prinzip  
 $\longrightarrow$  Eigenständiges Axiom  
 d'Alembert + Newton  $\implies$  Lagrange I + II  
 Literatur: [11], Kap. 5.2, [7], Kap. 4 und [10] II, Kap. 1.2

# Kapitel 5

## Anwendungen II

### 5.1 Das Zweikörper-Zentralkraftproblem



1. Abgeschlossenes System ( $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 = 0$ )

$$2. \mathbf{f}_{21} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) f_{21} = -\mathbf{f}_{12} \\ = -\nabla_1 V_{12}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \nabla_2 V_{12}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$$

3. (keine Zwangsbedingungen)

Gravitation :

$$\mathbf{f}_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

$$V_{12} = V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

$$\Leftrightarrow \text{Lagrange - Funktion : } L = T - V = \frac{m_1}{2} \mathbf{v}_1^2 + \frac{m_2}{2} \mathbf{v}_2^2 - V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$$

(analoge Form für andere Wechselwirkungen)

Planetenbewegungen:

Sonnenmasse  $M_\odot = 330.000 m_E$

Merkur (leichtester)  $M_{Me} = \frac{1}{20} m_E$

Jupiter (schwerste)  $M_{Ju} \approx 320 m_E$

$$\frac{\text{Kraft von Sonne auf Erde}}{\text{Kraft von X auf Erde}} = \frac{F_{\odot E}}{F_{XE}} = \frac{M_\odot R_{XE}^2}{M_X R_{\odot E}^2}$$

	Venus	Mars	Jupiter	Mond	[Einheiten] (aus [11])
$m_x$	0,81	0,11	320	0,012	$m_E$
$R_{XE}^{min}$	0,27	0,52	42	0,0026	$R_{\odot E}$
$F_{\odot E}/F_{XE}$	30.000	81.000	18.300	180	

$\implies$  Betrachtung des (abgeschlossenen) Zweikörper-Erde-Sonne-Systems ist in 1. Näherung ausreichend (6 FGs)

### 5.1.1 Reduktion auf ein Einkörperproblem

$$\begin{aligned} \text{Impulssatz : } \dot{\mathbf{P}} &= \mathbf{F}_{ext} = 0 \quad (\text{siehe Kap. 2.2}) \\ \text{mit } \mathbf{P} &= M\mathbf{V} = (m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{R} &= \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Positionen bzgl. SP:  $\mathbf{r}'_k = \mathbf{r}_k - \mathbf{R} \quad (k = 1, 2)$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow T &= \frac{1}{2} \sum_k m_k \mathbf{v}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_k (\mathbf{v}'_k + \mathbf{V})^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_k m_k \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_k m_k \mathbf{v}'_k{}^2 + \underbrace{\sum_k m_k \mathbf{v}'_k \mathbf{V}}_{=0} \end{aligned}$$

$$T = T_{SP} + T' ; \quad T_{SP} = \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 ; \quad T' = \frac{1}{2} \sum_k m_k \mathbf{v}'_k{}^2 \quad (\text{gilt für } N \geq 2)$$

Für  $N = 2$  ist weitere Umschreibung sinnvoll:

$$\begin{aligned} \triangleleft \mathbf{r}'_1 &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 + m_2)\mathbf{r}_1 - m_1\mathbf{r}_1 - m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}'_2 &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 + m_2)\mathbf{r}_2 - m_1\mathbf{r}_1 - m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \\ &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \\ & \quad (\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2 \quad \text{"Relativvektor"}) \\ \hookrightarrow \mathbf{v}'_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v} ; \quad \mathbf{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v} \\ T' &= \frac{m_1}{2} \mathbf{v}'_1{}^2 + \frac{m_2}{2} \mathbf{v}'_2{}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} \mu \mathbf{v}^2 \\ \mu &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{"reduzierte Masse"} \\ \rightarrow T &= \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \mu \mathbf{v}^2 ; \quad V = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow L &= \frac{\mu}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \gamma\frac{\mu M}{r} \\ &= L(\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \\ &= L_{SP}(\dot{\mathbf{R}}) + L_{rel}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \end{aligned}$$

