

Klassische Mechanik

Gelesen von
Prof. Dr. phil. nat. Tom Kirchner

Skript zur Vorlesung

Achtung!
Diese Version befindet sich noch in Bearbeitung
und kann Fehler enthalten!

3. März 2006

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Bemerkungen zum Wesen der Theoretischen Physik	1
1.2	Vorbemerkung zur Klassischen Mechanik	2
2	Newton'sche Mechanik	5
2.1	Die Newton'schen Axiome (1687)	5
2.1.1	Analyse des 1. Axioms: Inertialsystem (IS) und Galilei-Transformation (GT)	6
2.1.2	Analyse des 2. Axioms: Grundlegende BWGl gilt im IS	7
2.1.3	Analyse des 3. Axioms: actio = reactio	7
2.1.4	Abschließende Diskussion	8
2.2	Grundbegriffe und Erhaltungssätze	9
2.2.1	Impuls	9
2.2.2	Drehimpuls	10
2.2.3	Arbeit und Energie	15
3	Anwendungen I	20
3.1	Elementare Bewegungsprobleme	20
3.1.1	Eindimensionale Probleme ($E = T + U = \text{konst.}$)	20
3.1.2	Reibung ($\dot{E} \neq 0$)	29
3.2	Oszillatorprobleme I	33
3.2.1	Motive für das Studium des harmonischen Oszillators	33
3.2.2	Der gedämpfte harmonische Oszillator (1-dim.)	34
3.2.3	Der getriebene harmonische Oszillator - erzwungene Schwingungen	36
4	Hamilton'sches Prinzip und Lagrange'sche Mechanik	50
4.1	Das Hamilton'sches Prinzip der stationären Wirkung (1823)	50
4.1.1	Grundzüge der Variationsrechnung	51
4.1.2	HP für den einfachsten Fall	53
4.2	Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten	54
4.2.1	Vorbereitungen für eine MP	54

4.2.2	N-Teilchen Systeme	58
4.3	Die Lagrange Gleichung 2. Art	62
4.3.1	Herleitung der Lagrange-Gleichungen aus dem Hamilton- Prinzip	62
4.3.2	Äquivalenz der Lagrange-Gleichung zur Newton'schen BWGl	64
4.3.3	Lagrange II und Erhaltungssätze	69
4.3.4	Erweiterungen	74
4.4	Kurze Zusammenfassung der Lagrange Mechanik	77
5	Anwendungen II	79
5.1	Das Zweikörper-Zentralkraftproblem	79
5.1.1	Reduktion auf ein Einkörperproblem	80
5.1.2	Relativbewegung	81
5.1.3	Zusatzbemerkungen	86
5.2	Beschleunigte Bezugssysteme	88
5.2.1	Uniform rotierendes KOS	88
5.2.2	Allgemeine Rotation	90
5.2.3	Allgemeine beschleunigte Bezugssysteme: Rotation und Trans- lation	92
5.2.4	Anwendung: Scheinkräfte auf der rotierenden Erde	94
5.3	Bewegung starrer Körper	97
5.3.1	Vorbereitungen	97
5.3.2	Kinetische Energie und Trägheitstensor	98
5.3.3	Struktur und Eigenschaften des Trägheitstensors	99
5.3.4	Generalisierte Koordinaten für die Rotation: Euler Winkel	102
5.3.5	BWGl'en des starren Körpers	104
5.3.6	Drehimpuls und Drehimpulssatz	104
5.3.7	Drehbewegung starrer Körper: Kreiseltheorie	107
5.4	Oszillatorprobleme II	110
5.4.1	Lagrange-Funktion und -Gleichungen für gekoppelte Oszil- latoren	111
5.4.2	Lösung der BWGls	112
5.4.3	Anwendungen	116
5.4.4	Übergang zum Kontinuum: schwingende Saite	122
6	Hamilton'sche Mechanik	125
6.1	Hamilton'sche (Kanonische) Bewegungsgleichungen	125
6.2	Poisson-Klammern	130
6.2.1	Definition und fundamentale Poisson-Klammern	130
6.2.2	Algebraische Eigenschaften der Poisson-Klammer	131
6.2.3	Wichtigkeit der Poisson-Klammer	132
6.3	Erweiterungen	133
6.3.1	Phasenraum und Satz von Liouville	133

6.3.2	Kanonische Transformationen	133
6.3.3	Hamilton-Jacobi-Theorie	134
A	Ergänzungen	135
A.1	Einführung der δ -Funktion	135
A.2	Details zu den Euler-Winkeln	136
A.3	Details zur Lösung der BWGls gekoppelter Oszillatoren	141
A.4	Näheres zum dreiatomigen Molekül	143
B	Symbolverzeichnis	146
C	Wichtige Fundamental Konstanten	148

Kapitel 1

Einführung

1.1 Bemerkungen zum Wesen der Theoretischen Physik

Aufgaben der TP:

Formulierung, Analyse und Anwendung mathematischer Gesetze und Modelle zur Beschreibung physikalischer Phänomene und Prozesse (Mathematik ist die Sprache der Physik)

Werkzeuge der TP: Mathematik, Computer

Ziele und Nutzen der TP:

- Herausarbeiten weniger "roter Fäden" durch das Gebäude der Physik
- Auffinden allgemeiner Grundprinzipien
- Überprüfung und Interpretation empirischer Daten

"Kanon der TP":

- Klassische Mechanik → "Teilchen" ('Massenpunkte')
- Klassische Elektrodynamik → "Felder" (Wellen)
- Quantenmechanik → bewältigt Dualismus Welle-Teilchen
- Statistische Mechanik/Thermodynamik → Beschreibung von "Makrophänomenen" (typischerweise mit 10^{23} Teilchen)

1.2 Vorbemerkung zur Klassischen Mechanik

Definition:

”Mechanik ist die Lehre von der Bewegung materieller Gegenstände im Raum und den diese beherrschenden Gesetzmäßigkeiten” [6]

Analyse:

- (i) Materielle Gegenstände \rightarrow mit (träger) Masse ausgestattete Objekte
Massenpunkte \Leftrightarrow Punktförmige Teilchen mit Masse
- (ii) Bewegung im Raum: erfordert Klärung der Begriffe Raum + Zeit

Eigenschaften des Raums: (im Rahmen der Kl. Mechanik)

- drei-dimensional
- allseitig unbegrenzt
- enthält Punkte, Geraden, Ebenen
- Parallelenaxiom
- homogen + isotrop

→ dreidimensionaler Euklidischer Raum

→ kartesische Koordinatensysteme definierbar

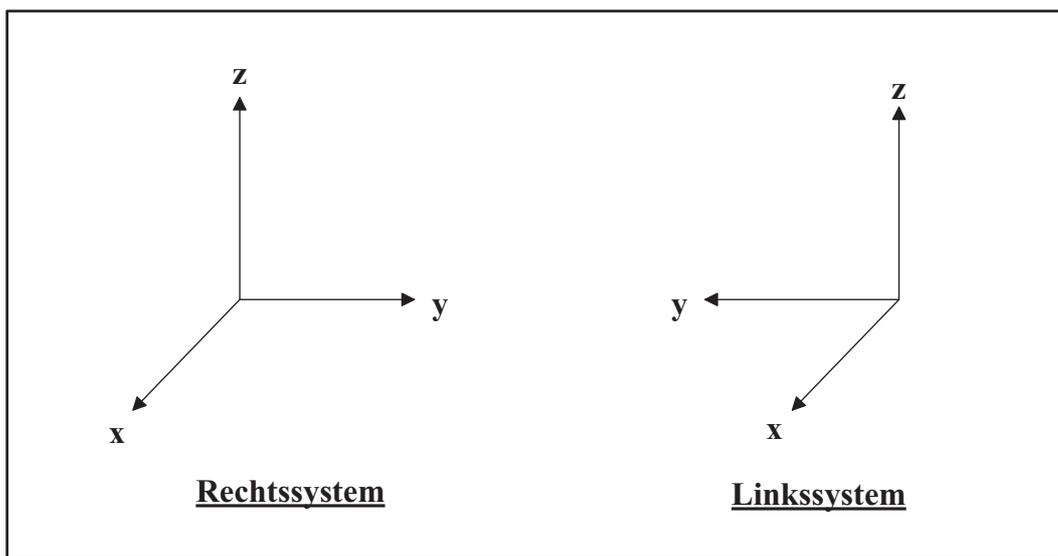


Abbildung 1.1: Kartesisches Rechts- / Linkssystem

⇒ Beschreibung von Gegebenheiten im Raum → Vektorrechnung im \mathcal{R}^3

Eigenschaften der Zeit:

- homogener Parameter

→ Bewegung im Raum wird beschrieben durch:

- Bahnkurve (Trajektorie) $\mathbf{r}(t)$
- Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$
- Beschleunigung $\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$

⇒ 'Kinematik': mathematische Beschreibung von Bewegungen ohne Berücksichtigung der verursachenden Kräfte

Erweiterungen des Raumbegriffs:

- Spezielle Relativitätstheorie \rightarrow 4-dim. (Raumzeit) "Minkowski" Raum
- Allgemeine Relativitätstheorie \rightarrow (lokal) gekrümmte Räume
- Quantenmechanik \rightarrow ∞ -dim. Hilbert-Raum

(iii) Gesetzmäßigkeiten \rightarrow "Dynamik":

Was bewirkt die Bewegung von Objekten?

\rightarrow Newton'sche Axiome (Kraftbegriff)

\rightarrow insbesondere Bewegungsgleichung (BWGl) $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$

$$\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} \stackrel{\text{DGL+AB}}{\Leftrightarrow} \mathbf{r}(t)$$

\rightarrow weitere Grundbegriffe (Impuls, Drehimpuls, Arbeit, Energie,...)

Darüber hinaus:

- Alternative (äquivalente) Formulierungen der KM ("Lagrange", "Hamilton")
- beruhen auf übergeordnetem "Wirkungsprinzip" (jenseits der KM gültig)
- ebnen den Weg zur QM
- sind (teilweise) flexibler in der Handhabung und praktischen Anwendung

Kapitel 2

Newton'sche Mechanik

2.1 Die Newton'schen Axiome (1687)

Axiom: Keines Beweises bedürftiger Grundsatz; Näheres: [6], Kap. 3.1

Lex prima: "Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seine Zustand zu ändern."

Lex secunda: "Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher die Kraft wirkt."

Lex tertia: "Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und entgegengesetzter Richtung."
(actio = reactio)

Lex quarta: Kräfte addieren sich wie Vektoren (Kräfteparallelogramm)

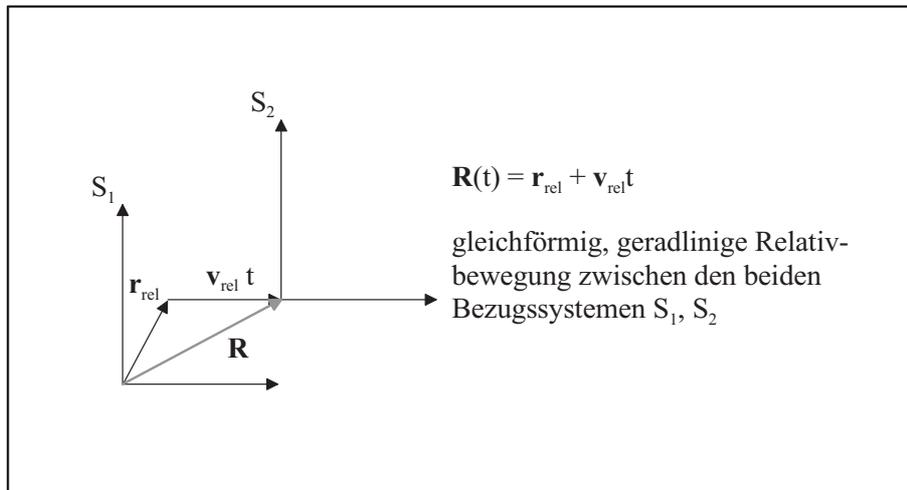
Definition: Impuls ("Bewegungsgröße"); Näheres zu Newton's Formulierung der Grundprinzipien: [6], Kap. 3.2; [13], §1

$$\mathbf{p} := m \cdot \mathbf{v}$$

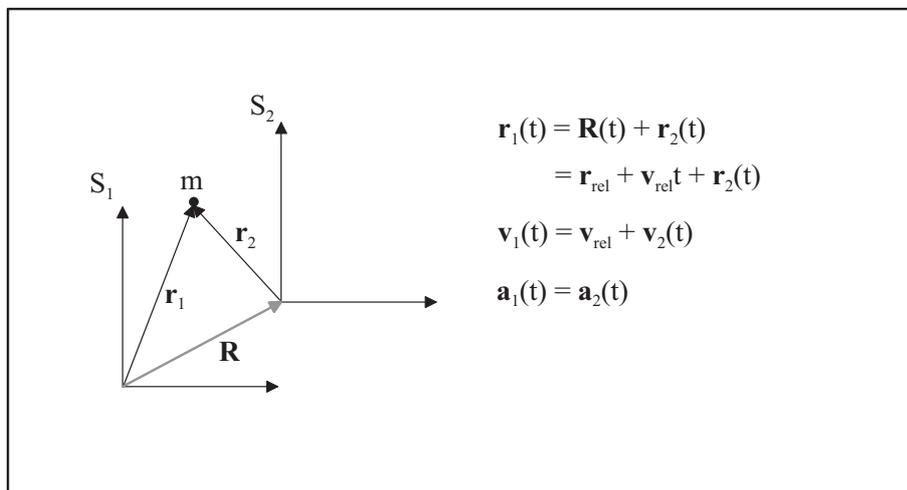
2.1.1 Analyse des 1. Axioms: Inertialsystem (IS) und Galilei-Transformation (GT)

”Galilei’sches Trägheitsprinzip”

falls $\mathbf{F} = 0 \longrightarrow \mathbf{p} = \text{konst.}$



Beschreibung eines MPs aus Sicht von S_1 und S_2 :



Inertialsystem \iff Bezugssystem, in dem sich ein kräftefreier Körper geradlinig, gleichförmig bewegt. Falls $\mathbf{F} = 0 \longrightarrow \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = 0$

Galilei-Transformation $\iff (\mathbf{r}_1, t_1) \longrightarrow (\mathbf{r}_2, t_2)$
mit $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{\text{rel}} - \mathbf{v}_{\text{rel}}t$ und $t_2 = t_1 = t$ (Näheres: Übung 1.4)

2.1.2 Analyse des 2. Axioms: Grundlegende BWGl gilt im IS

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$$

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}$$

falls $\dot{m} = 0 \longrightarrow$

$$m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$$

$\dot{m} \neq 0$: z.B. klassisches Raketenproblem, spezielle Relativitätstheorie

Folgerung:

(i) $0 = \mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} \implies \mathbf{p} = \text{konst.} \longleftrightarrow 1. \text{ Axiom}$

(ii) 'Forminvarianz' der BWGl unter GTs $S_1 : m\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1 = m\mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_2 : S_2$

Beispiel: senkrechter Wurf aus fahrendem Zug ($\mathbf{v}_{Zug} = \text{konst.}$)

$S_1 \curvearrowright$

$S_2 \updownarrow$

2.1.3 Analyse des 3. Axioms: actio = reactio

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{F}_{12} : \text{Kraft von Teilchen 1 auf Teilchen 2} \\ \mathbf{F}_{21} : \text{Kraft von Teilchen 2 auf Teilchen 1} \end{array} \right\} \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

$$\xrightarrow{2. \text{ Axiom}} m_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = -m_2\mathbf{a}_2$$

$$\implies \frac{m_1}{m_2} = \frac{|\mathbf{a}_2|}{|\mathbf{a}_1|} \equiv \frac{a_2}{a_1} \longrightarrow \text{definiertem Massenverhältnis}$$

\rightarrow absolute Skala wird durch Festlegung der Standardmasse $[m] = 1\text{kg}$ eingeführt

\rightarrow 'träge Masse': (skalares) Maß für den Widerstand gegen Bewegungsänderung

\rightarrow Kraft: abgeleitete Größe (nach Newton II) $[\mathbf{F}] = 1 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ N}$

Mögliche Situationen:

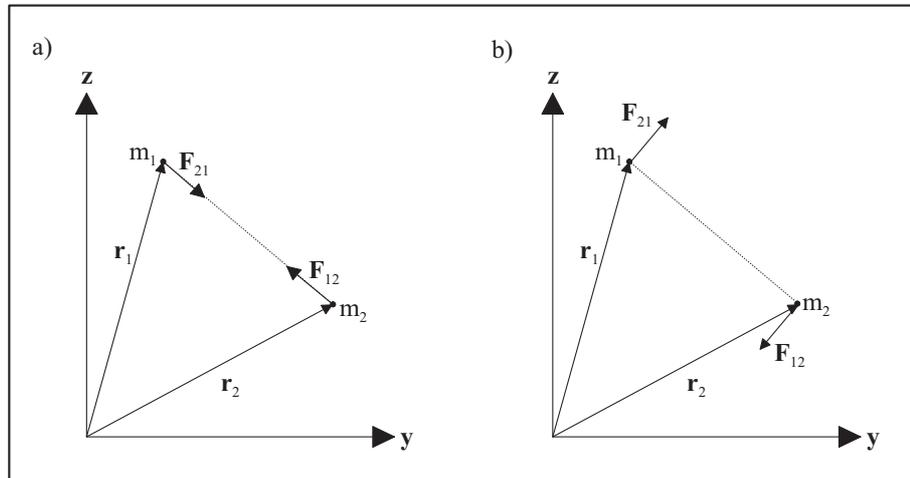


Abbildung 2.1: Die Kraftvektoren können auf einer gemeinsamen Geraden liegen oder parallel zu einander sein, müssen aber in entgegengesetzte Richtung zeigen

- 3. Axiom erfüllt für Gravitations- und Coulombwechselwirkung
- Darüber hinaus gilt es i.a. nur in modifizierter Form [11], Kap. 3.1.6

2.1.4 Abschließende Diskussion

- (i) Physikalischer Ursprung von Kräften wird in KM nicht behandelt
- (ii) Grundproblem der KM: Lsg. der gewöhnlichen DGl 2. Ordnung $m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ (+ AB's) (Analytische Lösungsverfahren sind nur für Spezialfälle bekannt, ein numerisches Lösungsverfahren gibt es in [1] KM, Kap. 2.3)
- (iii) Erhaltungssätze folgen als Konsequenz der Axiome

2.2 Grundbegriffe und Erhaltungssätze

2.2.1 Impuls

a) Einfachste Situation: ein kräftefreier MP:

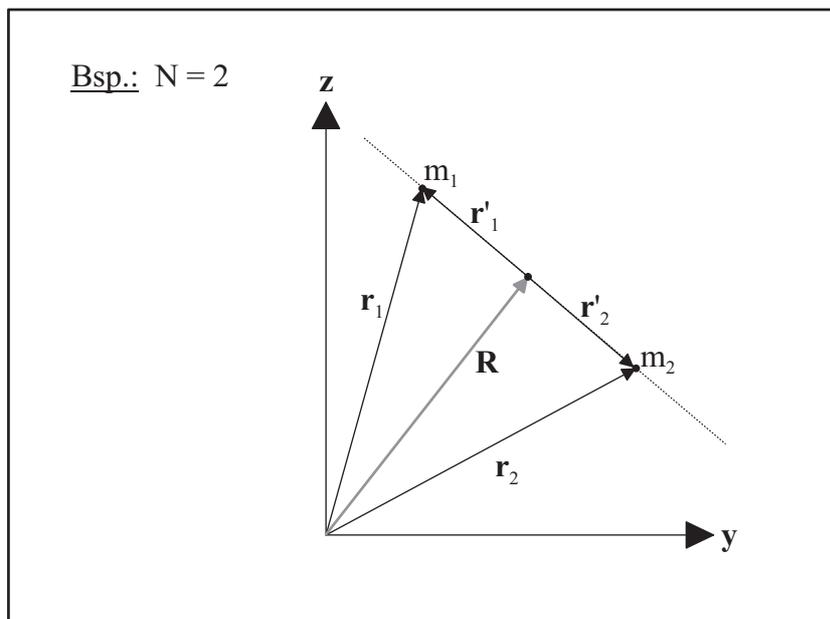
$$\mathbf{F} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{p} = \text{konst.} = m \cdot \mathbf{v}_0 \quad \text{Impulserhaltung}$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} \cdot t \quad \text{geradlinig, gleichförmige Bewegung}$$

b) System von N MPs:

- 'innere Kraft' \mathbf{f}_{ki} : Wechselwirkung zwischen zwei MPs (Kraft von k auf i)
- 'äußere Kraft' \mathbf{F}_i : äußerer Einfluß auf den i-ten MP
- 'Abgeschlossenes System': Keine äußeren Kräfte ($\mathbf{F}_i = 0$ für $i = 1, \dots, N$)
- 'Offenes System': $\mathbf{F}_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, N\}$
- Gesamtmasse: $M = \sum_{i=1}^N m_i$
- Position des 'Schwerpunktes' (SP) (auch Massenmittelpunkt):

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{r}_i$$
- SP-Geschwindigkeit: $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{v}_i$
- SP (Gesamt-) Impuls: $\mathbf{P} = M \cdot \mathbf{V} = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i$
- Position eines MPs bzgl. SP: $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$



◁ BWGl für k-ten MP:

$$\dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{F}_k + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{ik}$$

beachte : $\mathbf{f}_{ik} = -\mathbf{f}_{ki} \longrightarrow \mathbf{f}_{kk} = 0$

$$\longrightarrow \sum_{k=1}^N \dot{\mathbf{p}}_k = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k + \sum_{i,k=1}^N \mathbf{f}_{ik}$$

$$\parallel \parallel \parallel$$

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_{ext} + 0$$

”Impulssatz / SP-Satz”

Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse in ihm vereinigt wäre und alle äußeren Kräfte an ihm angreifen würden.

$$\text{falls } \mathbf{F}_{ext} = 0 \implies \dot{\mathbf{P}} = 0 \longrightarrow \mathbf{P} = \text{konst.}$$

Impulserhaltung (gilt in abgeschlossenen Systemen)

In einem abgeschlossenen System kann man von einem 'raumfesten' IS durch eine GT in das (inertiale) 'SP-System' übergehen

2.2.2 Drehimpuls

a) ein MP:

Definition: Drehimpuls (= Moment des Impulses)

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$$

$$|\mathbf{l}| = l = r \cdot p \cdot \sin \gamma$$

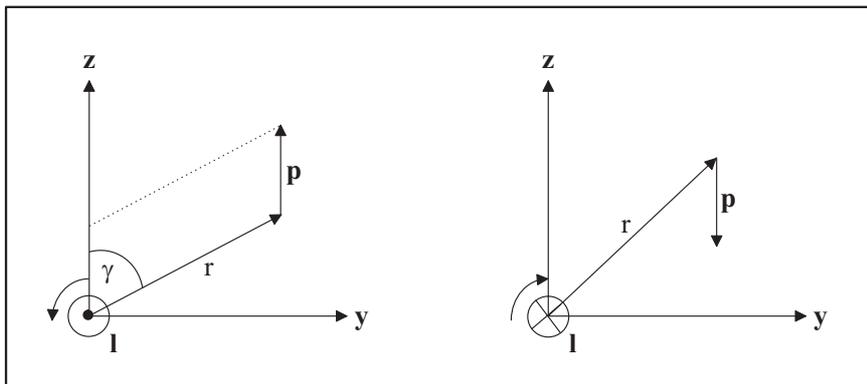


Abbildung 2.2: Im linken Bild zeigt der Drehimpulsvektor aus dem Blatt heraus, im rechten Bild hinein

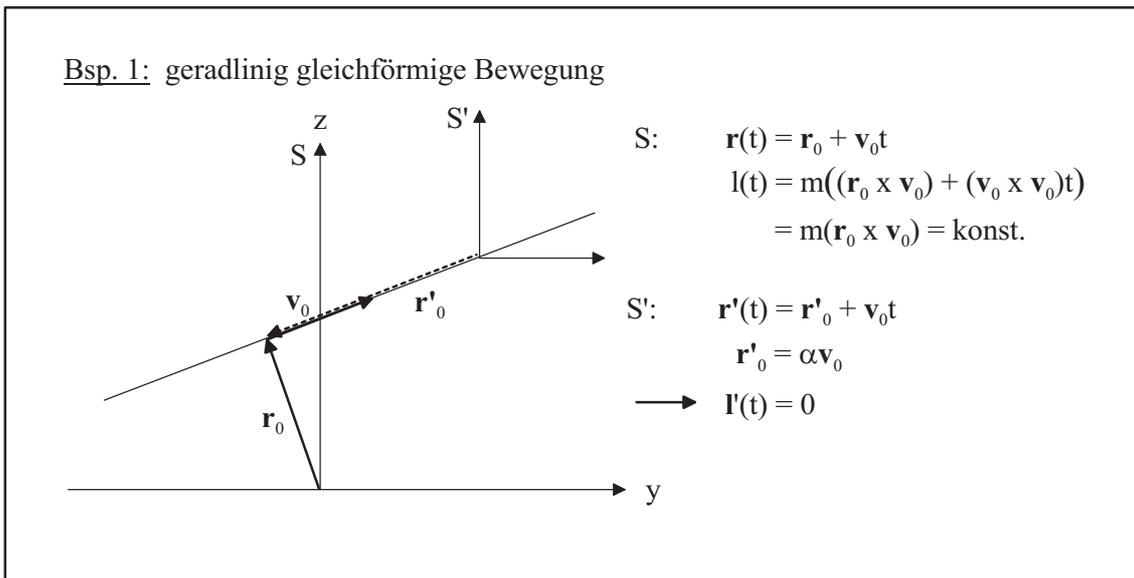


Abbildung 2.3: Bewegung von S transformiert in S'

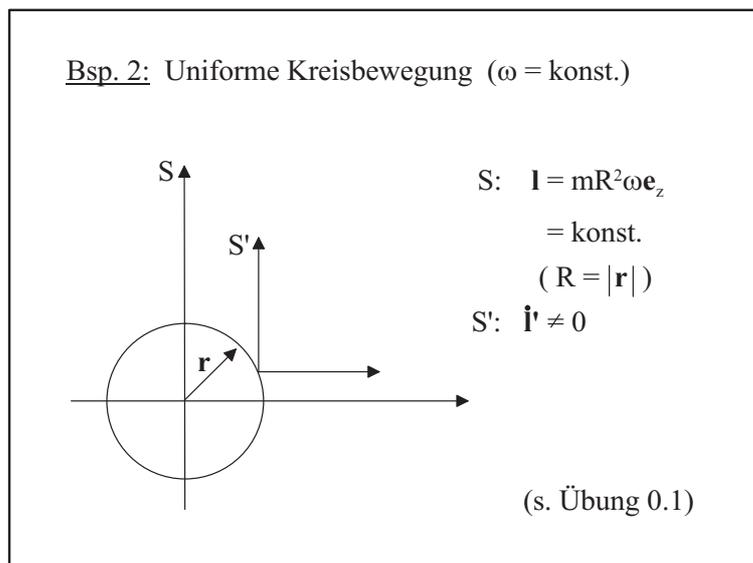


Abbildung 2.4: Uniforme Kreisbewegung

Bemerkung: Vollständige Angabe von \mathbf{l} verlangt Festlegung des Bezugspunktes für die Momentbildung (gilt für jedes Moment eines Vektors)

$$\triangleleft \quad \dot{\mathbf{i}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = m(\mathbf{v} \times \mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Definition: Drehmoment $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

$\dot{\mathbf{i}} = \mathbf{M}$	Drehimpulssatz
---------------------------------	----------------

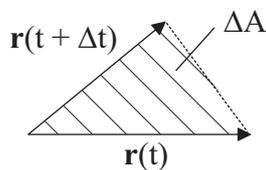
falls $\mathbf{M} = 0 \implies \dot{\mathbf{i}} = 0, \mathbf{l} = \text{konst.}$	Drehimpulserhaltung
--	---------------------

$$\mathbf{M} = 0 \quad \text{falls} \quad \begin{array}{l} (i) \quad \mathbf{F} = 0 \\ (ii) \quad \mathbf{F} = F\mathbf{e}_r : \text{Zentralkraft } \mathbf{F} \parallel \mathbf{r} \end{array}$$

Zwei Aspekte der Drehimpulserhaltung:

- (i) Erhaltung der Richtung \longrightarrow ebene Bewegung
- (ii) Erhaltung des Betrages:

\triangleleft



$$\begin{aligned} \Delta A &\approx \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t + \Delta t)| \\ &= \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times [\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)]| \\ \frac{\Delta A}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \left| \mathbf{r}(t) \times \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \right| \\ \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} &= \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| \\ \dot{\mathbf{A}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{2m} \mathbf{l} \end{aligned}$$

(als Richtung wird die Flächennormale festgelegt)

'Flächengeschwindigkeit'

$|\dot{\mathbf{A}}| = \text{konst.} \longrightarrow$ Flächensatz
 ("Gleiche Zeiten, gleiche Flächen")

b) System von N MPs:

Definition: Gesamtdrehimpuls

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}(t) &= \sum_{k=1}^N \mathbf{l}_k(t) \\
 &= \sum_k (\mathbf{r}_k(t) \times \mathbf{p}_k(t)) \\
 \longrightarrow \mathbf{L} &= \sum_k (\mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{p}}_k) \\
 &= \sum_{k=1}^N (\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k) + \sum_{i,k=1}^N (\mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_{ik}) \\
 \underline{\text{NR}}: \quad \sum_{i,k} (\mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_{ik}) &= \sum_{i,k} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ki}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \{(\mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_{ik}) + (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ki})\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \{(\mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_{ik}) - (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ik})\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{f}_{ik}\} = 0, \quad \text{falls} \\
 \mathbf{f}_{ik} &= \mathbf{f}_{ik} \cdot (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)
 \end{aligned}$$

(\mathbf{f}_{ik} zeigt in Richtung von $(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)$; vgl. Skizze auf Seite 8)

$$\text{Gesamtdrehmoment} \quad \mathbf{M} = \sum_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k) = \sum_k \mathbf{M}_k$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}} \quad \text{Drehimpulserhaltung}$$

$$\text{falls } \mathbf{M} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{L}} = 0 \\ \mathbf{L} = \text{konst.} \end{array} \right\} \quad \text{Drehimpulserhaltung}$$

(gilt in abgeschlossenen Systemen)

Drehimpuls + Schwerpunkt: (vgl. Skizze Seite 9)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_k &= \mathbf{r}'_k + \mathbf{R} \quad ; \quad \mathbf{v}_k = \mathbf{v}'_k + \mathbf{V} \\
 \longrightarrow \mathbf{L} &= \sum_k m_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k) \\
 &= \sum_k m_k \{ (\mathbf{r}'_k + \mathbf{R}) \times (\mathbf{v}'_k + \mathbf{V}) \} \\
 &= \underbrace{\sum_k m_k (\mathbf{R} \times \mathbf{V})}_{\hookrightarrow M(\mathbf{R} \times \mathbf{V})} + (\mathbf{R} + \mathbf{v}'_k) + (\mathbf{r}'_k \times \mathbf{V}) + (\mathbf{r}'_k \times \mathbf{v}'_k) \\
 \triangleleft \sum_k m_k \mathbf{r}'_k &= \sum_k m_k (\mathbf{r}_k - \mathbf{R}) = \sum_k m_k \mathbf{r}_k - M\mathbf{R} = M\mathbf{R} - M\mathbf{R} = 0 \\
 \longrightarrow \sum_k m_k \mathbf{v}'_k &= \frac{d}{dt} \sum_k m_k \mathbf{r}'_k = 0
 \end{aligned}$$

$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{SP} + \mathbf{L}'$	wobei $\mathbf{L}_{SP} = \mathbf{R} \times \mathbf{P}$, $\mathbf{L}' = \sum \mathbf{l}'_k = \sum m_k (\mathbf{r}'_k \times \mathbf{v}'_k)$
--	---

$ \begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k) = \sum_k \{ (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_k) \times \mathbf{F}_k \} \\ &= \mathbf{R} \times \sum_k \mathbf{F}_k + \sum_k (\mathbf{r}'_k \times \mathbf{F}_k) = \mathbf{R} \times \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{M}'_{ext} \\ &= \mathbf{M}_{SP} + \mathbf{M}'_{ext} \end{aligned} $

Drehimpulssatz $\implies \dot{\mathbf{L}}_{SP} + \dot{\mathbf{L}}_{ext} = \mathbf{M}_{SP} + \mathbf{M}_{ext}$

Wegen $\dot{\mathbf{L}}_{SP} = M(\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{V}}) = \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{P}} \stackrel{\text{SP-Satz}}{=} \mathbf{R} \times \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{M}_{SP}$ folgt

$\dot{\mathbf{L}}_{SP} = \mathbf{M}_{SP}$

Drehimpulssatz für SP

$\dot{\mathbf{L}}' = \mathbf{M}'_{ext}$

Drehimpulssatz für Teilchensystem bzgl. SP

(hat die selbe Form wie der ursprüngliche Drehimpulssatz, obwohl das SP-System i.a. kein Inertialsystem ist)

2.2.3 Arbeit und Energie

a) Ein MP:

Definition: Sei $\mathbf{r}(t)$ die in $[t_0, t]$ durchlaufene Bahn

$$A := \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t'), t') \cdot \mathbf{v}(t') dt' \quad \text{Arbeit}$$

Falls Kraft "Vektorfeld" $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r)$ ist: [8], Kap. 4.2

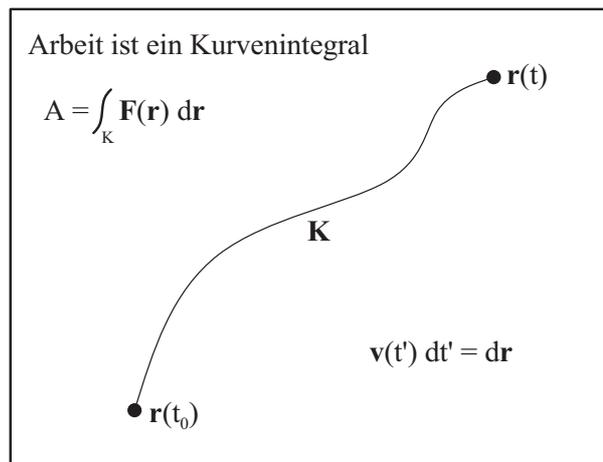


Abbildung 2.5: Kurvenintegral der Arbeit

Diskussion:

- (i) Falls $\mathbf{F} = \text{konst.}$ und Weg geradlinig $\rightarrow A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$
- (ii) $A = 0$ falls $\mathbf{F} \perp \mathbf{r}$

Beispiel 1: Anheben einer Masse $m \perp$ zur Äquipotentialfläche des Schwerfeldes $\rightarrow A = 0$ bei $v_{\parallel} = 0$

Beispiel 2: Uniforme Kreisbewegung

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (R \cdot \cos \omega t, R \cdot \sin \omega t) \\ \mathbf{v} &= (-R \cdot \omega \cdot \sin \omega t, R \cdot \omega \cdot \cos \omega t) \\ \mathbf{a} &= (-R \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t, -R \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t) \\ &= -\omega^2 \cdot \mathbf{r} \\ \rightarrow m \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{F}(\mathbf{r}) \\ &= -m \cdot \omega^2 \cdot \mathbf{r} \\ \rightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0 &\iff \mathbf{F} \perp \mathbf{v} \implies A = 0 \end{aligned}$$

$$(iii) \text{ "Arbeit" } [A] = 1 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = 1 \text{Nm} = 1 \text{Joule}$$

$$(iv) P := \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t'), t') \cdot \mathbf{v}(t') dt' = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) \cdot \mathbf{v}(t)$$

$$\text{"Leistung" } [P] = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \text{Watt}$$

$$\begin{aligned} \triangleleft \quad A &= \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t'), t') \cdot \mathbf{v}(t') dt' \\ &= m \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{v}}(t') \cdot \mathbf{v}(t') dt' \\ &= \frac{m}{2} \int_{t_0}^t \frac{d}{dt'} (v^2(t')) dt' \\ &= \frac{m}{2} (v^2(t) - v^2(t_0)) \\ &= \frac{1}{2m} (\mathbf{p}^2(t) - \mathbf{p}^2(t_0)) \end{aligned}$$

Definition: kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{p^2}{2m} \geq 0$$

$$\longrightarrow T(t) = T_0(t) + A(t_0 \rightarrow t) \quad \text{'A-T-Relation'}$$

Definition: konservatives Kraftfeld

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &:= -\nabla U(\mathbf{r}) \\ \iff \int_{K_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' &= \int_{K_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ \iff \oint_K \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{'Beweis'}}{\implies} \int_{K_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' &= - \int_{K_1} \nabla U(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ &= - \int_{r_0}^r dU = U(\mathbf{r}_0) - U(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Rückweg wird gezeigt unter der Zuhilfenahme des Mittelwertsatzes. Außerdem folgt:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = 0$$

Rückweg wird gezeigt mit dem Integralsatz von Stokes:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A} = \oint_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{siehe [8], Kap. 4.3})$$

Konservatives Kraftfeld:

$\mathbf{F} = -\nabla U$	\iff	$\nabla \times \mathbf{F} = 0$
\Downarrow	$\swarrow \searrow$	\Downarrow
$\int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$	\iff	$\oint_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$

$$U(\mathbf{r}) = - \int^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r} \quad \text{"potentielle Energie"}$$

Übliche Festlegung der unbestimmten Konstanten durch $U(\mathbf{r}) \xrightarrow{\mathbf{r} \rightarrow \infty} 0$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \quad A &= U(1) - U(2) = T(2) - T(1) \\ \iff \quad T(1) + U(1) &= T(2) + U(2) \end{aligned}$$

$E = T + U = \text{konst.}$	Energieerhaltung
-----------------------------	------------------

Allgemeine Situation:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_{\text{konservativ}} + \mathbf{F}_{\text{dissipativ}} \\ \nabla \times \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F}_{\text{diss}} \neq 0 \end{aligned}$$

◁ Newton II:

$$\begin{aligned} m \cdot \dot{\mathbf{v}} &= -\nabla U(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_{\text{diss}} \\ \mathbf{F}_{\text{diss}} &= m \cdot \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \nabla U \cdot \mathbf{v} \\ \iff \mathbf{F}_{\text{diss}} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} v^2 + U(\mathbf{r}(t)) \right) \end{aligned}$$

$\frac{d}{dt} (T + U) = \frac{dE}{dt} = \mathbf{F}_{\text{diss}} \cdot \mathbf{v}$	"allg. Energiesatz"
--	---------------------

Definition: $A_{\text{diss}} = \int \mathbf{F}_{\text{diss}} \cdot \mathbf{v} dt \longrightarrow \frac{dA_{\text{diss}}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{diss}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{P}_{\text{diss}}$

b) System von N MPs:

Ausgangspunkt: BWGl für k-ten MP: $\dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{F}_k + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{ik}$

Einschränkungen:

- (i) $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k(\mathbf{r}_k) = -\nabla_k \cdot U_k(\mathbf{r}_k)$ (äußere Kräfte sind konservativ)
- (ii) $\mathbf{f}_{ik} = \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) = \mathbf{f}_{ki}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)$ (hängen nur jeweils von $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)$ ab)
- (iii) $\nabla_k \times \mathbf{f}_{ik} = \nabla_i \times \mathbf{f}_{ki} = 0$ (sind konservativ)

$$\longrightarrow \mathbf{f}_{ik} = -\nabla_k V_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k), \mathbf{f}_{ki} = -\nabla_i V_{ki}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)$$

Konservative innere Kräfte zwischen zwei MPs können auf ein gemeinsames Potential zurückgeführt werden (d.h $V_{ik} = V_{ki}$)

$\nabla_k V_{ik} = -\nabla_k V_{ki}$	"zwei Teilchen WW"
--------------------------------------	--------------------

$$\begin{aligned} \triangleleft \quad \dot{\mathbf{p}}_k &= \mathbf{F}_k + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{ik} \\ \longrightarrow \sum_k \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{v}_k &= \sum_k m_k \cdot \dot{\mathbf{v}}_k \cdot \mathbf{v}_k - \sum_k \mathbf{F}_k \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{v}_k \\ \text{RS :} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_k m_k \mathbf{v}_k^2 + \sum_k \nabla_k U_k(\mathbf{v}_k) \cdot \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_k \left(\frac{m_k}{2} \mathbf{v}_k^2 + U_k(\mathbf{r}_k(t)) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \sum_k (T_k + U_k) = \frac{d}{dt} (T + U) \\ \text{LS :} &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \left(\mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{v}_k + \mathbf{f}_{ki}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{v}_i \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \left(\mathbf{f}_{ik} \cdot \mathbf{v}_k - \mathbf{f}_{ik} \cdot \mathbf{v}_i \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \mathbf{f}_{ik} \cdot (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i) \end{aligned}$$

Angewandte Transformation : $\mathbf{r}_{ik} := \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$
 $\mathbf{v}_{ik} := \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_k$

$$\begin{aligned}\nabla_i V_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) &= \nabla_{ik} V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) = -\nabla_k V_{ik} \\ \hookrightarrow \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) &= -\nabla_k V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) = \nabla_{ik} V_{ik}(\mathbf{r}_{ik})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\longrightarrow \text{RS :} &= -\frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) \cdot \mathbf{v}_{ik} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \nabla_{ik} V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}) \cdot \frac{d\mathbf{r}_{ik}}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} V_{ik}(\mathbf{r}_{ik}(t)) \\ &= -\frac{d}{dt} V\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\frac{d}{dt} (T + U + V) &= 0 \\ T + U + V &= \text{konst.}\end{aligned}} \longrightarrow \text{Energieerhaltung}$$

Die Beträge der ges. Energie E:

- $T = \sum_k T_k$: kinetische Energie des Teilchensystems
- $U = \sum_k U_k$: potentielle Energie aufgrund äußerer Kräfte
- $V = \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} V_{ik} = \sum_{i < k} V_{ik}$: 'interne' WW-Energie

Beispiele:

$$\begin{aligned}\underline{N=2}: \quad V &= \frac{1}{2} (V_{12} + V_{21}) \stackrel{V_{12} \equiv V_{21}}{=} V_{12} \\ \underline{N=3}: \quad V &= \frac{1}{2} (V_{12} + V_{13} + V_{23} + V_{21} + V_{31} + V_{32}) \\ &= \underbrace{V_{12} + V_{13} + V_{23}} \\ &\Rightarrow \sum_{i < k} V_{ik}\end{aligned}$$

Kapitel 3

Anwendungen I

3.1 Elementare Bewegungsprobleme

3.1.1 Eindimensionale Probleme ($E = T + U = \text{konst.}$)

a) Qualitative Vorbemerkung:

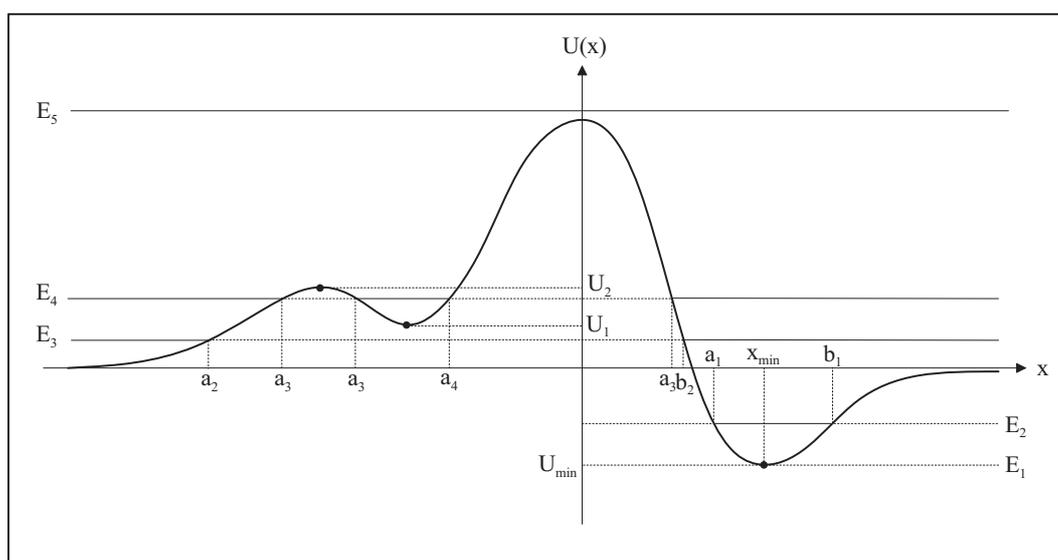


Abbildung 3.1: Potential

$$E = T + U \iff E - U(x) = T > 0$$

$$\iff$$

$$E \geq U(x)$$

- (i) $E < U_{min}$: nicht möglich
- (ii) $E_1 = U_{min}$: ruhender MP bei $x = x_{min}$
- (iii) $U_{min} < E_2 < 0$: gebundene (finite) Bewegung in $[a_1, b_1]$
 $\dot{x}(a_1) = v(a_1) = v(b_1) = \dot{x}(b_1) = 0$; a_1, b_1 Umkehrpunkte
- (iv) $0 < E_3 < U_1$: ungebundene (infinite) Bewegung entweder in $(-\infty, a_2]$
oder in $[b_2, \infty)$
- (v) $U_1 < E_4 < U_2$: finite Bewegung in $[a_3, b_3]$ oder infinite in $(-\infty, a_3]$
oder $[b_3, \infty)$
- (vi) $U_{max} < E_5$: infinite Bewegung in $(-\infty, \infty)$