(SP- und Relativkoordinaten sind die geeigneten generalisierten Koordinaten)

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial X} = \frac{\partial L}{\partial Y} = \frac{\partial L}{\partial Z} = 0 \quad \implies \quad P_X &= \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = M\dot{X} = \text{konst.} \\ (X, Y, Z \text{ zyklisch}) \quad P_Y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} = M\dot{Y} = \text{konst.} \\ P_Z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{Z}} = M\dot{Z} = \text{konst.} \end{aligned}$$

### 5.1.2 Relativbewegung

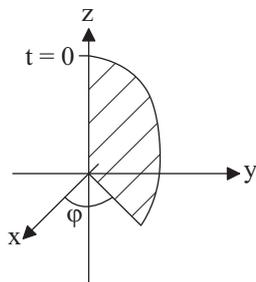
a) Lagrange-Funktion und Lagrange-Gleichung

Kugelkoordinaten:  $L_{rel}(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{\mu}{2} \left[ \dot{r}^2 + (r \sin \theta \dot{\varphi})^2 + (r \dot{\theta})^2 \right] + \gamma \frac{\mu M}{r}$

Generalisierte Impulse:

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu \dot{r} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 (\sin^2 \theta) \dot{\varphi} = \text{konst.} \quad (\text{da } \varphi \text{ zyklisch}) \end{aligned}$$

Wähle Koordinatensystem, so dass  $x(0) = y(0) = 0 \quad (\rightarrow \theta(0) = 0)$



$$\begin{aligned} p_\varphi(0) = 0 = p_\varphi(t) \quad \implies \quad \dot{\varphi} &= 0 \\ \implies \quad \text{Bewegung in Ebene } \varphi &= \text{konst.} \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \boxed{L_{rel} = \frac{\mu}{2}(\dot{\mathbf{r}}^2 + \mathbf{r}^2 \dot{\theta}^2) + \gamma \frac{\mu M}{r}}$$

Nun ist auch  $\theta$  zyklisch und

$$p_\theta = \mu r^2 \dot{\theta} \hat{=} \text{Flächensatz } \dot{A} = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = \frac{p_\theta}{2\mu} = \text{konst.}$$

$$\frac{\partial L_{rel}}{\partial \dot{r}} = \mu \dot{\mathbf{r}} \quad , \quad \frac{\partial L_{rel}}{\partial r} = \mu r \dot{\theta}^2 - \gamma \frac{\mu M}{r}$$

$$\xrightarrow{Lg-Gl.} \quad \mu \ddot{r} = \mu r \dot{\theta}^2 - \gamma \frac{\mu M}{r^2}$$

$$\mu \ddot{r} = \frac{p_\theta^2}{\mu r^3} - \gamma \frac{\mu M}{r^2} = \frac{p_\theta^2}{\mu r^3} - \frac{\partial V}{\partial r}$$

Hamiltonfunktion  $H_{rel} = p_{rel} \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} - L_{rel}$

$$= \dots = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 - \dot{r}^2 \dot{\theta}^2) + V(r)$$

$$= T' + V = E_{rel} = \text{konst.} \quad (\text{Energieerhaltung})$$

(denn  $-\frac{\partial L}{\partial t} = \dot{H} = 0$ )

$$H = H_{SP} + H_{rel}$$

$$= \frac{M}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{p_\theta^2}{\mu r^3} - \gamma \frac{\mu M}{r}$$

$$= E = \text{konst.}$$

(Gesamtenergie des 2-Körper-Problems ist erhalten)

b) Qualitative Diskussion der Bahntypen

$$E_{rel} \equiv E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} - \gamma \frac{\mu M}{r}$$

$$= T_{rad} + U_{zent} + U_{grav}$$

$$= \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + U_{eff}(r) = \text{konst.}$$

da Erde-Sonne-System

$$\longrightarrow \quad \mu = \frac{M_\odot m_E}{M_\odot + m_E} \approx m_E \quad ; \quad \mathbf{r} \approx \mathbf{r}_E \quad ; \quad M \approx M_\odot \quad ; \quad \mathbf{R} \approx \mathbf{r}_\odot$$

$$T_{rad} = E - U_{eff}(r) \geq 0$$

$\iff$

$$E \geq U_{eff}(r)$$

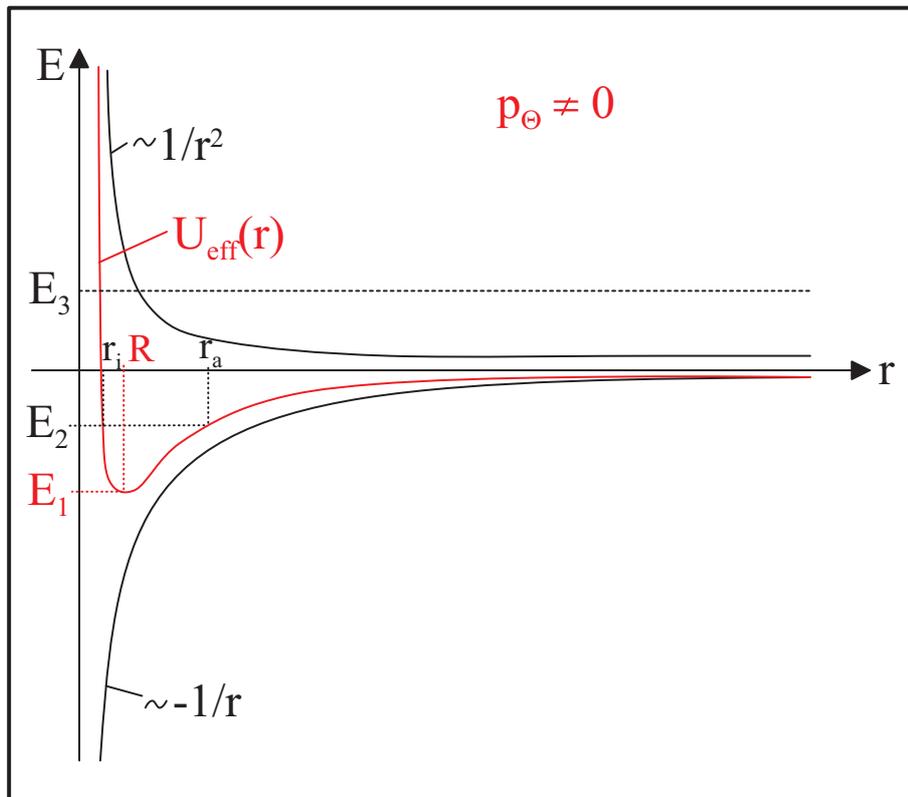
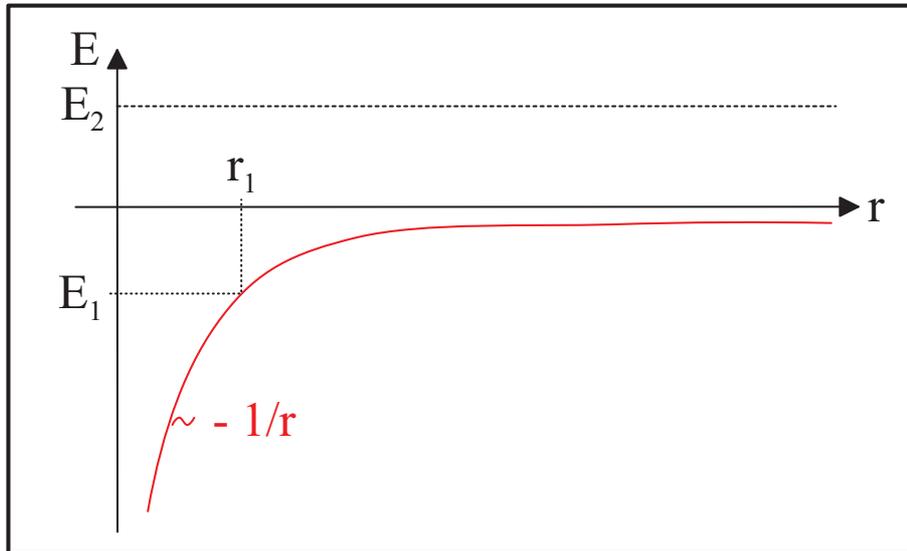