Eine Analoge Diskussion ist möglich im dreidimensionalen Raum im Falle eines Zentralkraftproblems

b) Quantitative Vorbemerkung:

$$E = T + U \iff v^2(t) = \frac{2(E - U(x))}{m}$$

$$\iff \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2(E - U(x))}{m}}$$

Lösung der DGl durch 'Variablentrennung':

$$\pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2(E - U(x))}{m}}} = \int dt$$

$$\iff t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int [E - U(x)]^{-\frac{1}{2}} dx + konst. = t(x)$$

→ Umkehrung liefert $x(t)$

→ Energiesatz = 1. Integral der BWGl

c) Mathematische Vorbemerkung zur gewöhnlichen DGl:

Siehe dazu [8], Kap.5; [1], Kap. 3.2, Anhang C.3; [11], Mathematische Ergänzungen (CD), Kap. 2 und 6

- (i) Hinreichende Existenz- und Eindeutigkeitsbedingungen: $\dot{x} = f(x, t)$
gewöhnliche DGl 1. Ordnung (explizit)
Falls f stetig (partiell) differenzierbar ist, so existiert (für jedes Paar von Anfangswerten (x_0, t_0)) eine eindeutige Lösung der DGl., d.h.

$$\exists x(t) : \dot{x} = f(x(t), t) \quad \text{mit} \quad x(t_0) = x_0$$

(ii) Analoges gilt für DGI-Systeme:

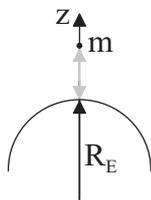
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n, t) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, t)\end{aligned}$$

(iii) Eine DGI n-ter Ordnung kann man auf ein System von DGI's 1. Ordnung zurückführen, insbesondere:

$$\begin{aligned}\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) &\implies \dot{x} = v \\ &\dot{v} = f(x, v, t)\end{aligned}$$

(iv) Systematische Lösungsmethoden sind nur für spezielle Typen von DGI's bekannt (insb. lineare DGI's mit konstanten Koeffizienten)

d) Bewegung im homogenen Schwerfeld (der Erde):



$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -m^* g \mathbf{e}_z \\ g &= \frac{M_E \cdot \gamma}{R_e^2} \\ &= 9,81 \frac{m}{s^2} \quad (\text{Gravitationsbeschleunigung})\end{aligned}$$

(Werte Siehe Kapitel C)

Frage 1: Wie kommt man vom allg. Gravitationsgesetz zum homogenen Schwerfeld der Erde?

Frage 2: Träge und Schwere Masse

→ empirisch: $m = m^*$ (mit Messgenauigkeit $\frac{\Delta m}{m} = \frac{m-m^*}{m} \lesssim 10^{-10}$)

→ theoretisch: $m = m^*$ Ist eine Grundannahme der Allgemeinen Relativitätstheorie (Äquivalenzprinzip: Gravitationskräfte sind äquivalent zu Trägheitskräften)

Exkurs zu Frage 1: Ausgangspunkt: Newton's Gravitationsgesetz

$$\mathbf{F}_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\mathbf{F}_{12}$$

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

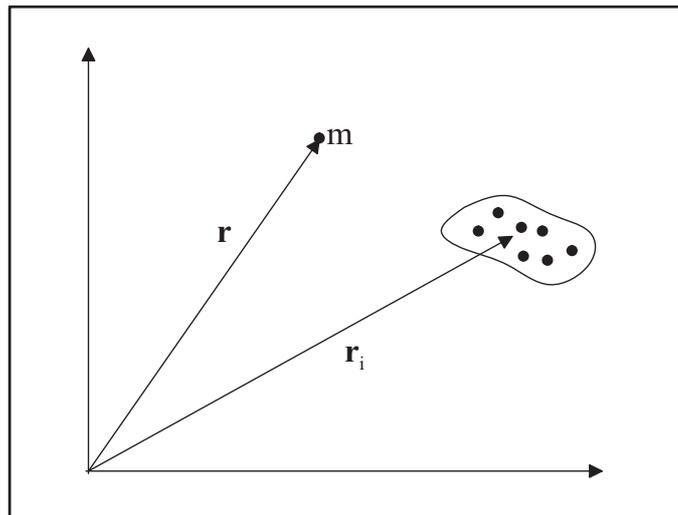
(zur Veranschaulichung siehe hierzu Abbildung 2.1)

$$\nabla_1 \times \mathbf{F}_{21} = \nabla \times \mathbf{F}_{12} = 0$$

→ potentielle Energie:

$$U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \equiv U_{12} = U_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

(Prüfe: $\nabla_1 U_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{12} = -\nabla_2 U_{12}$)

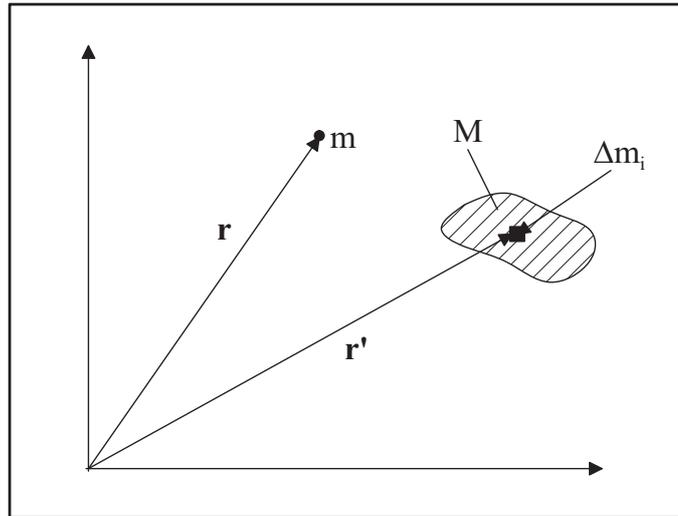


Schritte:

- Potentielle Energie des MPs m aufgrund der diskreten Massenverteilung (m_1, \dots, m_N)

$$U(\mathbf{r}) = -\gamma m \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

- Potentielle Energie aufgrund kontinuierlicher Massenverteilung



$$\begin{aligned}
 m_i \equiv \Delta m_i &\approx \rho(\mathbf{r}_i) \Delta V_i \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} \rho(\mathbf{r}') dV' = \rho(\mathbf{r}') d^3 r' \\
 &\longrightarrow M = \int_V \rho(\mathbf{r}') d^3 r' \\
 &\longrightarrow U(\mathbf{r}) = -\gamma m \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'
 \end{aligned}$$

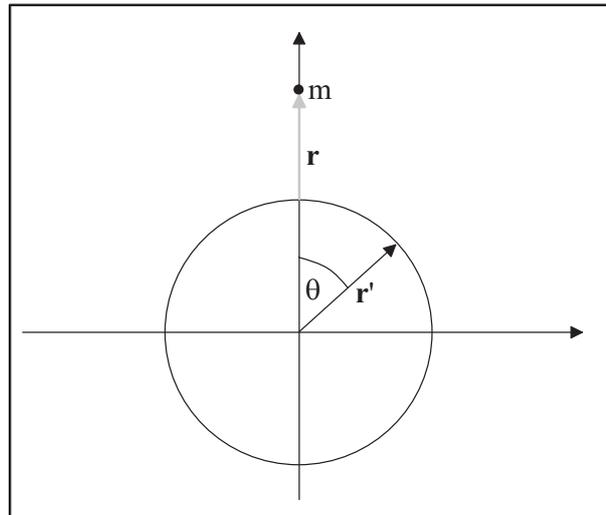
- Annahme: homogene Massenverteilung $\rho(\mathbf{r}') = \rho_0$
 Auswertung des Integrals:

$$\begin{aligned}
 d^3 r' &= r'^2 dr' \sin \Theta' d\Theta' d\phi' \\
 \mathbf{r} &= (0, 0, z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \longrightarrow U(\mathbf{r}) &= -\gamma m \rho_0 \int \frac{d^3 r'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Theta'}} \\
 &= -\gamma m \rho_0 \int_0^{R_E} dr' r'^2 \int_0^\pi \frac{\sin \Theta' d\Theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Theta'}} \int_0^{2\pi} d\phi'
 \end{aligned}$$

1. Substitution:

$$\begin{aligned}
 x &= \cos \Theta' ; & x(0) &= 1 \\
 dx &= -\sin \Theta' d\Theta' ; & x(\pi) &= -1
 \end{aligned}$$



$$U(\mathbf{r}) = -2\pi\gamma m\rho_0 \int_0^{R_E} dr' r'^2 \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'x}}$$

Bemerkung:

Zu diesem Zwischenergebnis gelangt man direkt durch die Zerlegung des Volumenelements $d^3r' = r'^2 dr' d(\cos \Theta') d\phi'$ und der Verwendung der entsprechenden Integrationsgrenzen.

2. Substitution:

$$\begin{aligned} y &= r^2 + r'^2 - 2rr'x \\ dy &= -2rr' dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'x}} &= -\frac{1}{2rr'} \int_{y(-1)}^{y(1)} \frac{dy}{\sqrt{y}} \\ &= -\frac{1}{rr'} \left[r^2 + r'^2 - 2rr'x \right]^{\frac{1}{2}} \Big|_{-1}^1 \\ &= -\frac{1}{rr'} \left[\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'} - \sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr'} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{rr'} \left[\sqrt{(r-r')^2} - \sqrt{(r+r')^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{rr'} \begin{cases} r - r' - (r + r') = \frac{2}{r} & r > r' \\ r' - r - (r + r') = \frac{2}{r'} & r' > r \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Fall 1: } r > R_E \quad \longrightarrow \quad U(\mathbf{r}) &= -4\pi\gamma m\rho_0 \frac{1}{r} \int_0^{R_E} r'^2 dr' \\
&= \underbrace{-\frac{4\pi}{3}\rho_0 R_E^3 \gamma \frac{m}{r}}_{M_E} \\
&= -\gamma \frac{mM_E}{r} = U(r) \\
\longrightarrow \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) &= -\gamma \frac{mM_E}{r^3} \mathbf{r} = -\gamma \frac{mM_E}{r^2} \mathbf{e}_r
\end{aligned}$$

Definition:

$$\left. \begin{aligned}
\text{'Gravitationsfeld' } G(\mathbf{r}) &= \frac{1}{m} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{M_E}{r^2} \mathbf{e}_r \\
\text{'Gravitationspotential' } \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{m} U(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{M_E}{r}
\end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{unabhängig vom} \\ \text{'Probekörper' } m \end{array}$$

Entwicklung für $r = R_E + z'$ mit $z' \ll R_E$:

$$\begin{aligned}
\longrightarrow \quad U(r) &= -\gamma m M_E \frac{1}{R_E + z'} \\
&= -\gamma \frac{m M_E}{R_E} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z'}{R_E}} \\
&\approx -\gamma \frac{m M_E}{R_E} \cdot \left(1 - \frac{z'}{R_E} + \left(\frac{z'}{R_E} \right)^2 - \dots \right) \\
&\approx -\gamma \frac{m M_E}{R_E} + \gamma \frac{m M_E}{R_E^2} z' \pm \dots \\
&= U_0 + mgz' + \dots \quad \left(g = \gamma \frac{m M_E}{R_E^2} \right) \\
\longrightarrow \quad \tilde{U} = U - U_0 &= mgz' ; \quad \mathbf{F}(z) = -\frac{dU}{dz} \mathbf{e}_z = -mg \mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

$$\text{Fall 2: } r < R_E \quad \longrightarrow \quad \int_0^{R_E} dr' = \underbrace{\int_0^r dr'}_{r > r'} + \underbrace{\int_r^{R_E} dr'}_{r' > r}$$

$$\begin{aligned}
\longrightarrow \quad U(r) &= -4\pi\gamma m\rho_0 \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r r'^2 dr' + \int_0^{R_E} r' dr' \right\} \\
&= -4\pi\gamma m\rho_0 \left\{ \frac{1}{3} r^2 + \frac{1}{2} (R_E^2 - r^2) \right\} \\
&= -4\pi\gamma m\rho_0 \left[\frac{1}{2} R_E^2 - \frac{1}{6} r^2 \right]
\end{aligned}$$

$$M_E = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R_E^3 \iff \rho_0 = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{M}{R_E^3}$$

$$U(r) = -\gamma m M_E \left[\frac{3}{2} \frac{1}{R_E} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R_E^3} \right]$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{m M_E}{R_E^3} \mathbf{r}$$

Zusammenfassung:

$$U(r) = -\gamma m M_E \begin{cases} \frac{1}{r} & r > R_E \\ \frac{3}{2} \frac{1}{R_E} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R_E^3} & r \leq R_E \end{cases}$$

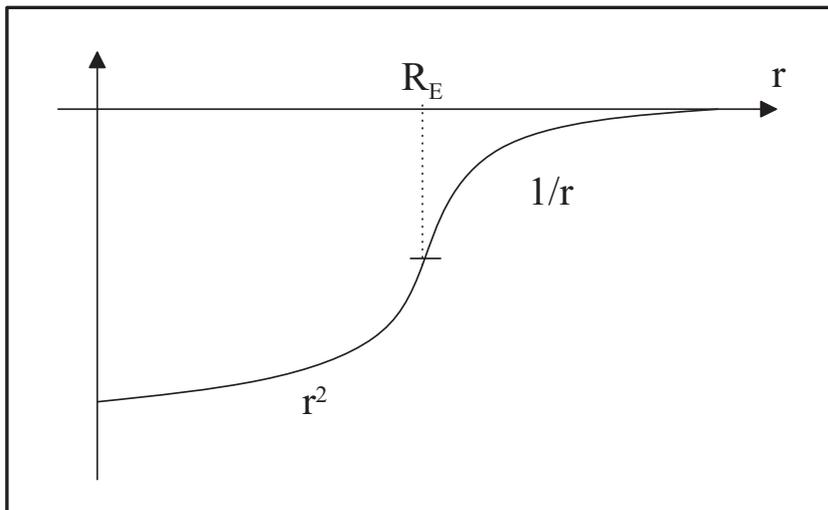


Abbildung 3.2: Potentialverlauf im inneren und im Außenbereich der Erde

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\gamma m M_E \begin{cases} \frac{1}{r^3} \mathbf{r} & r \geq R_E \\ \frac{1}{R_E^3} \mathbf{r} & r \leq R_E \end{cases}$$

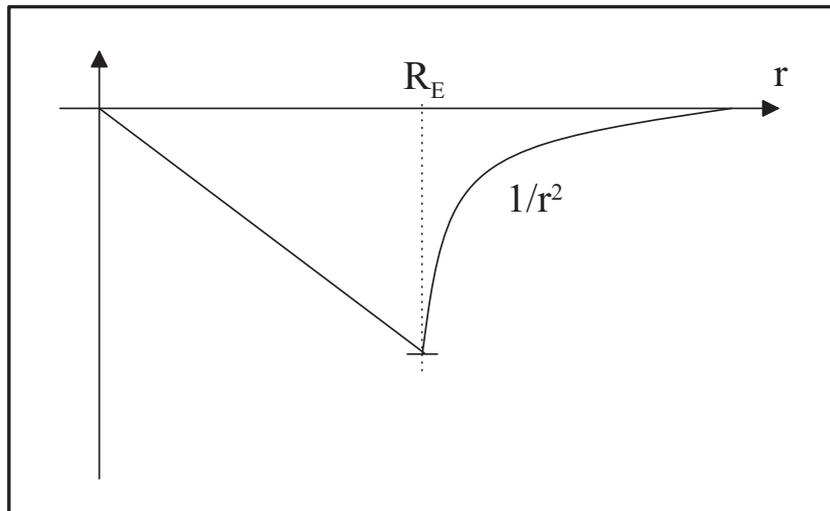


Abbildung 3.3: Verlauf der Erdanziehungskraft außerhalb und innerhalb der Erde

Zusatzbemerkungen:

- (i) $\phi(r) = -\gamma \frac{M}{r}$ für $r > R$ gilt für jede isotrope Dichteverteilung ($\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$). Das Gravitationspotential/-feld einer isotropen Massenverteilung sieht von außen aus wie das eines Massenpunktes der Gesamtmasse M im SP.
- (ii) Analoge Aussagen gelten in der Elektrostatik
- (iii) Alternative Rechenmethoden: "Gauß'sches Gesetz"; "Multipolentwicklung"

BWGl für Bewegung im homogenen Schwerfeld:

$$\begin{aligned}
 \ddot{z} &= -g \\
 \dot{z} &= v_z \\
 \dot{v}_z &= \frac{dv_z}{dt} = -g \\
 \text{Variablentrennung} \quad \longrightarrow \quad \int dv_z &= -g \int dt \\
 v_z(t) &= -gt + C_1 \\
 v_z(0) &= v_0 = C_1 \\
 \int dz &= -g \int dt + v_0 \int dt \\
 \implies \quad z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C_2 \\
 \text{AB :} \quad z(0) &= z_0 = C_2
 \end{aligned}$$

$$\text{insb. } \xrightarrow{v_0=0} \boxed{z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2} \quad \text{freier Fall}$$

Alternative Lösungsweg:

$$\text{Ausgangspunkt (E - Satz)} \quad t(z) = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{z_0}^z [E - U(z')]^{-\frac{1}{2}} dz' \quad (t_0 = 0)$$

$$\text{mit } U(z) = mgz \quad t(z) = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{z_0}^z \frac{dz'}{\sqrt{E - mgz'}}$$

$$t(z) = \sqrt{\frac{2}{mg^2}} \left\{ \sqrt{E - mgz} - \sqrt{E - mgz_0} \right\}$$

$$\sqrt{E - mgz} = \sqrt{\frac{m}{2}}gt + \sqrt{E - mgz_0}$$

$$E - mgz = \left(\sqrt{E - mgz_0} + \sqrt{\frac{m}{2}}gt \right)^2$$

$$\iff \boxed{z(t) = \frac{E}{mg} - \frac{1}{mg} \left(\sqrt{E - mgz_0} + \sqrt{\frac{m}{2}}gt \right)^2}$$

$$\text{ABs: } z(0) = z_0; \quad v_z(0) = 0; \quad \longrightarrow \quad E = T + U = T(0) + U(0) = mgz$$

$$\longrightarrow \boxed{z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2}$$

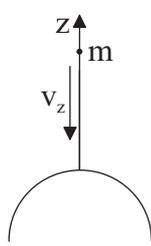
3.1.2 Reibung ($\dot{E} \neq 0$)

Phänomenologische Ansätze (Bewegung in einem Medium)

(i) Stokes'sche (viskose) Reibung $\mathbf{F}_S = -\beta\mathbf{v}$ ($\beta > 0$)
 \longrightarrow gültig für 'kleine' \mathbf{v}

(ii) Newton'sche Reibung $\mathbf{F}_N = -\gamma v\mathbf{v}$ ($\gamma > 0$); ($v = |\mathbf{v}| > 0$)
 \longrightarrow gültig für 'größere' \mathbf{v} (aber kleiner als Schallgeschwindigkeit)

a) Freier Fall mit Stokes'scher Reibung:



$$\begin{aligned} \ddot{z} &= -g - bv_z & (b = \frac{\beta}{m}) \\ &= -g - b\dot{z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dz}{dt} = v_z \\ \dot{v}_z = \frac{dv_z}{dt} = -g - bv_z \end{cases}$$

Variablentrennung \rightarrow

$$\int \frac{dv_z}{g + bv_z} = - \int dt = -t + konst.$$

$$\ln(g + bv_z) = -bt + konst.$$

$$g + bv_z = C_1 e^{-bt}$$

$$v_z(t) = \frac{C_1}{\beta} m \cdot e^{-\frac{\beta t}{m}} - \frac{mg}{\beta}$$

AB : $v_z(0) = v_0 = \frac{C_1}{\beta} m - \frac{mg}{\beta}$

$$\Leftrightarrow C_1 = \frac{v_0 \beta}{m} + g$$

\Leftrightarrow

$$v_z(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{\beta} \right) \cdot e^{-\frac{\beta t}{m}} - \frac{mg}{\beta}$$

2.Integration \rightarrow

$$z(t) = -\frac{m}{\beta} \left(v_0 + \frac{mg}{\beta} \right) \cdot e^{-\frac{\beta t}{m}} - \frac{mgt}{\beta} + C_2$$

AB : $z(0) = z_0 = -\frac{m}{\beta} \left(v_0 + \frac{mg}{\beta} \right) + C_2$

\Leftrightarrow

$$z(t) = z_0 - \frac{mgt}{\beta} + \frac{m}{\beta} \left(v_0 + \frac{mg}{\beta} \right) \left(1 - e^{-\frac{\beta t}{m}} \right)$$

Diskussion:

(i) Beschleunigung $a_z(t) = \dot{v}_z = -\frac{\beta}{m} \left(v_0 + \frac{mg}{\beta} \right) \cdot e^{-\frac{\beta t}{m}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

\rightarrow Langzeitverhalten:

$$v_z(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\frac{mg}{\beta} \equiv -v_\infty = konst.$$

$$z(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} z_0 + \frac{v_0 + v_\infty}{b} - v_\infty t$$

} geradlinig, gleichförmige Bewegung

(ii) Kurzzeitverhalten: ($t \rightarrow 0$)

benütze
$$e^{-bt} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b^n}{n!} t^n \approx 1 - bt + \frac{1}{2} b^2 t^2 \pm \dots$$

$$z(t) \approx z_0 - v_{\infty} t + \frac{v_0 + v_{\infty}}{b} (1 - 1 + bt - \frac{1}{2} b^2 t^2 \pm \dots)$$

$$= z_0 - v_0 t - \frac{b}{2} (v_0 + v_{\infty}) t^2$$

für $v_0 = 0$
$$z(t) = z_0 - \frac{g}{2} t^2$$

→ ungebremster freier Fall für $t \rightarrow 0$

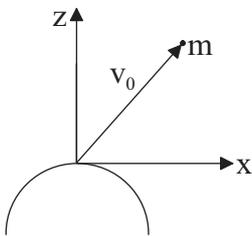
(iii) Reibungsfreier Grenzfall ($\beta \rightarrow 0$)

$\xrightarrow{\text{s. (ii)}} z(t) = z_0 - \frac{g}{2} t^2$

(iv) Starke Reibung ($\beta \rightarrow \infty$)

$z(t) = z_0$ (keine Bewegung im ∞ -zähen Medium)

b) Schiefer Wurf mit Stokes'scher Reibung:



BWGl:
$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\mathbf{e}_z - \beta\dot{\mathbf{r}}$$

$$\rightarrow \ddot{x} = -b\dot{x} \quad (b = \frac{\beta}{m})$$

$$\ddot{z} = -g - b\dot{z}$$

x-Komponente:

$$\dot{x} = v_x; \frac{dv_x}{dt} = -bv_x \rightarrow \int \frac{dv_x}{v_x} = -b \int dt$$

$$\rightarrow v_x(t) = v_0^x \cdot e^{-bt}$$

$$\xrightarrow{v_x = \dot{x}} x(t) = x(0) + \frac{v_0^x}{b} (1 - e^{-bt})$$

Diskussion:

- (i) $t \rightarrow \infty$ $x(t) \rightarrow x(0) + \frac{v_0^x}{b} = x_{max}$ Maximale Wurfmasse = $\frac{v_0^x}{b}$
- (ii) $t \rightarrow 0$ $x(t) \approx x(0) + v_0^x t \rightarrow$ geradlinig, gleichförmige Bewegung
- (iii) $\beta \rightarrow 0$ \rightarrow siehe (ii)
- (iv) $\beta \rightarrow \infty$ $x(t) \rightarrow x_0$

(v) Raumkurve (Orbit):

$$\begin{aligned} x(t) &= \underbrace{x_0}_{=x(0)} + \frac{v_0^x}{b}(1 - e^{-bt}) \\ \Leftrightarrow e^{-bt} &= 1 - \frac{b}{v_0^x}(x - x_0) \\ t &= -\frac{1}{b} \cdot \ln\left(1 - \frac{b}{v_0^x}(x - x_0)\right) \end{aligned}$$

$$z(x) = z_0 + \frac{v_\infty}{b} \cdot \ln\left(1 - \frac{b}{v_0^x}(x - x_0)\right) + \frac{v_0^z + v_\infty}{v_0^x}(x - x_0)$$

c) Freier Fall mit Newton'scher Reibung:

BWGl :

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= -mg\mathbf{e}_z - \gamma v\mathbf{v} \\ \dot{v}_z = \ddot{z} &= -g - c|v_z|v_z \quad (c = \frac{\gamma}{m}) \\ \Leftrightarrow \int \frac{dv_x}{g + c|v_z|v_z} &= -\int dt = -t + konst. \end{aligned}$$

Integrale:

$$\int \frac{dx}{a^2 + |x|x} = \frac{1}{a} \begin{cases} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) & 0 \leq x \\ \operatorname{artanh}\left(\frac{x}{a}\right) & -|a| < x \leq 0 \\ \operatorname{arcoth}\left(\frac{x}{a}\right) & x < -a \end{cases}$$

Näheres siehe Übung 3.3

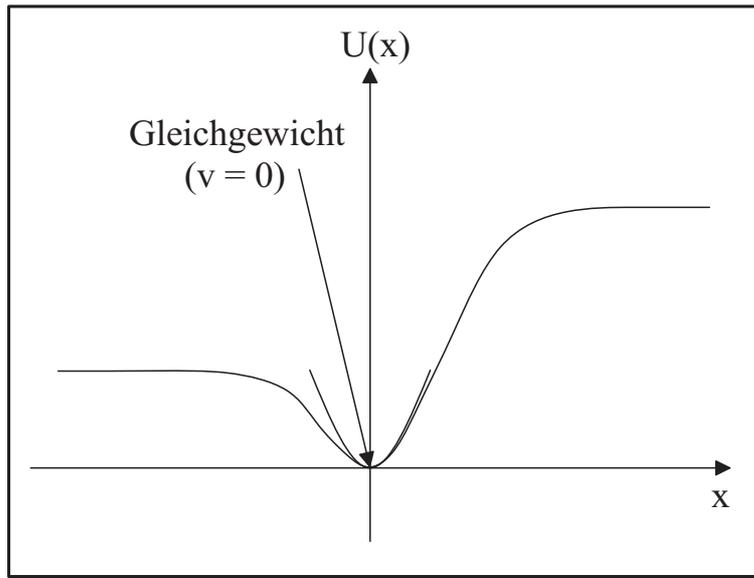
d) Abschließende Bemerkungen:

- (i) Reibungskräfte sind nicht konservativ, sondern dissipativ
- (ii) Allg. E-Satz: $\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}(T - U) = \mathbf{F}_R \cdot \mathbf{v} = -F_R \cdot v < 0$
 \rightarrow mechanische Energie nimmt ab (Umwandlung in Wärme)
- (iii) $A_R = -\int_{t_0}^t F_R(\mathbf{v}(t'), t')v(t') dt'$ (wegunabhängig)
- (iv) Statt Potential kann man "Dissipationsfunktion" angeben (s. Kap. 4)

3.2 Oszillatorprobleme I

3.2.1 Motive für das Studium des harmonischen Oszillators

- (i) Beschreibt Bewegungen in der Umgebung eines stabilen Gleichgewichts



Taylorentwicklung von $U(x)$ um $x = 0$:

$$\begin{aligned}
 U(x) &= \underbrace{U(0)}_0 + \underbrace{\frac{dU}{dx}\bigg|_{x=0}}_0 x + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dx^2}\bigg|_{x=0} x^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3U}{dx^3}\bigg|_{x=0} x^3 + \dots \\
 &= a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \\
 &\longrightarrow F(x) = -\frac{dU}{dx} = -2a_2 x - 3a_3 x + \dots
 \end{aligned}$$

\hookrightarrow 1. Näherung: $U(x) \propto x^2$, $F(x) \propto -x \longrightarrow$ Hooke'sches Gesetz

Einige Realisierungen:

$$\begin{array}{l}
 \text{klassische Oszil.} \left\{ \begin{array}{l} \text{Mechanik : Feder – und Fadenpendel} \\ \text{Elektrodynamik : Schwingkreis} \end{array} \right. \\
 \text{QM Oszil.} \left\{ \begin{array}{l} \text{Molekülphysik : 'Vibrationen' der Kerne gegeneinander} \\ \quad \quad \quad \text{(z.B. 2 – atomiges Molekül)} \\ \text{FK – Physik : Gitterschwingungen} \\ \text{Kernphysik : Vibrationen deformierter Kerne} \end{array} \right.
 \end{array}$$

- (ii) Kann in KM und QM exakt gelöst werden (und ist Grundlage der sog. 'Feldquantisierung' in der 'höheren' QT)

3.2.2 Der gedämpfte harmonische Oszillator (1-dim.)

$$\text{BWGl:} \quad m\ddot{x} = \underbrace{-kx}_{\text{Hooke'sches Gesetz}} + \underbrace{-\beta\dot{x}}_{\text{Reibung nach Stokes}}$$

$$b = \frac{1}{2} \frac{\beta}{m}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{Eigenfrequenz})$$

$$\hookrightarrow \boxed{\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

\hookrightarrow homogene, lineare DGl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} \text{Lösungsansatz:} \quad x(t) &= e^{\lambda t} \\ \longrightarrow (\lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} &= 0 \\ \text{'charakteristische Gleichung':} \quad 0 &= \lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2 \\ \longrightarrow \lambda_{1/2} &= -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2} \end{aligned}$$

Fall 1: $\omega_0^2 > b^2$ Schwache Dämpfung/Schwingfall

$$\text{Def.:} \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} \quad \in \mathfrak{R} \rightarrow \lambda_{1/2} = -b \pm i\omega_1$$

Allg. Lsg.: $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$
(Linearkombination von zwei linear unabhängigen Lösungen)

$$\hookrightarrow x(t) = e^{-bt} \cdot (C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t})$$

Grenzfall $b=0$: $\omega_1 = \omega_0$

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \\ &= C_1 (\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t) + C_2 (\cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t) \\ &= (C_1 + C_2) \cos \omega_0 t + i(C_1 - C_2) \sin \omega_0 t \\ &= A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad A, B \in \mathfrak{R} \iff C_2 = C_1^* \\ &= D \sin(\omega_0 t + \delta) \\ \longrightarrow D &= \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan \varphi = \frac{A}{B} \end{aligned}$$

$b \neq 0$: reelle Form der allg. Lösung

$$x(t) = De^{-bt} \sin(\omega_1 t + \delta)$$

$$\underline{\text{ABs :}} \quad \left. \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array} \right\} \longrightarrow x(t) = \frac{v_0}{\omega_1} e^{-bt} \sin \omega_1 t \xrightarrow{b \rightarrow 0} \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} > \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0$: Gedämpfte Schwingung ist streng periodisch, wobei Periode größer ist als im ungedämpften Fall Fall 2: $\omega_0^2 < b^2$ Starke Dämpfung/Kriechfall

$$\Re \ni \lambda_{1/2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2} < 0$$

$$\underline{\text{ABs :}} \quad \left. \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array} \right\} \longrightarrow x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{b^2 - \omega_0^2}} e^{-bt} \sinh\left(\sqrt{b^2 - \omega_0^2} t\right)$$

(wobei $\sinh y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$) Fall 3: $\omega_0^2 = b^2$ Aperiodischer Grenzfall

$$\lambda_{1/2} = -b \quad \in \Re$$

Zum Auffinden einer 2. linear unabhängigen Lsg. betrachte DGl für $\omega^2 = b^2$:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + b^2x = 0$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{Ansatz :}} \quad x(t) &= R(t)e^{-bt} \\ \dot{x} &= (\dot{R} - bR)e^{-bt} \\ \ddot{x} &= (\ddot{R} - 2b\dot{R} + b^2R)e^{-bt} \\ \xrightarrow{\text{einsetzen}} 0 &= (\ddot{R} - 2b\dot{R} + b^2R + 2b\dot{R} - 2b^2R + b^2R)e^{-bt} \\ \ddot{R} = 0 &\longrightarrow R(t) = C_1 + C_2t \\ \hookrightarrow x(t) &= (C_1 + C_2t)e^{-bt} \end{aligned}$$

$$\underline{\text{ABs :}} \quad \left. \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array} \right\} \longrightarrow x(t) = v_0 t e^{-bt}$$

Energie des gedämpften harmonischen Oszillators:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(T + U) = \mathbf{F}_R \cdot \mathbf{v} = -F_R \cdot \dot{x} = -2mb\dot{x}^2$$

$$\hookrightarrow E(t) = E(0) - 2mb \int_0^t \dot{x}^2 dt'$$

(Näheres siehe Übung 5.1)

3.2.3 Der getriebene harmonische Oszillator - erzwungene Schwingungen

$$\text{BWGl:} \quad \ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

\implies inhomogene DGl 2. Ordnung mit konstantem Koeffizienten

Allg. Lsg. der inhomogenen DGl = allg. Lsg. der homogenen DGl + eine spezielle Lsg. der inhomogenen DGl

$$x(t) = x_{hom}(C_1, C_2, t) + x_{part}(t)$$

a) Harmonische Anregung

$$\begin{aligned} f(t) &= f_0 e^{i\omega t} & (f_0 \in \mathfrak{R}) \\ \text{Wenn} \quad z(t) &= x(t) + iy(t) \\ \text{und} \quad \ddot{z} + 2b\dot{z} + \omega_0^2 z &= f_0 e^{i\omega t} \\ \longrightarrow \quad \ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x &= f_0 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$\text{Ansatz:} \quad z_{part}(t) = C e^{i\omega t}$$

$$\longrightarrow \left[C(-\omega^2 + 2ib\omega + \omega_0^2) - f_0 \right] e^{i\omega t} = 0$$

$$\longrightarrow C = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega} \equiv f_0 \chi(\omega)$$

χ : "(dynamische) Suszeptibilität", beschreibt die Antwort des Systems

$$\begin{aligned} \chi(\omega) &= |\chi(\omega)| e^{-i\phi} = A(\omega) e^{-i\phi} \\ \hookrightarrow z_{part}(t) &= A(\omega) e^{-i\phi} f_0 e^{i\omega t} = A(\omega) f_0 e^{i(\omega t - \phi)} \\ x_{part}(t) &= A(\omega) f_0 \cos(\omega t - \phi) \\ \longrightarrow A(\omega) &= \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2 \omega^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ \tan \phi &= \frac{2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{NR:}} \quad \chi &= \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2ib\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2 \omega^2} \\ |\chi|^2 &= \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2 \omega^2}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2 \omega^2 \right]^2} = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2 \omega^2} \\ \tan \phi &= \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = -\frac{\text{Im } \chi}{\text{Re } \chi} = \frac{2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

Diskussion:

- (i) Endgültige Lösung $x(t) = x_{norm}(C_1, C_2, t) + x_p(t)$ (zu vorgegebenen ABs) i.a. kompliziert
- (ii) $x(t) \xrightarrow{\text{gro\ss e } t} x_p(t)$ (falls $b \neq 0$) \rightarrow Oszillator folgt der harmonischen Anregung mit Phasenverschiebung ϕ
- (iii) $b = 0$: ungedämpfter Oszillator

$$\begin{aligned}
 A(\omega) &= \left[|\omega_0^2 - \omega^2| \right]^{-1}, \quad \phi(\omega) = 0 \\
 x(t) &= D \cos(\omega_0 t + \delta) + A(\omega) f_0 \cos \omega t \\
 \text{ABs: } \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0 &\implies (D = -A(\omega) f_0; \delta = 0) \\
 x(t) &= A(\omega) f_0 (\cos \omega t - \cos \omega_0 t)
 \end{aligned}$$

Spezialfall: $\omega_0 = \omega + \Delta\omega; \quad 0 < \Delta\omega \ll \omega$

Für $\Delta\omega t \ll 1$:

$$\begin{aligned}
 \cos \omega t - \cos \omega_0 t &= \cos \omega t - \cos(\omega + \Delta\omega)t \\
 &= \cos \omega t - \cos \omega t \cos \Delta\omega t + \sin \omega t \sin \Delta\omega t \\
 &\approx (\Delta\omega t) \sin \omega t
 \end{aligned}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{(\omega + \Delta\omega)^2 - \omega^2} = \frac{1}{2\omega\Delta\omega + \Delta\omega^2} \approx \frac{1}{2\omega\Delta\omega}$$

$\rightarrow x(t) \stackrel{\Delta\omega t \ll 1}{\approx} \frac{f_0}{2\omega} t \cdot \sin \omega t$ Amplitude wächst linear an \rightarrow (Resonanz)

Resonanzkatastrophe: $A(\omega) \xrightarrow{\Delta\omega \rightarrow 0} 0$

- (iv) Kurvendiskussion für $A(\omega)$ (für $b \neq 0$)

$$\begin{aligned}
 A(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \\
 A(\omega = 0) &= \frac{1}{\omega_0^2} \\
 A(\omega) \stackrel{\omega \gg \omega_0}{\rightarrow} \frac{1}{\sqrt{(\omega^4 + 4b^2\omega^2)}} &\rightarrow \frac{1}{\omega^2} \stackrel{\omega \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0
 \end{aligned}$$

Extrema? $\frac{dA}{d\omega} = 0 \iff \omega[\omega_0^2 - \omega^2 - 2b^2] = 0$

$\rightarrow (\omega_1 = 0); \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2} \equiv \omega_R \rightarrow$ Maximum

$\rightarrow A(\omega_R) = \frac{1}{2b\sqrt{\omega_0^2 - b^2}}$

(v) Phasenfunktion $\phi(\omega)$

$$\left. \begin{aligned} \phi(\omega) &= \arctan\left(\frac{2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(\omega = \omega_0) &= \frac{\pi}{2} \\ \phi(\omega) &\xrightarrow{\omega \gg \omega_0} \pi \end{aligned} \right\} 0 \leq \phi \leq \pi$$

→ Oszillator läuft Anregung hinterher ($x_p \propto \cos(\omega t - \phi)$)

b) Allgemeine periodische Anregung ($F(t+T) = F(t)$)

Superpositionsprinzip: Seien $x_n(t)$ Partikulärlösungen der DGL

$$\ddot{x}_n + 2b\dot{x}_n + \omega_0^2 x_n = f_n(t) \quad (n = 1, \dots, N)$$

und

$$F(t) = \sum_{n=1}^N f_n(t) \quad \Longrightarrow \quad x(t) = \sum_{n=1}^N x_n(t)$$

löst die DGL $\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$

Insbesondere, falls:

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n=1}^N f_n(t) = \sum_{n=1}^N f_0^{(n)} \cos(\omega_n t) \\ \Longrightarrow x_p(t) &= \sum_{n=1}^N A(\omega_n) f_0^{(n)} \cos(\omega_n t - \phi_n) \\ A(\omega_n) &= \left[(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4b^2 \omega_n^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ \tan \varphi_n &= \frac{2b\omega_n}{\omega_0^2 - \omega_n^2} \end{aligned}$$

Allgemeinere Aussage: Eine "hinreichend-gutartige" periodische Funktion $F(t+T) = F(t)$ kann als Fourier-Reihe dargestellt werden:

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \\ \hookrightarrow c_n &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(t) e^{-in\omega t} dt \end{aligned}$$

Bemerkungen:

(i)

$$\sum_{n=-N}^{n=N} c_n e^{in\omega t} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} F(t)$$

Welche Art von Konvergenz wird gefordert? \longleftrightarrow Anforderungen an $F(t)$

a) Punktweise Konvergenz

$$\forall t \in \mathfrak{R}; \quad \epsilon > 0; \quad \exists N = N(t, \epsilon) : |f_n(t) - F(t)| < \epsilon; \quad \forall n \geq N$$

b) Gleichmäßige Konvergenz

$$\forall t \in \mathfrak{R}; \quad \epsilon > 0; \quad \exists \underline{N} = N(\epsilon) : |f_n(t) - F(t)| < \epsilon; \quad \forall n \geq N$$

ist gegeben, falls $F(t)$ stückweise stetig differenzierbar

c) Konvergenz im quadr. Mittel

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |f_n(t) - F(t)|^2 dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

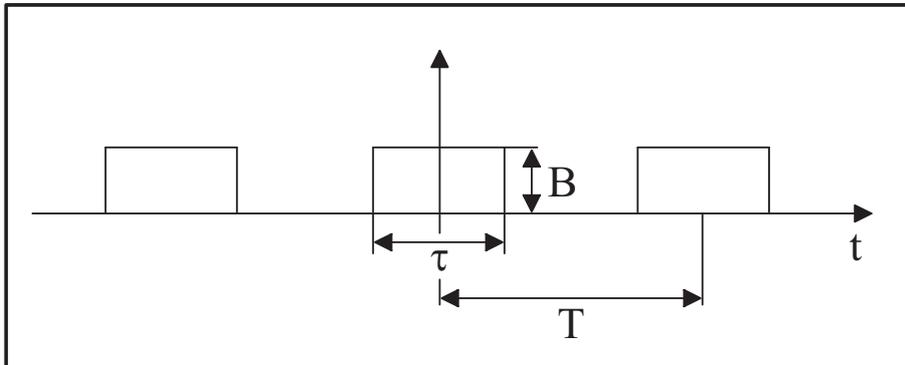
ist gegeben, falls $F(t)$ (Riemann-) integrierbar ist.

Den Fourier-Reihen ist die Konvergenz im quadr. Mittel i.a. besser angepasst. (siehe hierzu [3], Kap. 23)

(ii) Es existieren alternative Entwicklungen nach "vollständigen Funktionssystemen" $F(t) = \sum_n^\infty a_n g_n(t)$, wobei $\{g_n\}$ z.B.:

- * trigonometrische Fkt. (\rightarrow Fourier Reihe)
- * Legendre Polynome
- * Bessel Fkt.