Abbildung 5.1:

- (i)  $E = E_1 = U_{eff}(R) \longrightarrow T_{rad} = 0$   
 $\longrightarrow$  Kreisbewegung mit Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta} = \frac{p_{\theta}}{\mu R^2} = \text{konst.}$
- (ii)  $E_1 < E = E_2 < 0$   
 $\longrightarrow$  finite (gebundene) Bewegung in  $[r_i; r_a]$   
 $(r_i, r_a : \text{Umkehrpunkte der Radialbewegung, } T_{rad}(r_i) = T_{rad}(r_a) = 0)$   
mit variabler Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta} = \frac{p_{\theta}}{\mu r^2}$
- (iii)  $E = E_3 \geq 0$   
infinite (ungebundene) Bewegung in  $[r_3, \infty)$ , i.a.  $(r \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty)$

$\triangleleft \quad p_\theta = 0 :$



- (i)  $E = E_1 < 0$     finite Bewegung in  $[0, r_1]$
- (ii)  $E = E_2 > 0$     infinite Bewegung i.a.  $r \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$

Grob-Klassifikation (nicht als Definition der Himmelskörper zu verstehen):

- Planeten                     $E < 0$  ,     $p_\theta > 0$
- Kometen                     $E > 0$  ,     $p_\theta > 0$     oder  $E < 0$  ,     $p_\theta > 0$
- Meteoriten (u.a.)     $E > 0$  ,     $p_\theta = 0$

c) Zur Lösung der BWGl.

$$\text{Ausgangspunkt :} \quad E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

$$\begin{aligned} \iff \quad \dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E - V(r) - \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} \right)} \\ \longrightarrow \quad t - t_0 &= \int_{t_0}^t dt' = \pm \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E - V(r') - \frac{p_\theta^2}{2\mu r'^2} \right)}} \end{aligned}$$

$\longrightarrow$  Umkehrung liefert  $r(t)$

$$\text{bestimme } \theta(t) \text{ aus } \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{\mu r^2} \quad \longrightarrow \quad \theta(t) - \theta_0 = \frac{p_\theta}{\mu} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{r^2(t')}$$

Bemerkung: direkte Integration nicht ohne weiteres durchführbar, einige Details: [11], Kap. 4.1.2.6

Alternative Betrachtung: Bahnkurve  $r(\theta)$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{p_\theta}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E - V(r) - \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} \right)}$$

$$\Leftrightarrow \theta(r) - \theta_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' = \pm \frac{p_\theta}{\mu} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E - V(r') - \frac{p_\theta^2}{2\mu r'^2} \right)}}$$

(Umkehrung  $\longrightarrow r(\theta)$ )

Zur Lösung des Integrals für  $V(r) = \alpha r^{n+1}$  : [4], Kap. 3.5

Für  $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$  ( $\alpha = \gamma\mu M$ )

Lösung:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} \left( 1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0) \right)$$

$$p = \frac{p_\theta^2}{\mu\alpha} \quad (> 0)$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_\theta^2}{\mu\alpha^2}} \quad \text{"numerische Exzentrizität"}$$

$\longrightarrow$  Brennpunktbezogene Darstellung von Kegelschnitten (in Polako.)

Zusammenfassung der Bahnformen:

$\varepsilon = 0$	$E = -\frac{\mu\alpha^2}{2p_\theta^2} \equiv E_k$ $r = p = \frac{p_\theta^2}{\mu\alpha^2} = \text{konst.}$	Kreis	}	Planeten (+ Kometen)
$0 < \varepsilon < 1$	$E_k < E < 0$ $r_{max} = \frac{p}{1-\varepsilon}, \quad r_{min} = \frac{p}{1+\varepsilon}$ " Aphel "                  " Perihel "	Ellipse		

$$\begin{array}{l|l|l} \varepsilon = 1 & E = 0 & \text{Parabel} \\ \varepsilon > 1 & E > 0 & \text{Hyperbel} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l|l|l} \varepsilon = 1 & E = 0 & \text{Parabel} \\ \varepsilon > 1 & E > 0 & \text{Hyperbel} \end{array}} \right\} \text{Kometen}$$