\longrightarrow spezielle Funktionen der (mathematischen) Physik

(iii) Beispiel: Zug von Rechteckpulsen

Fourier-Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} F(t) e^{-in\omega t} dt \\
 &= \frac{B}{T} \frac{i}{n\omega} e^{-in\frac{\pi}{T}t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\
 &= \frac{B}{n\pi} \frac{i}{2} \left(e^{-in\frac{\pi}{T}\tau} - e^{in\frac{\pi}{T}\tau} \right) \\
 &= \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \cdot \frac{B}{n\pi}
 \end{aligned}$$

$$\text{beachte : } c_0 = \frac{B\tau}{T}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow F(t) &= \frac{B}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi\tau}{T}}{n} e^{in\omega t} \\
 &= B \left\{ \frac{\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \cos(n\omega t) \right\}
 \end{aligned}$$

→ reelle Lösung der Oszillatorgleichung:

$$\begin{aligned}
 x_p(t) &= \frac{B\tau}{T\omega_0^2} + B \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \cos(n\omega t - \varphi_n) \\
 A_n &= \left[\left(\omega_0^2 - (n\omega)^2 \right)^2 + 4b^2(n\omega)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\
 \tan \varphi &= \frac{2nb\omega}{\omega_0^2 - n^2\omega^2}
 \end{aligned}$$

- c) Nicht-periodische Anregung: Fourier-Integral
 ◁ Heuristische Argumente zur Konstruktion:

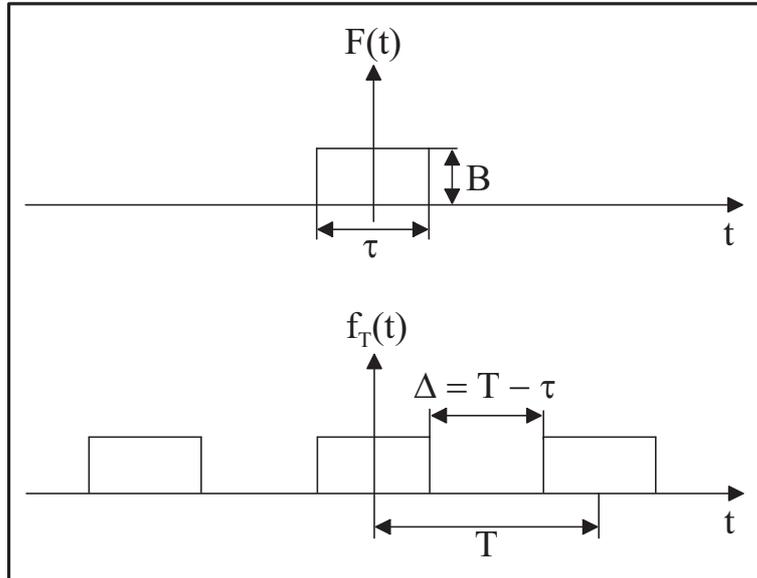


Abbildung 3.4: Einzelner Rechteckpuls

$$\implies F(t) = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} f_T(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) \Big|_{\tau = \text{konst.}}$$

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-in\omega t} dt$$

Umschreibung:

$$\begin{aligned} \omega_n &:= n\omega \\ \Delta\omega_n &:= \omega_n - \omega_{n-1} = \omega = \frac{2\pi}{T} \iff T = \frac{2\pi}{\Delta\omega_n} \\ \tilde{c}_n &:= Tc_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \quad f_T(t) &= \frac{1}{T} \sum_n \tilde{c}_n e^{i\omega_n t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n e^{i\omega_n t} \Delta\omega_n \\ T \rightarrow \infty; \Delta\omega_n \rightarrow 0 &\quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ \tilde{c}_n &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-i\omega_n t} dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \equiv \tilde{F}(\omega) \end{aligned}$$

\implies **Fourier-Transformations-Paar** $F(t) \longleftrightarrow \tilde{F}(\omega)$

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ \tilde{F}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

Hinreichende (Dirichlet) Bedingungen für die Existenz der Fourier-Transformation (FT) von der Funktion $F(t)$

- (i) $F(t)$ stückweise stetig und differenzierbar
- (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)| dt < \infty$

Bemerkungen:

- (i) Bedingungen sind nicht notwendig
- (ii) alternative Formulierung

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega & \left(\tilde{F}(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{\sqrt{2\pi}} \right) \\ \tilde{F}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

- (iii) Erweiterung auf höhere Dimensionen

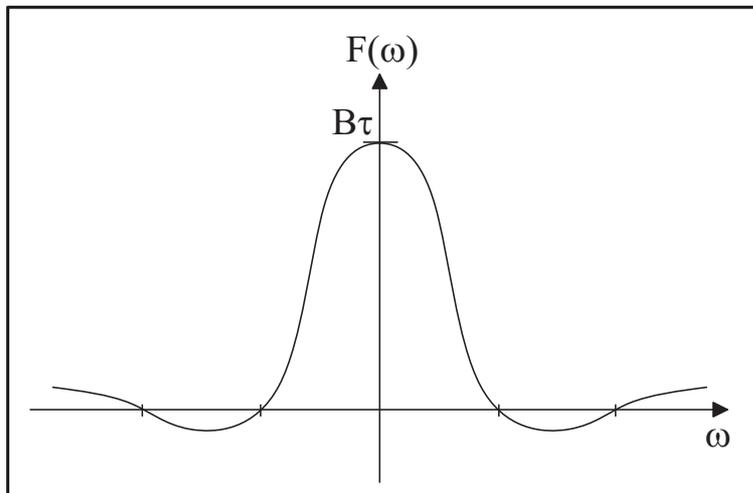
$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{F}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k \\ \tilde{F}(\mathbf{k}) &= \int F(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3r \end{aligned}$$

Beispiele:

(i) Rechteckimpuls (siehe Skizze 3.4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)| dt = B \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} dt = B\tau < \infty \quad (\text{Dirichlet - Bedingung erfüllt})$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt = B \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i\omega t} dt \\ &= -\frac{B}{\omega} \left(e^{-i\omega \frac{\tau}{2}} - e^{i\omega \frac{\tau}{2}} \right) \\ &= B\tau \left(\frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \right) \end{aligned}$$



(ii) $F(t) = \delta(t)$

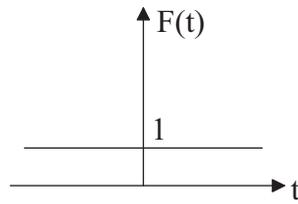
$$\begin{aligned} \longrightarrow F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= e^{-i\omega 0} = 1 \end{aligned}$$

FT - Paar	$\delta(t) \longleftrightarrow 1$
-----------	-----------------------------------

Umkehrung: Nützliche Integraldarstellung der δ -Funktion

$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt$

(iii)



$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)| dt \longrightarrow \infty$$

Dirichlet-Bedingung verletzt, aber FT existiert:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt \\ &\stackrel{x=-t}{=} - \int_{\infty}^{-\infty} e^{-i\omega x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dx = 2\pi\delta(\omega) \\ &= 2\pi\delta(-\omega) \implies \delta(\omega) = \delta(-\omega) \end{aligned}$$

FT – Paar $1 \iff 2\pi\delta(\omega)$

(iv) $F(t) = e^{i\omega_0 t}$

$$\int_{-A}^A |F(t)| dt = \int_{-A}^A dt \xrightarrow{A \rightarrow \infty} \infty$$

Dirichlet-Bedingung verletzt, aber FT existiert:

$$\implies F(\omega) = \int e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

(v) Beliebige periodische Funktion

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \\ \implies F(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{in(\omega_0 - \omega)t} dt \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned}$$

Anwendung auf komplexe Oszillorgleichung

$$\ddot{z} + 2b\dot{z} + \omega_0^2 z = F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Ansatz:

$$z_P(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\begin{aligned} \implies & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2b \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ \iff & \int_{-\infty}^{\infty} \left[(-\omega^2 + 2ib\omega + \omega_0^2) Z(\omega) - F(\omega) \right] e^{i\omega t} d\omega = 0 \\ \iff & \left[(-\omega^2 + 2ib\omega + \omega_0^2) Z(\omega) - F(\omega) \right] = 0 \\ \iff & Z(\omega) = \frac{F(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega} = F(\omega) \chi(\omega) \end{aligned}$$

(wobei $\chi(\omega)$ die auf in 3.2.3 eingeführte dynamische Suszeptibilität ist)

$$z_p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega} e^{i\omega t} d\omega$$

reelle Lösung (falls $F(\omega) \in \Re$) $\implies x_p(t) = \operatorname{Re} z_p(t)$

Zusammenfassung (FT-Methode):

Rezept:

- (i) Berechne zu geg. Inhomogenität $F(t)$ die Fourier-Trafo. $F(\omega)$
- (ii) Berechne $z_p(t)$ als Fourierintegral (inverse Fourier-Trafo zu $F(\omega)\chi(\omega)$)

Voraussetzungen der Methode:

- (i) $F(t)$ ist als Fourierintegral darstellbar
 - (ii) Partikulärlösung bekannt für harmonische Anregung $\chi(\omega)$
 - (iii) Superpositionsprinzip (lineare DGI)
- d) Allgemeine Anregung: Methode der Green'schen Funktion
(Erarbeitet von Jan Metje)

zur Diskussion steht:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$$

Aus der Vorlesung ist die partikuläre Lösung für eine harmonische Anregung bekannt. Betrachte jetzt: beliebiges $F(t)$

Es gilt:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t') F(t') dt'$$

(Zur δ -Funktion siehe Kap. A.1)

$$\triangleleft \quad \ddot{G}(t) + 2b\dot{G}(t) + \omega_0^2 G(t) = \frac{1}{m}\delta(t)$$

$G(t)$ ist definiert als eine Lösung dieser DGL. Genaueres Aussehen wird später untersucht.

Ansatz :
$$x_{part}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')F(t') dt'$$

Zur Überprüfung jeweils ein und zweimal ableiten:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(t-t')F(t') dt' \\ \ddot{x}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{G}(t-t')F(t') dt' \end{aligned}$$

Einsetzen in DGL liefert:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\ddot{G}(t-t') + 2b\dot{G}(t-t') + \omega_0^2 G(t-t') \right) F(t') dt' \\ &= \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t')F(t') dt' \\ &= \frac{1}{m} F(t) \end{aligned}$$

Korrektur Ansatz, da DGL erfüllt ist. Weiterhin gibt es zunächst keine Aussage über die Gestalt von G . Zusammenhang erlaubt partikuläre Lösung für beliebiges F bei Kenntnis von $G(t)$

Vgl. direkte Methode:

Für jedes $F(t)$ muss part. Lsg. $x_{part}(t)$ gesondert bestimmt werden $\implies G(t) = \text{Green'sche Funktion}$

Gestalt von G :

betrachte folgenden Fall: Einheitskraftstoß
 Resultat: $t < 0$ Oszillator in Ruhe
 $t = 0$ Kraftwirkung
 $t > 0$ harmonisch gedämpfter Oszillator

Alle anderen Fälle (z.B. Einheitsstoß am Schwingenden Oszillator) sind durch Superposition zu erhalten

Was gilt demzufolge für $G(t)$

$$t < 0 \quad G(t) := G^-(t) \equiv 0$$

$G(t)$ ist Lösung der Schwingungsgleichung, $t < 0$ keine Schwingung

$$t > 0 \quad G(t) := G^+(t)$$

für diesen Zeitraum ist $G(t)$ Lösung der harmonischen DGL. $G^+(t)$ ist nicht mehr frei wählbar, da $G^+(t)$ die ABs erfüllen muss, die der Kraftstoß hervorgerufen hat

Vgl. Kausalitätsprinzip: keine Wirkung früher als Ursache

Integration der DGL für $G(t)$ über $[-\tau, \tau]$, Grenzwert für $\tau \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \dot{G}(\tau) - \dot{G}(-\tau) + 2b(G(\tau) - G(-\tau)) \right\} + \omega_0^2 \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau}^{\tau} G(t) dt &= \frac{1}{m} \\ \dot{G}^+(0) + 2bG^+(0) + \omega_0^2 \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\tau} G^+(t) dt &= \frac{1}{m} \end{aligned}$$

$G(t)$ soll stetig sein (Teilchenbahnen sind immer stetig)

$$\begin{aligned} \implies G^+(0) &= 0 \\ \implies \text{Integral verschwindet} & \end{aligned}$$

Es bleibt:

$$\dot{G}^+(0) = \frac{1}{m}$$

Damit haben wir zwei ABs für homogene DGLs erhalten:
allgemeine Lsg.:

$$\implies G(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} & t > 0 \end{cases}$$

einsetzen der ABs:

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2 \implies -C_1 = C_2 \\ \frac{1}{m} &= C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 \\ &= C_1 (\lambda_1 - \lambda_2) \\ \implies C_1 &= \frac{1}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} ; \quad C_2 = -\frac{1}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \end{aligned}$$

$$\implies G(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{1}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) & t \geq 0 \end{cases}$$

stetig in $t = 0$ + differenzierbar (Ableitung nicht stetig)

Bestimmung der partikulären Lösung $x_{part}(t)$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')F(t') dt' = \int_{-\infty}^t G^+(t-t')F(t') dt'$$

Substitution $t'' = t - t'$

$$x(t) = \int_0^\infty G^+(t'')F(t-t'') dt''$$

Anwendung für harmonisches $F(t)$:

Ansatz: $F(t) = f \cos(\omega t) = \frac{f}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$

Einsetzen in $x(t)$ liefert:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{f}{2m(\lambda_1 - \lambda_2)} \int_0^\infty (e^{\lambda_1 t'} - e^{\lambda_2 t'}) (e^{i\omega(t-t')} - e^{-i\omega(t-t')}) dt' \\ &= \frac{f}{2m(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[e^{i\omega t} \int_0^\infty (e^{(\lambda_1 - i\omega)t'} - e^{(\lambda_2 - i\omega)t'}) dt' \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\omega t} \int_0^\infty (e^{(\lambda_1 + i\omega)t'} - e^{(\lambda_2 + i\omega)t'}) dt' \right] \\ &= \frac{f}{2m(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[e^{i\omega t} \left(\frac{1}{\lambda_1 - i\omega} \left(\lim_{a \rightarrow \infty} e^{(\lambda_1 - i\omega)a} - 1 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\lambda_2 - i\omega} \left(\lim_{a \rightarrow \infty} e^{(\lambda_2 - i\omega)a} - 1 \right) \right) + e^{-i\omega t} \left(\frac{1}{\lambda_1 + i\omega} \left(\lim_{a \rightarrow \infty} e^{(\lambda_1 + i\omega)a} - 1 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\lambda_2 + i\omega} \left(\lim_{a \rightarrow \infty} e^{(\lambda_2 + i\omega)a} - 1 \right) \right) \right] \end{aligned}$$

da λ_1 und λ_2 negativ sind existiert der Grenzwert

$$x(t) = \frac{f}{2m(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[e^{i\omega t} \left(\frac{1}{\lambda_2 - i\omega} - \frac{1}{\lambda_1 - i\omega} \right) + e^{-i\omega t} \left(\frac{1}{\lambda_2 + i\omega} - \frac{1}{\lambda_1 + i\omega} \right) \right]$$

Weiterverarbeitung liefert dasselbe Resultat wie die direkte Lösung aus Kap. 3.2.3 a)

Zusammenfassung:

Voraussetzung der Methode:

- (i) $F(t)$ ist als 'Faltungsintegral' darstellbar:

$$F(t) = \int_{-\infty}^\infty F(t')\delta(t-t') dt'$$

- (ii) Partikulärlösung der DGL bekannt für δ -Anregung
(= Green'sche Fkt. $G(t)$)

(iii)

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')F(t') dt'$$

Rezept: (für beliebig lineare DGL)

- (i) Bestimme $G(t)$ (siehe Voraus. (ii))
- (ii) berechne $x_p(t)$ (gemäß (iii))

e) Kombination der Fourier- und Green's-Funktions-Methoden

$$\triangleleft \quad \ddot{G} + 2b\dot{G} + \omega_0^2 G = \frac{1}{m}\delta(t)$$

$$\underline{\text{Ansatz}}: \quad G(t) = \frac{1}{2\pi} \int G(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\text{benutze:} \quad \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega t} d\omega$$

$$\hookrightarrow \quad \int \left[G(\omega) \left\{ \frac{d^2}{dt^2} + 2b \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right\} e^{i\omega t} - \frac{1}{m} e^{i\omega t} \right] d\omega = 0$$

$$\iff \quad \int \left[\left(-\omega^2 + 2ib\omega + \omega_0^2 \right) G(\omega) - \frac{1}{m} \right] e^{i\omega t} d\omega = 0$$

$$\iff \quad mG(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega} \equiv \chi(\omega)$$

FT der Green'schen Funktion $\hat{=}$ dyn. SuszeptibilitätRezept:

- (i) Berechne $G(t) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib\omega} d\omega$
(Mathematische Hilfsmittel: Residuensatz der Funktionstheorie)
- (ii) $x_p(t)$ (wie zuvor)

Diese Technik ist verallgemeinerbar auf andere DGLs und ein beliebtes Verfahren in der Elektrodynamik + Quantenmechanik.

Kapitel 4

Hamilton'sches Prinzip und Lagrange'sche Mechanik

Gründe für diese Formulierung der KM

Praxis: vorteilhaft für Bewegungsprobleme mit (geometrischen) Einschränkungen (Zwangsbedingungen)

Theorie: Einführung eines übergeordneten "Wirkungsprinzips"

4.1 Das Hamilton'sches Prinzip der stationären Wirkung (1823)

Die Bewegung eines (konservativen) mechanischen Systems von einer geg. Anfangs- zu einer geg. Endkonfiguration zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 verläuft so, dass das Integral

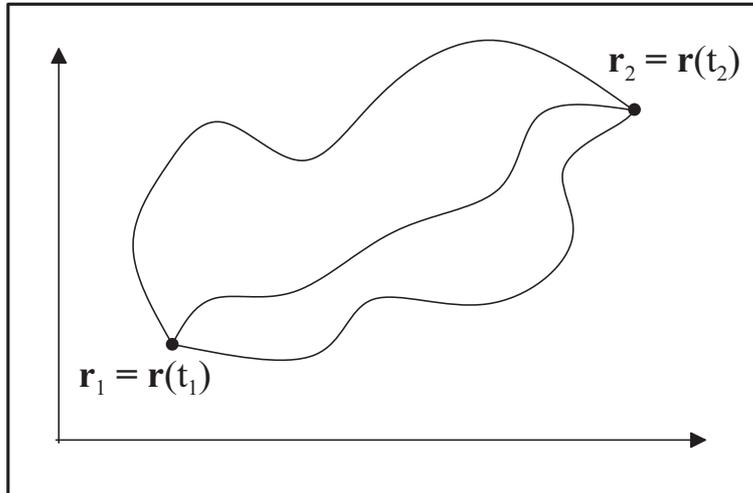
$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U - V) dt$$

'stationär' ist. ($\delta S = 0$)

Bemerkungen:

- (i) $L = T - U - V$ "Lagrange Funktion" (Dimension einer Energie)
- (ii) S : 'Wirkung' (Energie \times Zeit) (engl. 'action')
- (iii) Stationarität der Wirkung \triangleq in 1. Näherung ändert sich der Wert von S nicht bei 'kleinen' Variationen der durchlaufenen Bahn
(Analogie: $f'(x_0) = 0 \triangleq$ in 1. Näherung ändert sich der Wert von $f(x)$ nicht in der Umgebung von x_0)

$\delta S = 0$ ist notwendige Bedingung für Extremum von S . I.d.R. folgt aus $\delta S = 0$ ein Minimum ("Prinzip der kleinsten Wirkung"), d.h. bzgl. der tatsächliche durchlaufenen Bahn ist S (i.d.R.) minimal



- (iv) HP ist ein "ökonomisches" Prinzip
Historische + Philosophische Andeutungen: [9], [13] § 33 + 37
- (v) HP ist Integralprinzip
- (vi) HP ist fundamentales Ordnungsprinzip der modernen Physik
- (vii) Zu gegebener Lagrange-Funktion sowie Anfangs- und Endkonfiguration kann die tatsächliche Bewegung eines mechanischen Systems aus dem HP bestimmt werden

4.1.1 Grundzüge der Variationsrechnung

Gegeben: $f(x, \dot{x}, t)$ (2 mal stetig partiell differenzierbar)

Gesucht: 2 mal stetig diff.bare 'Kurve' $x(t)$ mit $x(t_1) = x_1$ und $x(t_2) = x_2$:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f(x, \dot{x}, t) dt \quad \text{extremal}$$

↔ Notwendige Bedingung: das Bestehen der "Euler-Lagrange"-Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0$$

Beweis: Sei $x(t)$ die gesuchte Kurve

Variationsansatz: $x_v(t) = x(t) + \varepsilon\varphi(t)$ mit $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$

$$\hookrightarrow \dot{x}_v(t) = \dot{x}(t) + \varepsilon\dot{\varphi}(t)$$

$$\triangleleft I(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} f(x_v, \dot{x}_v, t) dt$$

$I(\varepsilon)$ sei extremal für $\varepsilon = 0 \iff \left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$

$$\hookrightarrow \frac{dI}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} f(x_v, \dot{x}_v, t) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(x_v, \dot{x}_v, t) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_v} \frac{\partial x_v}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_v} \frac{\partial \dot{x}_v}{\partial \varepsilon} \right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_v} \varphi(t) + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_v} \dot{\varphi}(t) \right) dt$$

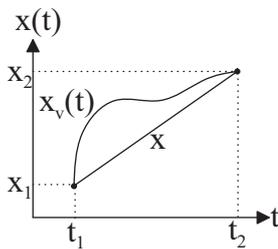
part. Int. $= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial x_v} \varphi(t) dt + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_v} \varphi(t) \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_v} \right) \varphi(t) dt$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_v} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_v} \right) \varphi(t) dt \quad (\text{da } \varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0)$$

$$\hookrightarrow \left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \varphi(t) dt$$

$$\implies \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0$$

Elementares Beispiel:



kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten

$$\text{Bogenlänge } S = \int \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt$$

$$\hookrightarrow f(x, \dot{x}, t) = \sqrt{1 + \dot{x}^2} = f(\dot{x})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} \xrightarrow{\text{E-L-Gl.}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} \right) = 0$$

$$\implies \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = \text{konst.} = C_1$$

$$\hookrightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{C_1^2}{1 - C_1^2}} = C_2 \implies x(t) = C_2 t + C_3 \quad (\text{Geradengleichung})$$

Bemerkungen zur Variationsrechnung:

- (i) $I = \int f(x, \dot{x}, t) dt = I[x]$ "Funktional" (Funktion \mapsto Zahl)
- (ii) Funktionalableitung $\frac{\delta I}{\delta x}$ definierbar
- (iii) Man findet dann $\frac{\delta I}{\delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}$ für $I = \int f dt$
 Alternativ: definiere 'totale Variation' von I

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta \int f(x, \dot{x}, t) \\ \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \delta x dt \\ \hookrightarrow \delta I &= 0 \iff \text{E-L-Gl.} \end{aligned}$$

(erklärt symbolische Notation des Hamilton'schen Prinzips $\delta S = 0$)

4.1.2 HP für den einfachsten Fall

\triangleleft 1 MP in eindimensionalen Welt

$$L = T - U = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - U(x) = L(x, \dot{x}); \quad F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

$$\text{HP :} \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}) dt = 0$$

$$\iff \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0} \quad \text{Lagrange-Gl. 2. Art}$$

Auswertung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x}; & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\ddot{x}; \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{dU}{dx} = F(x) \end{aligned}$$

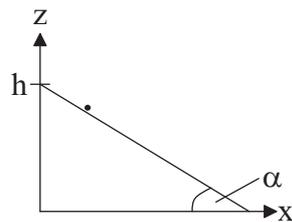
$$\hookrightarrow m\ddot{x} = F(x) \iff \text{Lg II} \iff \text{HP}$$

4.2 Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten

4.2.1 Vorbereitungen für eine MP

a) Beispiele für Zwangsbedingungen (ZBs)

(i) (Reibungsfreie) Bewegung auf der schiefen Ebene

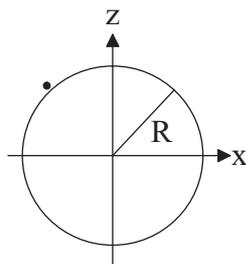


$$\text{ZB: } z = (-\tan \alpha)x + h$$

(y ist beliebig)

→ System hat zwei Freiheitsgrade (FGs)

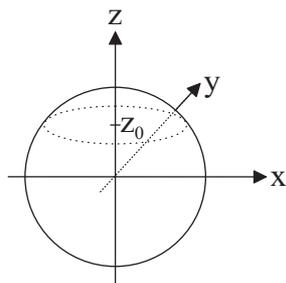
(ii) Bewegung auf Kugeloberfläche



$$\text{ZB: } x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

→ zwei FGs

(iii) Bewegung auf Kreisrand mit Radius $r^2 = R^2 - z_0^2$



$$\text{ZBs: } x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

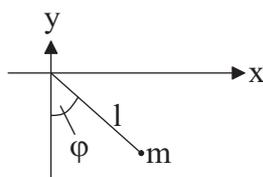
$$z = z_0 < R$$

→ ein FG

Spezialfall: $z_0 = R$

kein FG (keine Bewegung)

(iv) Ebenes math. Pendel



$$\text{ZBs: } z = 0$$

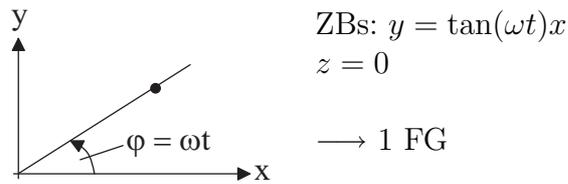
$$l = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{konst.}$$

entspricht Beispiel (iii)

ZBs in Bsp. (i) - (iv) werden charakterisiert durch Gleichung der Form $f(x, y, z) = 0$

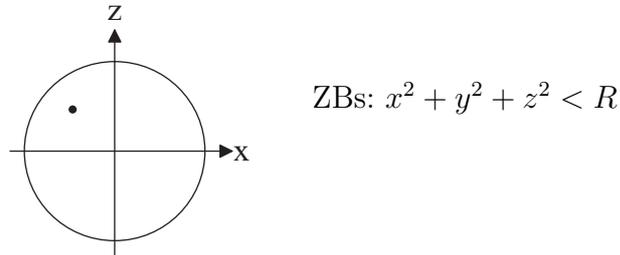
→ "holonom - skleronome" ZBs
 ↓ ↓
 (ganz, vollständig) (starr)

(v) Perle auf rotierendem Draht

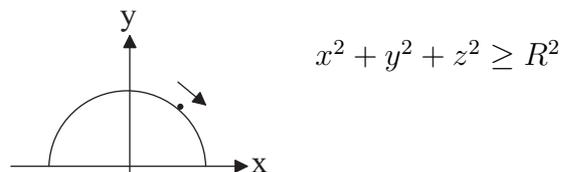


Variante: Perle auf Wippe ZBs: charakterisiert durch Gleichung der Form $f(x, y, z, t) = 0$ (holonom - rheonom (=fließend))

(vi) In Kugel eingesperrter MP



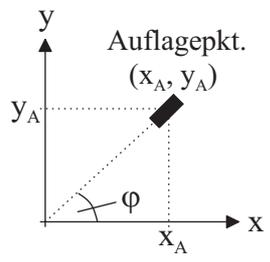
Variante:



→ nicht-holonome ZBs (charakterisiert durch Ungleichungen)

→ reduzieren Zahl der FGs nicht

(vii) In der Ebene rollendes Rad



$$\begin{aligned} \text{ZB: } \frac{dy}{dx} &= \tan \varphi(x_A, y_A) \\ \iff dy &= \tan \varphi(x_A, y_A) dx \\ \iff v_y &= \tan \varphi(x_A, y_A) v_x \end{aligned}$$

→ differentielle ZB (nicht-holonom)
→ Zahl der FGs wird nicht reduziert

b) Generalisierte Koordinaten und Lagrange Ungleichungen

– Einfachste Situation:

hol. ZB $f(x, y, z) = 0$ lasse sich auflösen in $z = g(x, y)$

Siehe Bsp. (i): Schiefe Ebene im homogenen Schwerfeld

ZB: $z = h - x \tan \alpha$, $y = 0$ (ignorabel)

Lagrange Fkt. : $L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$

ZB einsetzen : $= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}^2 \tan^2 \alpha) - mg(h - x \tan \alpha)$

HP $\iff \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

Auswertung:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}(1 - \tan^2 \alpha), \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m\ddot{x}}{\cos^2 \alpha}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = mg \tan \alpha$$

$\xrightarrow{\text{BWG1}} m\ddot{x} - mg \tan \alpha \cos^2 \alpha = 0$

$\iff \boxed{\ddot{x} = g \sin \alpha \cos \alpha}$

Lsg. : $x(t) = \frac{g}{2}(\sin \alpha \cos \alpha)t^2 + C_1 t - C_2$

$z(t) = h - \frac{g}{2}(\sin^2 \alpha)t^2 - (C_1 t + C_2) \tan \alpha$ (bestimmt aus ZB)

(Äquivalenz zu Newton bleibt zu zeigen)

Siehe Bsp. (iv): Ebenes math. Pendel im homogenen Schwerfeld

ZB : $z = 0$ (ignorabel)

$x = \pm \sqrt{l^2 - y^2}$

$U = mgy$

$$\begin{aligned}
 L = T - U &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \\
 &= \frac{m}{2} \left(\frac{y^2 \dot{y}^2 + \dot{y}^2(l^2 - y^2)}{l^2 - y^2} \right) - mgy \\
 &= \frac{m}{2} \left(\frac{\dot{y}^2 l^2}{l^2 - y^2} \right) - mgy \\
 &\longrightarrow \text{komplizierte Lagrange - Gleichung}
 \end{aligned}$$

Wie geht es leichter? Polarkoordinaten!

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x^2 + y^2} = l = \text{konst.} \quad (\text{ignorabel}) \\
 \tan \varphi &= -\frac{x}{y} \\
 \{\iff\} \quad x &= r \cdot \sin \varphi & y &= -r \cdot \cos \varphi \\
 &= l \cdot \sin \varphi & &= -l \cdot \cos \varphi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U &= mgy = -mgl \cos \varphi \\
 \dot{x} &= l\dot{\varphi} \cos \varphi & \dot{y} &= l\dot{\varphi} \sin \varphi \\
 \hookrightarrow L &= \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi = L(\varphi)
 \end{aligned}$$

Auswertung:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi$$

$$\stackrel{\text{Lg. Gl.}}{\implies} \quad ml^2 + mgl \sin \varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

– kleine Ausschläge: $\sin \varphi \approx \varphi$

$$\implies \ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 \implies \varphi(t) = a \sin(\omega t - \beta)$$

– größere Ausschläge:

Näherungsverfahren: siehe [7], Kap. 2.4.3

(für $\sin \varphi \approx \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3$)

Vollständige Diskussion siehe [5], § 24

(ellipt. Integrale) [11], Kap. 4.2.1

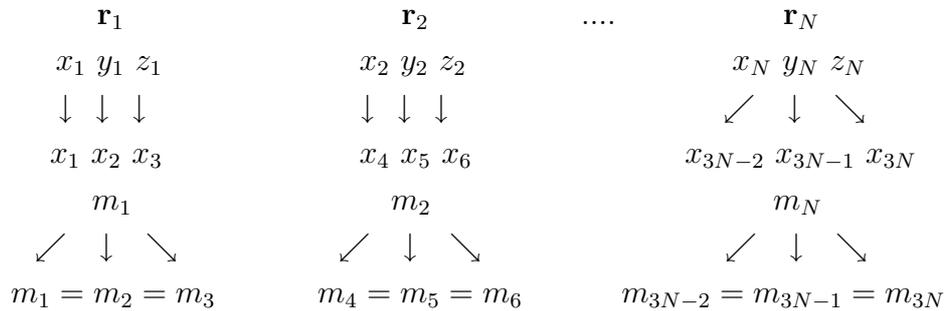
Bemerkungen:

– Es existiert kein universelles Rezept für das Auffinden geeigneter (generalisierter) Koordinaten

- 'Natürliche' Methode (falls möglich): Transformation auf (krummlinige) Koordinaten, die der Geometrie des Systems (der ZBs) besonders gut angepasst sind
- Gegebenenfalls führt das auf eine BWGl bzgl. nicht-inertialer Bezugssysteme

4.2.2 N-Teilchen Systeme

Zweckmäßige Nomenklatur:



liefert z.B. :
$$\left(T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 \right)$$

k unabhängige holonome ZBs reduzieren die Zahl der FGs von $3N$ auf $3N - k$

a) Klassifikation von Zwangsbedingungen

(i) k holonom-skleronome ZBs

$$f_j(x_1, \dots, x_{3N}) = 0 ; \quad j = 1, \dots, k$$

(ii) l holonom-rheonome ZBs

$$f_j(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0 ; \quad j = 1, \dots, l$$

(iii) m differentielle ZBs

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dx_j + a_{it} dt = 0 ; \quad i = 1, \dots, m$$

(Bsp.: rollendes Rad: $\tan \varphi(x_A, y_A) dx - dy = 0$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \quad a_{11} &= \tan \varphi(x_0, y_0) \\ a_{12} &= -1 \\ a_{1t} &= 0 \end{aligned})$$

$$a_{it} \begin{cases} = 0 & \text{nicht holonom - skleronom} \\ \neq 0 & \text{nicht holonom - rheonom} \end{cases}$$

◁ totales Differential der holonom-skleronomen ZB $f(x_1, \dots, x_{3N}) = 0$

$$\begin{aligned} df(x_1, \dots, x_{3N}) &= \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \\ &= \nabla f \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{wobei } \nabla = (\partial x_1, \dots, \partial x_{3N})) \end{aligned}$$

↪ gewinne f durch (Kurven-) Integration

$$f(x_1, \dots, x_{3N}) = \int df = \int \nabla f \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{wegunabhängig})$$

$$\iff \text{"Integrabilitätsbedingungen"} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_j}$$

(sind erfüllt, falls f 2 mal stetig diff.bar (Satz von Schwarz))

↪ k differentielle ZBs $\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dx_j + a_{it} dt$ sind holonom

$$\text{falls} \quad \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l} = \frac{\partial a_{il}}{\partial x_j}; \quad \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_t} = \frac{\partial a_{it}}{\partial x_j}$$

"Beweis": für hol. ZB $f_i(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0$ gilt

$$\begin{aligned} df_i &= \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f_i}{\partial t} dt = 0 \\ &= \sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dx_j + a_{it} dt \quad \text{mit} \quad a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad a_{it} = \frac{\partial f_i}{\partial t} \end{aligned}$$

⇒ Integrabilitätsbedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_l} &= \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_l \partial x_j}, & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial t} &= \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial x_j} \\ \parallel & & \parallel & \\ \frac{\partial a_{il}}{\partial x_j} &= \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l}, & \frac{\partial a_{it}}{\partial x_j} &= \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \end{aligned}$$

b) Generalisierte Koordinaten und der Konfigurationsraum

Ziel: Beschreibung des Teilchensystems mittels geeigneter Koordinaten

Punkt-Transformation $(x_1, \dots, x_{3N}) \longleftrightarrow (q_1, \dots, q_{3N})$

kartesische Koordinaten $x_i = x_i(q_1, \dots, q_{3N}, t) \quad i = 1, \dots, 3N$

generalisierte Koordinaten $q_\mu = q_\mu(x_1, \dots, x_{3N}, t) \quad \mu = 1, \dots, 3N$

Annahme: existieren k unabhängige, holonome ZBs

$f_j(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0$ (bzw. $f_j(q_1, \dots, q_{3N}, t) = 0$), $j = 1, \dots, k$

Wähle:

$$\left. \begin{aligned} q_{3N-k+1} &= f_1(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0 \\ q_{3N-k+2} &= f_2(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0 \\ &\vdots \\ q_{3N} &= f_k(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0 \end{aligned} \right\} \text{(ignorable Koordinaten)}$$

\implies es bleiben $3N - k$ unabhängige, generalisierte Koordinaten, die das System vollständig beschreiben

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (q_1, \dots, q_{3N-k}) : \text{ "Konfiguration(-vektor)" } \\ &= \text{Punkt im } (3N - k)\text{-dim. Konfigurationsraum} \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow x_i = x_i(q_1, \dots, q_{3N-k}, t)$$

$$\hookrightarrow \dot{x}_i = \frac{d}{dt} x_i(q_1, \dots, q_{3N-k}, t)$$

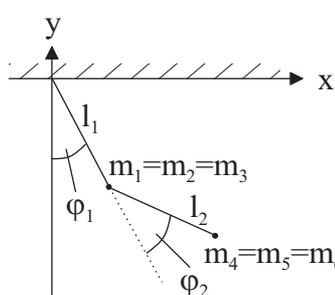
$$= \sum_{\mu=1}^{3N-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu} \dot{q}_\mu + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$$= \dot{x}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad i = 1, \dots, 3N$$

" \dot{q}_μ : generalisierte Geschwindigkeit"

$$\hookrightarrow L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

Beispiel: ebenes Doppelpendel ($N = 2$)



kartesische Koordinaten (x_1, \dots, x_6)

$$\text{ZB : } x_3 = x_6 = 0$$

$$l_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

\vdots

$$l_2 = \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (x_5 - x_2)^2}$$

$$\implies 2 \text{ FGs}$$

$\implies 4 \text{ ZBs}$

Generalisierte Koordinaten:

$$\left. \begin{array}{l} q_1 = \varphi_1 \\ q_2 = \varphi_2 \end{array} \right\} \text{ charakterisieren Bewegung im 2 - dim. Konfigurationsraum}$$

$$\left. \begin{array}{l} q_3 = x_3 = 0, \quad q_6 = x_6 = 0 \\ q_4 = l_1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0 \\ q_5 = l_2 - \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (x_5 - x_2)^2} = 0 \end{array} \right\} \text{ ignorabel}$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 m_i \dot{x}_i^2 - g(m_2 x_2 + m_5 x_5)$$

Kotrafos:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \varphi_1 = l_1 \sin q_1 \\ x_2 &= -l_1 \cos \varphi_1 = -l_1 \cos q_1 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= l_1 \sin q_1 + l_2 \sin q_2 \\ x_5 &= -l_1 \sin q_1 - l_2 \sin q_2 \\ x_6 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{allg. Form : } x_i = x_i(q_1, q_2), \quad i = 1, \dots, 6$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l_1 \dot{q}_1 \cos q_1 \\ \dot{x}_2 &= l_1 \dot{q}_1 \sin q_1 \\ \dot{x}_3 &= 0 \\ \dot{x}_4 &= l_1 \dot{q}_1 \cos q_1 + l_2 \dot{q}_2 \cos q_2 \\ \dot{x}_5 &= l_1 \dot{q}_1 \sin q_1 + l_2 \dot{q}_2 \sin q_2 \\ \dot{x}_6 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{allg. Form : } \dot{x}_i = \dot{x}_i(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2), \quad i = 1, \dots, 6$$

Mit der konventionellen Nomenklatur für die Massen:

$$(m_1, m_2, m_3) \longrightarrow m_1 \quad (m_4, m_5, m_6) \longrightarrow m_2$$

$$\begin{aligned}
 \hookrightarrow L &= \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{q}_1^2 (\cos^2 q_1 + \sin^2 q_1) + \frac{m_2}{2} \left[(l_1 \dot{q}_1 \cos q_1 + l_2 \dot{q}_2 \cos q_2)^2 \right. \\
 &\quad \left. + (l_1 \dot{q}_1 \sin q_1 + l_2 \dot{q}_2 \sin q_2)^2 \right] + m_1 g l_1 \cos q_1 + m_2 g (l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2) \\
 &= \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{q}_2^2 + m_2 l_2 l_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 (\cos q_1 \cos q_2 + \sin q_1 \sin q_2) \\
 &\quad + (m_1 + m_2) g l_1 \cos q_1 + m_2 g l_2 \cos q_2 \\
 &= \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{q}_2^2 + m_2 l_2 l_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2) \\
 &\quad + (m_1 + m_2) g l_1 \cos q_1 + m_2 g l_2 \cos q_2 \\
 &= L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)
 \end{aligned}$$

4.3 Die Lagrange Gleichung 2. Art

Wiederholung: Hamilton'sches Prinzip

Die Bewegung eines (konservativen) mechanischen Systems (mit $3N-k$ FGs) von einer gegebenen Anfangskonfiguration $\mathbf{q}(t_1)$ zu einer Endkonfiguration $\mathbf{q}(t_2)$ zwischen t_1 und t_2 verläuft derart, dass

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt = 0 \\
 L &= T - U - V
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
 U + V = W(x_1, \dots, x_{3N}) & \xrightarrow{x_i = x_i(\mathbf{q}, t)} & W(\mathbf{q}, t) \\
 T = T(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{3N}) & \xrightarrow{\dot{x}_i = \dot{x}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)} & T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)
 \end{array}$$

"Bewegung": ist die Zeitentwicklung des Systems auf einer "Kurve"

$$\mathbf{q}(t) = \{q_1(t), \dots, q_{3N-k}(t), t_1 \leq t \leq t_2\}$$

im $(3N-k)$ -dimensionalen Konfigurationsraum

4.3.1 Herleitung der Lagrange-Gleichungen aus dem Hamilton-Prinzip

vgl. Kapitel 4.1.1

- HP: $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$
- Sei $\mathbf{q}(t)$ die Kurve, bzgl. derer $\delta S = 0$

- Variationsansatz:

$$\begin{aligned} q_{\mu,v}(t) &= q_{\mu}(t) + \varepsilon \varphi_{\mu}(t) & (\mu = 1, \dots, 3N - k) \\ \text{mit } \varphi_{\mu}(t_1) &= \varphi_{\mu}(t_2) = 0 \\ \dot{q}_{\mu,v}(t) &= \dot{q}_{\mu}(t) + \varepsilon \dot{\varphi}_{\mu}(t) \end{aligned}$$

- $\triangleleft \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}_v, \dot{\mathbf{q}}_v, t) dt$

- Notwendige Bedingung für Minimum bei $\varepsilon = 0$: $\left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$

- $$\begin{aligned} \frac{dS}{d\varepsilon} &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(\mathbf{q}_v, \dot{\mathbf{q}}_v, t) dt \\ &= \sum_{\mu=1}^{3N-k} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_{\mu,v}} \frac{\partial q_{\mu,v}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu,v}} \frac{\partial \dot{q}_{\mu,v}}{\partial \varepsilon} \right) dt \\ &= \sum_{\mu=1}^{3N-k} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_{\mu,v}} \varphi_{\mu}(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu,v}} \dot{\varphi}_{\mu}(t) \right) dt \\ &= \underbrace{\sum_{\mu=1}^{3N-k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu,v}} \varphi_{\mu}(t) \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} + \sum_{\mu=1}^{3N-k} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_{\mu,v}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu,v}} \right) \varphi_{\mu}(t) dt \end{aligned}$$

- $\left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \sum_{\mu=1}^{3N-k} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_{\mu}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu}} \right) \varphi_{\mu}(t) dt$

- HP $\iff \left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$

$$\iff \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu}} - \frac{\partial L}{\partial q_{\mu}} = 0, \quad \mu = 1, \dots, 3N - k}$$

Lagrange – Gleichungen 2. Art

4.3.2 Äquivalenz der Lagrange-Gleichung zur Newton'schen BWGI

- a) System ohne ZBs in kartesischen Koordinaten
zu zeigen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, 3N$$

$$\iff \dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{F}_k + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_{ik}, \quad k = 1, \dots, N$$

Beweis:

$$L = T - U - V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j^2 - U(x_1, \dots, x_{3N}) - V(x_1, \dots, x_{3N})$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m_i \ddot{x}_i = \dot{p}_i, \quad (i = 1, \dots, 3N)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} (U + V) = F_i + \sum_{j=1}^{3N} f_{ji}$$

Erläuterung zur letzten Gleichung:

- (i) Äußere Kräfte:

$$U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{k=1}^N U_k(\mathbf{r}_k) = U_1(x_1 x_2 x_3) + U_2(x_4 x_5 x_6) \\ + \dots + U_N(x_{3N-2} x_{3N-1} x_{3N})$$

→ äußere Kraft auf k-ten MP: $\mathbf{F}_k = -\nabla_k U_k \hookrightarrow$ m-te Komponente der Kraft auf k-ten MP:

$$F_k^m = -\frac{\partial}{\partial x_m^k} U_k = -\frac{\partial U}{\partial x_m^k} \quad (k = 1, \dots, N; m = 1, 2, 3)$$

$$\left(\begin{array}{l} F_k^1 \equiv F_k^x = -\frac{\partial U}{\partial x_k} \\ F_k^2 \equiv F_k^y = -\frac{\partial U}{\partial y_k} \\ F_k^3 \equiv F_k^z = -\frac{\partial U}{\partial z_k} \end{array} \right) \iff F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, 3N$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 F_1^x & F_1^y & F_1^z & F_2^x & F_2^y & F_2^z & \dots & F_N^x & F_N^y & F_N^z \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & & F_{3N-2} & F_{3N-1} & F_{3N}
 \end{array}$$

(ii) Innere Kräfte:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{ji} &= \nabla_i V_{ji} = -\nabla_i V_{ij} \\
 V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) &= \sum_{j < i}^N V_{ji}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = V_{12}(x_1 x_2 x_3, x_4 x_5 x_6) \\
 &\quad + V_{13}(x_1 x_2 x_3, x_7 x_8 x_9) + \dots + V_{23}(x_4 x_5 x_6, x_7 x_8 x_9) + \dots \\
 &\quad + \dots + V_{N-1,N}(x_{3N-5} x_{3N-4} x_{3N-3}, x_{3N-2} x_{3N-1} x_{3N})
 \end{aligned}$$

Betrachte einige Beispiele:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial V}{\partial x_1} &= -\frac{\partial}{\partial x_1}(V_{12} + V_{13} + \dots + V_{1N}) \\
 &= -\frac{\partial}{\partial x_1}(V_{21} + V_{31} + \dots + V_{N1}) = f_1^x = \sum_{j=1}^N f_{j1}^x \\
 &= \sum_{j=1}^{3N} f_{j1} \\
 -\frac{\partial V}{\partial x_5} &= -\frac{\partial}{\partial x_5}(V_{12} + V_{32} + V_{42} + \dots + V_{N2}) \\
 &= f_2^y = \sum_{j=1}^N f_{jN}^y = \sum_{j=1}^{3N} f_{j5} \\
 &\quad \vdots \\
 -\frac{\partial V}{\partial x_{3N}} &= -\frac{\partial}{\partial x_{3N}}(V_{N1} + V_{N2} + \dots + V_{N,N-1}) \\
 &= f_N^z = \sum_{j=1}^N f_{jN}^z = \sum_{j=1}^{3N} f_{j3N} \\
 \Leftrightarrow \text{allg. : } -\frac{\partial V}{\partial x_i} &= \dots = \sum_{j=1}^{3N} f_{ji}
 \end{aligned}$$

wobei Matrix $f_{ij}(3N \times 3N)$ die folgende Struktur hat:

$j \setminus i$	1	2	3	4	5	6	7	3N-k	3N-1	3N
1	0	0	0	x	0	0	x	x	0	0
2	0	0	0	0	x	0	0	0	x	0
3	0	0	0	0	0	x	0	0	0	x
4	x	0	0	0	0	0	x	x	0	0
5	0	x	0	0	0	0	0	0	x	0
6	0	0	x	0	0	0	0	0	0	x
7	x	0	0	x	0	0	0	0	0	.		
\vdots	\vdots			\vdots			0	\vdots		
3N												

Zusammenfassung: $f_{ji} \neq 0$ falls $1 \leq j = i \pm 3n \leq 3N$; $n = (1, \dots, N-1)$

es ist also :

$$-\frac{\partial V}{\partial x_1} = \sum_{j=1}^{3N} f_{ji}, \quad i = 1, \dots, 3N$$

$$\iff -\nabla_i V_{ij} = \mathbf{f}_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, N$$

$$\implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \dot{p}_i - F_i - \sum_{j=1}^{3N} f_{ji} = 0$$

$$\iff \dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{F}_k + \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_{jk}, \quad k = 1, \dots, N \quad (\text{q.e.d.})$$

b) Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen unter Punkttransformation

bisher: Lagrange II = Newton II in kart. Koordinaten

Zeige:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \iff \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = 0$$

Wobei: $x_i = x_i(q_1, \dots, q_{3N}, t)$, $i = 1, \dots, 3N$

\implies Lagrange-Gleichungen in 3N general. Koordinaten \iff Newton II in kart. Koordinaten

Allgemeiner: Zeige Forminvarianz von Lagrange II bzgl.