Literatur: [4], Kap. 3.6, [11], Kap. 4.1.2 und [8], Kap. 3

# Kapitel 6

## Hamilton'sche Mechanik

# Kapitel 7

## Mathematischer Anhang

### 7.1 Einführung der $\delta$ -Funktion

(Distribution: Beschreibung singulärer phys. Objekte in der Mathematik)

Definition:

(i)

$$\delta(x - a) = 0 \quad x \neq a$$

(ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Daraus folgt:

$$\delta(x - a) \longrightarrow \infty \quad x = a$$

Faltungssatz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a)$$

insb. : 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

Diese Eigenschaften bleiben ohne Beweis. Es genügt in diesem Fall, sich die  $\delta$ -Funktion als einen 'Automaten' vorzustellen, der den Funktionswert an der Stelle Null (bzw.  $a$ ) ausgibt, wenn man die Funktion eingibt.

# Kapitel 8

## Symbolverzeichnis

### 1 Abkürzungen

#### 1.1 Lateinisch

a	Beschleunigung
A	Fläche, Arbeit
C	Integrationskonstante
e, exp	Exponentialfunktion, Eulerzahl
E	Energie
f	innere Kräfte
F	Kraft
g	Gravitationsbeschleunigung in der Nähe der Erdoberfläche
h	Höhe
l	Drehimpuls eines MP
L	Drehimpuls eines Teilchensystems, Lagrange
m, M	Masse
P	Leistung
q	generalisierte Koordinate
r, R	Radius, Weg
$\Re$	Reelle Zahlen
s	Abstand
S	Wirkung
t	Zeit
T	kinetische Energie
U	potentielle Energie
v	Geschwindigkeit
V	Potential (aufgrund innerer Kräfte)
x, y	Abstand, Entfernung

## 1.2 Griechisch

$\gamma$	Gravitationskonste
$\delta$	Delta Funktion
$\Delta$	Differenz, Laplace Operator
$\varepsilon$	
$\mu$	
$\nabla$	Nabla Operator
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit

## 2 Indizes

$\odot$	Sonne
0	Ursprung, Beginn
1, 2	Ort, Zeitpunkt
i, k	Laufvariablen
diss	dissipativ
eff	effektiv
ext	extern
E	Erde
grav	gravitativ
hom	homogen
kin	kinetisch
p, part	partikulär
Q	
rad	radial
rel	relativ
SP	Schwerpunkt
zent	zentral

# Kapitel 9

## Wichtige Fundamental Konstanten

$$\begin{array}{lcl} \gamma & \approx & 6,6726 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \\ g & \approx & 9,81 \frac{m}{s^2} \\ M_E & \approx & 5,97 \cdot 10^{24} kg \\ R_E & \approx & 6,378 \cdot 10^6 m \end{array}$$

# Literaturverzeichnis

- [1] BLÖCHL, P.: *Theoretische Physik I: Klassische Mechanik*. Internetadresse: <http://www.pt.tu-clausthal.de/atp/education.shtml>.
- [2] FLIESSBACH, T.: *Mechanik*. Spektrum.
- [3] FORSTER, O.: *Analysis I*.
- [4] GOLDSTEIN, H.: *Klassische Mechanik*. Aula, Wiesbaden.
- [5] GREINER, W.: *Theoretische Physik 1+2*. H. Deutsch, Frankfurt.
- [6] JELITTO, R.: *Theoretische Physik 1+2*. Aula, Wiesbaden.
- [7] KUYPERS, F.: *Klassische Mechanik*. Wiley-VCH.
- [8] LÜCKE, W.: *Mathematische Methoden der Physik*. Internetadresse: <http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/etp.html>.
- [9] LINHARD, F.: *Klassische Mechanik*. Fischer, Frankfurt, 2002.
- [10] NOLTING, W.: *Grundkurs Theoretische Physik I+II*. Springer.
- [11] R. M. DREIZLER und C. S. LÜDDE: *Theoretische Physik 1*. Springer.
- [12] SOMMERFELD, A.: *Vorlesungen über Theoretische Physik 1: Mechanik*.