Punkttransformation: $q_\mu \rightarrow Q_\alpha = Q_\alpha(\mathbf{q}, t)$, $\alpha = 1, \dots, n$

Umkehrung: $q_\mu = q_\mu(\mathbf{Q}, t)$, $\mu = 1, \dots, n$

Zutaten :

$$\dot{q}_\mu = \frac{d}{dt} q_\mu(Q_1, \dots, Q_n, t) = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\beta} \dot{Q}_\beta + \frac{\partial q_\mu}{\partial t}$$

$$= \dot{q}_\mu(Q_1 \dots Q_n, \dot{Q}_1 \dots \dot{Q}_n, t)$$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial \dot{Q}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_\alpha} \left(\sum_\beta \frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\beta} \dot{Q}_\beta + \frac{\partial q_\mu}{\partial t} \right) = \frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\alpha}}$$

Annahme : $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = 0, \quad \mu = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} L(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n, t) &= L(q_1(Q_1 \dots Q_n, t), q_2(Q_1 \dots Q_n, t), \dots, \dot{q}_1(Q_1 \dots Q_n, \dot{Q}_1 \dots \dot{Q}_n, t), \\ &= \tilde{L}(Q_1 \dots Q_n, \dot{Q}_1 \dots \dot{Q}_n, t) \end{aligned}$$

zu zeigen : $\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_\alpha} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n$

- $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_\alpha} = \sum_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial q_\mu} \frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial Q_\alpha} \right)$
- $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_\alpha} = \sum_\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial \dot{Q}_\alpha} = \sum_\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\alpha}$
- $\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_\alpha} = \frac{d}{dt} \left(\sum_\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\alpha} \right) = \sum \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \right) \frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\alpha}}_{= \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial Q_\alpha}} \right]$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_\alpha} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_\alpha} = \sum_\mu \left[\underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\mu}}_{= 0} \right] \frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\alpha} = 0 \quad (\text{q.e.d.})$$

Bemerkungen:

- (i) Forminvarianz gilt insbesondere für $n = 3N$ und $Q_\alpha \equiv x_i$
 \hookrightarrow Lagrange-Gleichungen in $3N$ generalisierten Koordinaten \iff Newton's BWGl in kartesischen Koordinaten
- (ii) Newton's BWGl nicht forminvariant unter allg. Punkttransformation:

aus : $m_i \ddot{x}_i = F_i$ folgt nicht $m_\mu \ddot{x}_\mu = F_\mu$ (siehe Kap. V)

(iii) Einbau holonomer ZBs

$$\text{Annahme : } \quad \mathbf{q} = \{q_1 \dots q_{3N-k}, \underbrace{q_{3N-k-1} \dots q_{3N}}_{\text{ignorabel}}\}$$

$$\text{HP : } \quad \delta S = 0 \quad \text{für } L = L(q_1 \dots q_{3N}, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_{3N}, t)$$

$$\iff 0 = \left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \sum_{\mu=1}^{3N} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \right) \varphi_\mu(t) dt$$

$$= \sum_{\mu=1}^{3N-k} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \right) \varphi_\mu(t) dt$$

$$+ \sum_{\mu=3N-k+1}^{3N} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \right) \underbrace{\varphi_\mu(t)}_{=0} dt$$

$$= 0 \quad \text{für } \mu = 3N - k + 1, \dots, 3N$$

(da diese Koordinaten nicht variiert werden)

$$\iff \boxed{\frac{\partial L}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = 0 \quad \text{für } \mu = 1, \dots, 3N - k}$$

→ HP ⇔ Lagrange II für 3N - k gen. Koordinaten ↔ Newton II für 3N kart. Koordinaten + Zwangskräfte aufgrund holonomer ZBs

(iv) Diskussion des Doppelpendels

$$\hookrightarrow L(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) \implies \text{Lg - Gl. für } \begin{matrix} q_1 = \varphi_1, & q_2 = \varphi_2 \\ \parallel & \parallel \\ q_1 & q_2 \end{matrix} \text{ aufstellen + lösen}$$

(siehe Übungsaufgabe 8.3)

(v) Gebrauchsanweisung für Lagrange II

- Formuliere k (holonome) ZBs
- Wähle 3N generalisierte Koordinaten, wobei k Stück mit ZBs identifiziert werden und ignorabel sind
- Stelle T - U - V in 3N kartesischen oder geeigneten, krummlinigen Koordinaten auf
- Finde Kotrafo zwischen diesen und den (3N - k) unabhängigen generalisierten Koordinaten

- Bestimme $L = T - U - V$ als $L(q_1 \dots q_{3N-k}, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_{3N-k}, t)$
- Bilde $3N - k$ Lagrange-Gleichungen durch Auswertung von

$$\frac{\partial L}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = 0 \quad (\mu = 1, \dots, 3N - k)$$

- Löse BWGL'en und analysiere Lösung

(vi) $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \tilde{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t)$, d.h. die Lagrangefunktion selbst ist nicht forminvariant unter Punkttransformationen. In praxi nimmt man darauf in der Notation meistens keine Rücksicht und schreibt $L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t)$ statt $\tilde{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t)$

4.3.3 Lagrange II und Erhaltungssätze

a) Generalisierte (kanonische) Impulse + zyklische Koordinaten

Definition: generalisierter Impulse $p_\mu := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}$

Beispiel 1: kartesische Koordinaten

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\sum_j m_j \cdot \dot{x}_j^2 \right) = m_i \dot{x}_i$$

→ der übliche mechanische (oder kinetische) Impuls

Beispiel 2: Ebenes Pendel (xy-Ebene)

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} l^2 \dot{q}^2 + mgl \cos \varphi \quad (q = \varphi) \\ \hookrightarrow p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = ml^2 \dot{q} = ml^2 \dot{\varphi} = l_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z \end{aligned}$$

→ z-Komponente des Drehimpulses

Wann gilt $\dot{p}_\mu = 0$?

$$\hookrightarrow \text{Lg II : } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = \dot{p}_\mu = \frac{\partial L}{\partial q_\mu}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\text{falls } \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = 0 \text{ folgt } \begin{cases} \dot{q}_\mu = 0 \\ p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = \text{konst.} \end{cases}}$$

Definition: "zyklische Koordinaten" $q_\mu : \iff \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = 0$

→ Der zur generalisierten Koordinate q_μ zugehörige Impuls p_μ ist Erhaltungsgröße, falls q_μ zyklisch ist

Triviales Beispiel: freies Teilchen

$$L = T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2$$

$$\iff \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \iff p_i = m_i \dot{x}_i = \text{konst.}$$

b) Energie und Hamiltonfunktion

Zur Vorbereitung:

– Definition: $f(x_1 \dots x_m)$ ist homogene Funktion n-ten Grades : \iff

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_m) = \lambda^n f(x_1 \dots x_m)$$

– Satz von Euler: Sei f homogen vom Grad n

$$\implies \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f(x_1, \dots, x_m)$$

Beweis: $y_i = \lambda x_i$

$$\begin{aligned} \triangleleft \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda}(y_1, \dots, y_m) &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \lambda} \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} x_i \\ &= n \lambda^{n-1} f(x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

für $\lambda = 1 : (y_i = x_i)$

$$\iff \sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f(x_1, \dots, x_m) .$$

Behauptung: Für nicht explizit zeitabhängige Transformationen $x_i \longleftrightarrow q_\mu$ ($x_i = x_i(\mathbf{q})$) ist die kinetische Energie einer homogenen Funktion 2. Grades in den generalisierten Geschwindigkeiten

Beweis:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu} \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} \dot{q}_\mu \dot{q}_\nu .$$

$$\xrightarrow{\text{Euler}} \boxed{\sum_{\mu} \dot{q}_{\mu} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\mu}} = 2T}$$

$$\begin{aligned} \triangleleft \quad \frac{d}{dt} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) &= \sum_{\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu}} \dot{q}_{\mu} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_{\mu}} \ddot{q}_{\mu} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &\stackrel{\text{LG II}}{=} \sum_{\mu} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu}} \right) \dot{q}_{\mu} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu}} \frac{d}{dt} \dot{q}_{\mu} \right] + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{\mu} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu}} \dot{q}_{\mu} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &\iff \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{\mu} p_{\mu} \dot{q}_{\mu} - L \right\} = - \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

Definition: Hamiltonfunktion

$$\boxed{H = \sum_{\mu} p_{\mu} \dot{q}_{\mu} - L}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{dH}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}}$$

$$\implies \boxed{\text{falls } \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \text{ folgt } \begin{cases} \dot{H} = 0 \\ H = \text{konst.} \end{cases}}$$

Bemerkungen:

- (i) $[H] = J = Nm$ (Dimension einer Energie)
- (ii) $H \equiv E = T + U + V$, falls
 - konservatives System mit allenfalls holonomem ZBs

KAPITEL 4. HAMILTON'SCHES PRINZIP UND LAGRANGE'SCHE MECHANIK 72

- zeitunabhängige Transformation $x_i \rightarrow q_\mu$ (d.h skleronome ZB und ruhende Bezugssysteme)

Beweis:

$$\begin{aligned}
 p_\mu &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \stackrel{\text{(konservativ)}}{=} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} \quad (\text{da } \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\mu}(U + V) = 0) \\
 \hookrightarrow H &= \sum_\mu p_\mu \dot{q}_\mu - L = \sum_\mu \dot{q}_\mu \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} - L = 2T - T + U + V \\
 &= T + U + V
 \end{aligned}$$

(iii) Genannte Voraussetzungen für $H = E = T + U + V$ sind hinreichend, aber nicht notwendig

(iv) $H = E$ und $\dot{H} = 0$ sind unabhängige Aussagen

$\hookrightarrow \dot{H} = 0$ und $H \neq E$ ist möglich

$\hookrightarrow \dot{H} \neq 0$ und $H = E$ ebenfalls

(iv) Falls Bedingungen in Bemerkung (ii) erfüllt und falls $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

\implies

$H = E = T + U + V = \text{konst.}$

Beispiele:

(i) Eindimensionaler harmonischer Oszillator

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{m}{2} \dot{x}^2, \quad U = \frac{m}{2} \omega^2 x^2, \quad L = T - U = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) \\
 \hookrightarrow H &= p\dot{x} - L = m\dot{x}^2 - \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} \omega^2 x^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = E = \text{konst.}
 \end{aligned}$$

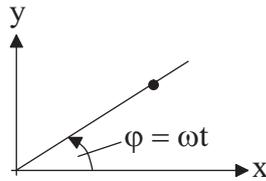
(ii) Ebenes Pendel

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi \\
 \text{mit } p_\varphi &= ml^2 \dot{\varphi} \\
 H &= p_\varphi \dot{\varphi} - L = ml^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi \\
 &= \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = T + U = E = \text{konst.}
 \end{aligned}$$

(iii) Ebenes Doppelpendel

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\
 U &= -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 - m_2 g l_2 \cos \varphi_2 \\
 p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\
 p_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\
 H &= p_1 \dot{\varphi}_1 + p_2 \dot{\varphi}_2 - T + U \\
 &= (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\
 &\quad + m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\
 &\quad - T + U = T + U = E = \text{konst.}
 \end{aligned}$$

(iv) Perle auf rotierendem Draht ($U = 0$)



rheonome ZB : $y = x \cdot \tan \omega t \iff \varphi - \omega t = 0$

gen. Koordinaten $\begin{cases} q_1 = r \\ q_2 = \varphi - \omega t = 0 \end{cases}$ (ignorabel)

$$\begin{aligned}
 L = T &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2) = E \\
 H = p\dot{r} - L &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \dot{r} - L = m\dot{r}^2 - \frac{m}{2} \dot{r}^2 - \frac{m}{2} r^2 \omega^2 \\
 &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 - r^2 \omega^2) \neq E
 \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dH}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad H = \text{konst.}$$

Lagrange-Gleichung:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0 \\
 \parallel \quad \parallel & \\
 m\ddot{r} - m\omega^2 r &= 0 \iff \ddot{r} - \omega^2 r = 0
 \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned}
 r(t) &= C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} \\
 \dot{r}(t) &= C_1 \omega e^{\omega t} - C_2 \omega e^{-\omega t} \\
 \hookrightarrow H &= \frac{m}{2} \left\{ \left(C_1 \omega e^{\omega t} - C_2 \omega e^{-\omega t} \right)^2 - \omega^2 \left(C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} \right)^2 \right\} \\
 &= \frac{m}{2} \left\{ C_1^2 \omega^2 e^{2\omega t} + C_2^2 \omega^2 e^{-2\omega t} - 2C_1 C_2 \omega^2 - C_1^2 \omega^2 e^{2\omega t} \right. \\
 &\quad \left. - C_2^2 \omega^2 e^{-2\omega t} - 2\omega^2 C_1 C_2 \right\} \\
 &= -2m\omega^2 C_1 C_2 = \text{konst.} \\
 \hookrightarrow L &= m\omega^2 \left(C_1^2 e^{2\omega t} + C_2^2 e^{-2\omega t} \right) = E(t)
 \end{aligned}$$

(v) Teilchen im zeitlich veränderlichen homogenen Kraftfeld (1-dim. Welt)

$$\begin{aligned}
 F(t) &= F_0 t \\
 \hookrightarrow U(x) &= -F_0 x t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L &= T - U = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + F_0 x t \\
 H &= p\dot{x} - L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - F_0 x t = T + U = E = E(t)
 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial t} = F_0 x = -\dot{H} \right)$$

Allgemeinere Diskussion von Erhaltungssätzen durch Betrachtung von Symmetrien \rightarrow Noether-Theorem, siehe hierzu [7], Kap. 7 (insb. 7.3) und [2], Kap 11 + 15

4.3.4 Erweiterungen

a) Verallgemeinerte (generalisierte) Potentiale

$$\text{bisher : } -\frac{\partial}{\partial x_i} W = -\frac{\partial}{\partial x_i} (U+V) = F_i + \sum_{j=1}^{3N} f_{ij} \equiv K_i, \quad i = 1, \dots, 3N$$

$$\begin{aligned}
 \triangleleft -\frac{\partial W}{\partial q_\mu} &= -\sum_i \frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu} = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu} \\
 &\equiv Q_\mu \quad \text{"generalisierte Kraftkomponenten"} \\
 &(\quad = Q_\mu(q_1 \dots q_{3N-k}, t))
 \end{aligned}$$

Sei $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - W(\mathbf{q}, t)$

$$\text{Lg - Gl'en : } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} = \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = \frac{\partial T}{\partial q_\mu} - \frac{\partial W}{\partial q_\mu}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial T}{\partial q_\mu} = Q_\mu, \quad \mu = 1, \dots, 3N - k}$$

→ Alternative Form der Lagrange-Gleichungen

Erweiterung: betrachte 'verallgemeinerte' Potentialfunktion $W^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$

$$Q_\mu = - \left(\frac{\partial W^*}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W^*}{\partial \dot{q}_\mu} \right)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial T}{\partial q_\mu} = \frac{d}{dt} \frac{\partial W^*}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial W^*}{\partial q_\mu}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = 0 \\ \text{für } L = T - W^* \end{array}}$$

Beispiel: für $W^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$: Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

$$\begin{aligned} \text{Lorentzkraft: } \quad \mathbf{F} &= q(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})) \\ \Leftrightarrow F_i &= - \left(\frac{\partial W^*}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W^*}{\partial \dot{x}_i} \right) \quad \text{mit} \\ W^* &= q(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \quad \text{und} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

siehe [10] II, Kap. 1.2.3 und [4], Kap. 1.5, (7.3)

$$\text{gen. Impulse: } p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = \underbrace{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}}_{\text{"mechanischer (kinetischer) Impuls"}} + \frac{\partial W^*}{\partial \dot{q}_\mu}$$

Bemerkung: Man findet für dieses Beispiel

$$H = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 + q\phi = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + q\mathbf{A})^2 + q\phi = E$$

aber bei zeitabhängigen Feldern $\dot{E} \neq 0$.

b) Reibung

$$F_i = F_i^{kon} + F_i^{diss} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + F_i^{diss} \quad (\text{siehe Kap. 2.2.3})$$

$$\triangleleft \quad \text{Ansatz : } F_i^{diss} = -\beta_i \dot{x}_i \quad (\text{Stokes'sche Reibung})$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \quad Q_\mu^{diss} &= \sum_i F_i^{diss} \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu} = -\sum_i \beta_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu} \\ &= -\sum_i \beta_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_\mu} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\mu} \left(\sum_i \frac{\beta_i}{2} \dot{x}_i^2 \right) \end{aligned}$$

Definition: Rayleigh'sche Dissipationsfunktion

$$R := \sum_i \frac{\beta_i}{2} \dot{x}_i^2 = R(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

$$\begin{aligned} \text{Lg - Gl. : } \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial T}{\partial q_\mu} &= Q_\mu = -\frac{\partial W}{\partial q_\mu} + Q_\mu^{diss} \\ &= -\frac{\partial W}{\partial q_\mu} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\mu} \end{aligned}$$

$$\iff \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial L}{\partial q_\mu} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\mu} = 0}$$

$$(L = T - W = T - U - V)$$

Energiesituation (siehe Kap. 3.1.2)

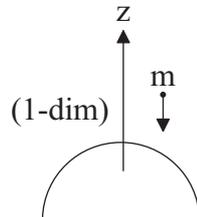
$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} (T + U + V) = \mathbf{F}^{diss} \cdot \mathbf{v} \quad (1 \text{ MP})$$

$$\text{bzw : } \quad \frac{d}{dt} (T + U + V) = \sum_{i=1}^{3N} F_i^{diss} \dot{x}_i \quad (\text{N MPs})$$

$$\text{für : } F_i^{diss} = -\beta_i \dot{x}_i$$

$$\iff \boxed{\frac{dE}{dt} = \sum_i \beta_i \dot{x}_i^2 = -2R}$$

Beispiel: freier Fall mit Stokes'scher Reibung



$$R = \frac{\beta}{2} \dot{z}^2$$

$$L = \frac{m}{2} \dot{z}^2 - mgz$$

$$\implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\ddot{z}, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = -mg, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{z}} = \beta\dot{z}$$

$$\xrightarrow{\text{Lag-Gl.}} m\ddot{z} + mg + \beta\dot{z} = 0 \quad (\text{wie zuvor})$$

Bemerkungen:

- (i) Anspruchsvollere Beispiele (+ Aufgaben): siehe [7], Kap. 6
- (ii) (Etwas) allgemeinerer Reibungsansatz: siehe [10] II, Kap. 1.2.4 und [5] II, Kap. 17
- (iii) Hamiltonprinzip für nichtkonservative Systeme: siehe [4], Kap. 2.4

4.4 Kurze Zusammenfassung der Lagrange Mechanik

- Ziel: Beschreibung klassischer Bewegungsprobleme für N Massenpunkte mit
 - (konservativen) äußeren + inneren Kräften
 - ggf. (holonomen) Zwangsbedingungen
- Axiom: Hamiltonsches Prinzip

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt = 0$$

Lagrange – Funktion $L = T - U - V$

- BWGl'en: HP \iff Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = 0, \quad \mu = 1, \dots, 3N - k$$

$$\iff \text{Newtonsche BWGl} \quad \dot{p}_i = F_i + \sum_{j=1}^{3N} f_{ji} \quad (+ \text{ ggf. Zwangskräfte})$$

- Erhaltungsaussagen

- zyklische Koordinaten + generalisierte Impulse

$$\text{falls } \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = 0 \implies p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = \text{konst.}$$

- Energie + Hamiltonfunktion

$$H = \sum_{\mu} p_{\mu} \dot{q}_{\mu} - L$$

\hookrightarrow falls $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \implies H = \text{konst.}$ (Hamiltonfunktion ist Erhaltungsgröße)

\hookrightarrow falls System konservativ, ZBs holonom, ruhende KOS:

$$H = E = T + U + V$$

- Erweiterungen

- Verallgemeinerte Potentiale
- Reibung, Dissipationsfunktion

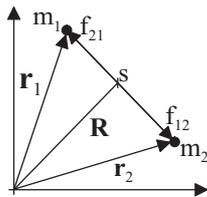
- Varianten (die nicht behandelt werden)

- Lagrange-Gleichung 1. Art
 \longrightarrow Berechnung von Zwangskräften ("Methode der Lagrange-Multiplikatoren")
 Literatur: [11], Kap. 5.1 und [7], Kap. 9
- d'Alembert'sche Prinzip
 \longrightarrow Eigenständiges Axiom
 d'Alembert + Newton \implies Lagrange I + II
 Literatur: [11], Kap. 5.2, [7], Kap. 4 und [10] II, Kap. 1.2

Kapitel 5

Anwendungen II

5.1 Das Zweikörper-Zentralkraftproblem



1. Abgeschlossenes System ($\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 = 0$)

$$2. \mathbf{f}_{21} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) f_{21} = -\mathbf{f}_{12} \\ = -\nabla_1 V_{12}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \nabla_2 V_{12}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$$

3. (keine Zwangsbedingungen)

Gravitation :

$$\mathbf{f}_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

$$V_{12} = V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

↔ Lagrange – Funktion : $L = T - V = \frac{m_1}{2} \mathbf{v}_1^2 + \frac{m_2}{2} \mathbf{v}_2^2 - V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$

(analoge Form für andere Wechselwirkungen)

Planetenbewegungen:

Sonnenmasse $M_\odot = 330.000 m_E$

Merkur (leichtester) $M_{Me} = \frac{1}{20} m_E$

Jupiter (schwerste) $M_{Ju} \approx 320 m_E$

$$\frac{\text{Kraft von Sonne auf Erde}}{\text{Kraft von X auf Erde}} = \frac{F_{\odot E}}{F_{XE}} = \frac{M_\odot R_{XE}^2}{M_X R_{\odot E}^2}$$

	Venus	Mars	Jupiter	Mond	[Einheiten] (aus [11])
m_x	0,81	0,11	320	0,012	m_E
R_{XE}^{min}	0,27	0,52	42	0,0026	$R_{\odot E}$
$F_{\odot E}/F_{XE}$	30.000	81.000	18.300	180	

\implies Betrachtung des (abgeschlossenen) Zweikörper-Erde-Sonne-Systems ist in 1. Näherung ausreichend (6 FGs)

5.1.1 Reduktion auf ein Einkörperproblem

$$\begin{aligned} \text{Impulssatz : } \dot{\mathbf{P}} &= \mathbf{F}_{ext} = 0 \quad (\text{siehe Kap. 2.2}) \\ \text{mit } \mathbf{P} &= M\mathbf{V} = (m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{R} &= \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Positionen bzgl. SP: $\mathbf{r}'_k = \mathbf{r}_k - \mathbf{R} \quad (k = 1, 2)$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow T &= \frac{1}{2} \sum_k m_k \mathbf{v}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_k (\mathbf{v}'_k + \mathbf{V})^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_k m_k \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_k m_k \mathbf{v}'_k{}^2 + \underbrace{\sum_k m_k \mathbf{v}'_k \mathbf{V}}_{= 0} \end{aligned}$$

$$T = T_{SP} + T' ; \quad T_{SP} = \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 ; \quad T' = \frac{1}{2} \sum_k m_k \mathbf{v}'_k{}^2 \quad (\text{gilt für } N \geq 2)$$

Für $N = 2$ ist weitere Umschreibung sinnvoll:

$$\begin{aligned} \triangleleft \mathbf{r}'_1 &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 + m_2)\mathbf{r}_1 - m_1\mathbf{r}_1 - m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}'_2 &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 + m_2)\mathbf{r}_2 - m_1\mathbf{r}_1 - m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \\ &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \\ & \quad (\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2 \quad \text{"Relativvektor"}) \\ \hookrightarrow \mathbf{v}'_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v} ; \quad \mathbf{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v} \\ T' &= \frac{m_1}{2} \mathbf{v}'_1{}^2 + \frac{m_2}{2} \mathbf{v}'_2{}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} \mu \mathbf{v}^2 \\ \mu &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{"reduzierte Masse"} \\ \rightarrow T &= \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \mu \mathbf{v}^2 ; \quad V = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow L &= \frac{\mu}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \gamma\frac{\mu M}{r} \\ &= L(\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \\ &= L_{SP}(\dot{\mathbf{R}}) + L_{rel}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \end{aligned}$$

(SP- und Relativkoordinaten sind die geeigneten generalisierten Koordinaten)

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial X} = \frac{\partial L}{\partial Y} = \frac{\partial L}{\partial Z} = 0 \quad \implies \quad P_X &= \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = M\dot{X} = \text{konst.} \\ (X, Y, Z \text{ zyklisch}) \quad P_Y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} = M\dot{Y} = \text{konst.} \\ P_Z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{Z}} = M\dot{Z} = \text{konst.} \end{aligned}$$

5.1.2 Relativbewegung

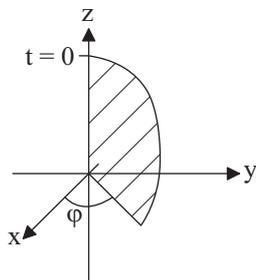
a) Lagrange-Funktion und Lagrange-Gleichung

Kugelkoordinaten: $L_{rel}(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{\mu}{2} \left[\dot{r}^2 + (r \sin \theta \dot{\varphi})^2 + (r \dot{\theta})^2 \right] + \gamma \frac{\mu M}{r}$

Generalisierte Impulse:

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu \dot{r} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 (\sin^2 \theta) \dot{\varphi} = \text{konst.} \quad (\text{da } \varphi \text{ zyklisch}) \end{aligned}$$

Wähle Koordinatensystem, so dass $x(0) = y(0) = 0 \quad (\rightarrow \theta(0) = 0)$



$$\begin{aligned} p_\varphi(0) = 0 = p_\varphi(t) \quad \implies \quad \dot{\varphi} &= 0 \\ \implies \quad \text{Bewegung in Ebene } \varphi &= \text{konst.} \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \boxed{L_{rel} = \frac{\mu}{2}(\dot{\mathbf{r}}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \gamma \frac{\mu M}{r}}$$

Nun ist auch θ zyklisch und

$$p_\theta = \mu r^2 \dot{\theta} \hat{=} \text{Flächensatz } \dot{A} = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = \frac{p_\theta}{2\mu} = \text{konst.}$$

$$\frac{\partial L_{rel}}{\partial \dot{r}} = \mu \dot{\mathbf{r}} \quad , \quad \frac{\partial L_{rel}}{\partial r} = \mu r \dot{\theta}^2 - \gamma \frac{\mu M}{r}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{Lg-Gl.}} \quad \mu \ddot{r} &= \mu r \dot{\theta}^2 - \gamma \frac{\mu M}{r^2} \\ \mu \ddot{r} &= \frac{p_\theta^2}{\mu r^3} - \gamma \frac{\mu M}{r^2} = \frac{p_\theta^2}{\mu r^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Hamiltonfunktion} \quad H_{rel} &= p_{rel} r + p_\theta \dot{\theta} - L_{rel} \\ &= \dots = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 - \dot{r}^2 \dot{\theta}^2) + V(r) \\ &= T' + V = E_{rel} = \text{konst.} \quad (\text{Energieerhaltung}) \\ &\quad (\text{denn} \quad -\frac{\partial L}{\partial t} = \dot{H} = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= H_{SP} + H_{rel} \\ &= \frac{M}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{p_\theta^2}{\mu r^3} - \gamma \frac{\mu M}{r} \\ &= E = \text{konst.} \end{aligned}$$

(Gesamtenergie des 2-Körper-Problems ist erhalten)

b) Qualitative Diskussion der Bahntypen

$$\begin{aligned} E_{rel} &\equiv E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} - \gamma \frac{\mu M}{r} \\ &= T_{rad} + U_{zent} + U_{grav} \\ &= \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + U_{eff}(r) = \text{konst.} \end{aligned}$$

da Erde-Sonne-System

$$\longrightarrow \quad \mu = \frac{M_\odot m_E}{M_\odot + m_E} \approx m_E \quad ; \quad \mathbf{r} \approx \mathbf{r}_E \quad ; \quad M \approx M_\odot \quad ; \quad \mathbf{R} \approx \mathbf{r}_\odot$$

$$T_{rad} = E - U_{eff}(r) \geq 0$$

\iff

$$E \geq U_{eff}(r)$$

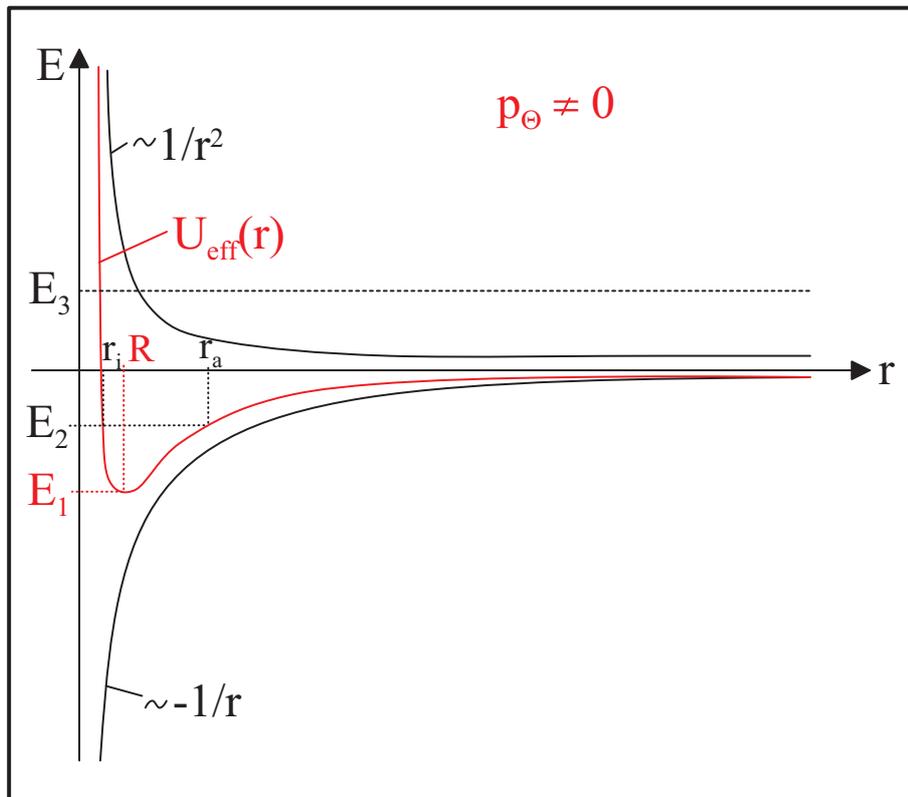
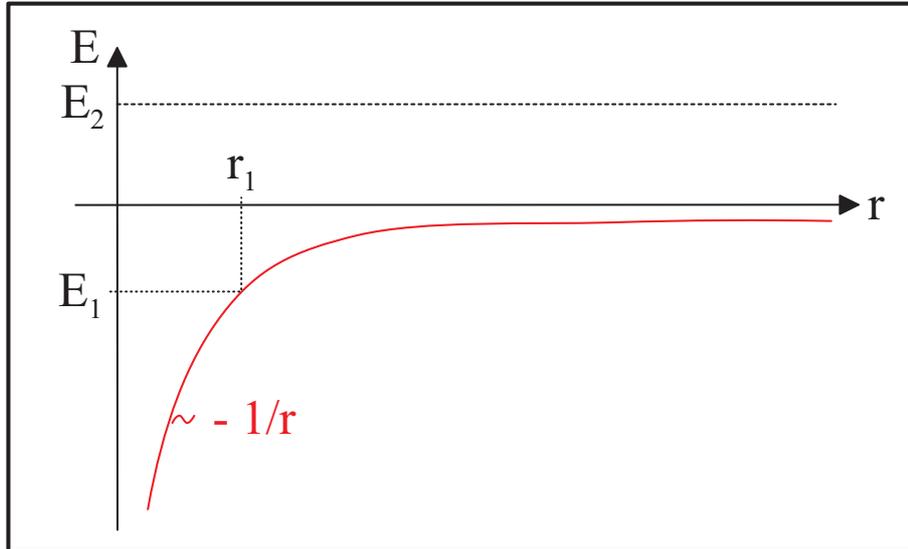


Abbildung 5.1:

- (i) $E = E_1 = U_{eff}(R) \longrightarrow T_{rad} = 0$
 \longrightarrow Kreisbewegung mit Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{\mu R^2} = \text{konst.}$
- (ii) $E_1 < E = E_2 < 0$
 \longrightarrow finite (gebundene) Bewegung in $[r_i; r_a]$
 $(r_i, r_a : \text{Umkehrpunkte der Radialbewegung, } T_{rad}(r_i) = T_{rad}(r_a) = 0)$
mit variabler Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{\mu r^2}$
- (iii) $E = E_3 \geq 0$
infinite (ungebundene) Bewegung in $[r_3, \infty)$, i.a. $(r \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty)$

$\triangleleft \quad p_\theta = 0 :$



- (i) $E = E_1 < 0$ finite Bewegung in $[0, r_1]$
- (ii) $E = E_2 > 0$ infinite Bewegung i.a. $r \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$

Grob-Klassifikation (nicht als Definition der Himmelskörper zu verstehen):

- Planeten $E < 0$, $p_\theta > 0$
- Kometen $E > 0$, $p_\theta > 0$ oder $E < 0$, $p_\theta > 0$
- Meteoriten (u.a.) $E > 0$, $p_\theta = 0$

c) Zur Lösung der BWGl.

$$\text{Ausgangspunkt :} \quad E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

$$\begin{aligned} \iff \quad \dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} \right)} \\ \longrightarrow \quad t - t_0 &= \int_{t_0}^t dt' = \pm \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r') - \frac{p_\theta^2}{2\mu r'^2} \right)}} \end{aligned}$$

\longrightarrow Umkehrung liefert $r(t)$

$$\text{bestimme } \theta(t) \text{ aus } \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{\mu r^2} \quad \longrightarrow \quad \theta(t) - \theta_0 = \frac{p_\theta}{\mu} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{r^2(t')}$$

Bemerkung: direkte Integration nicht ohne weiteres durchführbar, einige Details: [11], Kap. 4.1.2.6

Alternative Betrachtung: Bahnkurve $r(\theta)$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{p_\theta}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} \right)}$$

$$\Leftrightarrow \theta(r) - \theta_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' = \pm \frac{p_\theta}{\mu} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r') - \frac{p_\theta^2}{2\mu r'^2} \right)}}$$

(Umkehrung $\longrightarrow r(\theta)$)

Zur Lösung des Integrals für $V(r) = \alpha r^{n+1}$: [4], Kap. 3.5

Für $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ ($\alpha = \gamma\mu M$)

Lösung:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} \left(1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0) \right)$$

$$p = \frac{p_\theta^2}{\mu\alpha} \quad (> 0)$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_\theta^2}{\mu\alpha^2}} \quad \text{"numerische Exzentrizität"}$$

\longrightarrow Brennpunktbezogene Darstellung von Kegelschnitten (in Polako.)

Zusammenfassung der Bahnformen:

$\varepsilon = 0$	$E = -\frac{\mu\alpha^2}{2p_\theta^2} \equiv E_k$ $r = p = \frac{p_\theta^2}{\mu\alpha^2} = \text{konst.}$	Kreis	}	Planeten (+ Kometen)
$0 < \varepsilon < 1$	$E_k < E < 0$ $r_{max} = \frac{p}{1-\varepsilon}, \quad r_{min} = \frac{p}{1+\varepsilon}$ " Aphel " " Perihel "	Ellipse		

$$\left. \begin{array}{l|l|l} \varepsilon = 1 & E = 0 & \text{Parabel} \\ \varepsilon > 1 & E > 0 & \text{Hyperbel} \end{array} \right\} \text{Kometen}$$

Literatur: [4], Kap. 3.6, [11], Kap. 4.1.2 und [8], Kap. 3

d) Die Kepler'schen Gesetze (1609, 1619)

- I. "Die Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht"
- II. "Der Fahrstrahl der Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen" (Flächensatz)
- III. "Das Quadrat der Periode ist der dritten Potenz der großen Halbachse proportional"

5.1.3 Zusatzbemerkungen

a) Runge-Lenz-Vektor

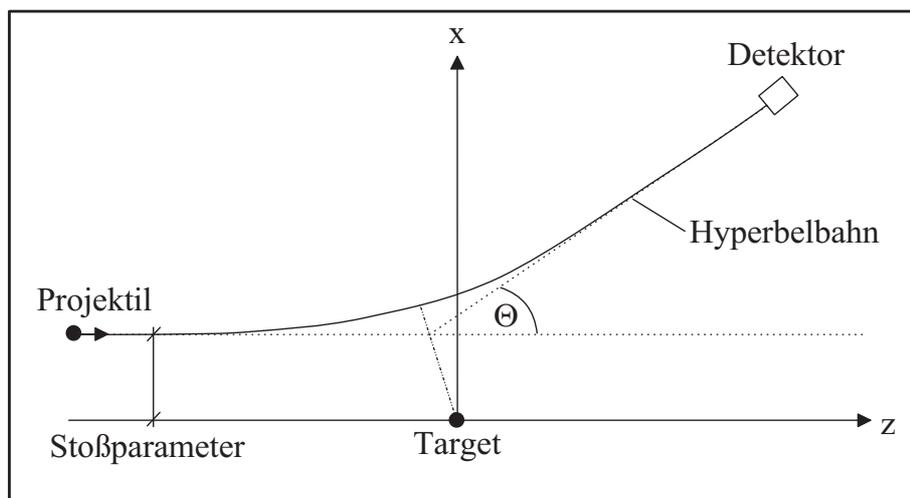
$$\mathbf{\Lambda} := \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{l}}{\mu\alpha} - \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Lambda} = 0 \quad \text{für} \quad V(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad (\text{d.h. für } \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\alpha}{r^3}\mathbf{r})$$

Eigenschaften: $\mathbf{\Lambda}$ zeigt zum Perihel; $|\mathbf{\Lambda}| = \varepsilon$; (siehe [8], Kap. 3.5.3)

b) Hyperbellösung ($E > 0$)

→ betrachte aneinander streuende (Coulombwechselwirkende) Ladungen
typisches Streuexperiment:



Observable: differentieller Wirkungsquerschnitt = Maß für die nach θ gestreuten Teilchen

→ Ergebnis für Coulombwechselwirkung: "Rutherford-Formel"

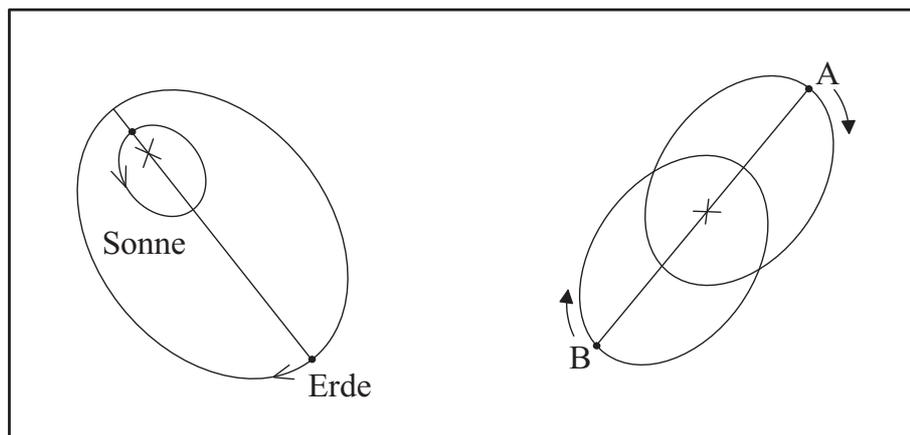
Literatur: [4], Kap. 3.7 (3.8), [7], Kap. 11.6 (11.7), [2], Kap. 18 und [6] II, Kap. 13

(Rutherford 1911 → Beschuß einer Goldfolie mit α -Teilchen; Rutherford-Formel gilt in KM und QM)

c) Mitbewegung der Sonne

im SP-System gilt:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_E &= \frac{M_\odot}{M_\odot + m_E} \mathbf{r} \approx \mathbf{r} && \text{(Erde)} \\ \mathbf{r}_\odot &= -\frac{m_E}{M_\odot + m_E} \mathbf{r} \approx 0 && \text{(Sonne)} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Ähnliche Ellipsen um} \\ \text{den SP als gemeinsamen} \\ \text{Brennpunkt} \end{array}$$



d) Reale Planetenbahnen

Abweichung von Ellipsenbahnen wegen

- (i) Gravitationskräften der Planeten untereinander
- (ii) Relativistische Effekte
- (iii) Abplattung + Eigenrotation (→ "Quadrupolmoment") der Sonne

→ kleine Störungen (näherungsweise Berechnung mittels "Störungstheorie")

Beispiel: Periheldrehung von Merkur ≈ 1 Bogensekunde/Umlauf

$$\text{Effekt (iii)} \ll \text{Effekt (ii)} \approx \frac{1}{10} \text{Effekt (i)}$$

e) Das deterministische Vielkörperproblem

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \mathbf{v}^2 + \gamma \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (3N \text{ FGs})$$

→ geradlinig gleichförmige Bewegung des SPs:

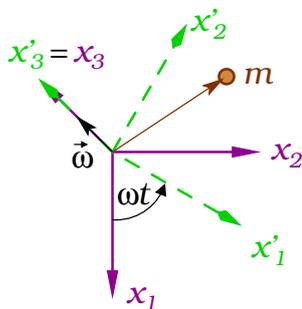
$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \quad (3 \text{ FGs})$$

1. Schon für $N = 3$ ist das "Relativproblem" (6 FGs) i.a. nicht mehr analytisch lösbar
2. Bereiche chaotisch-deterministischer Bewegung im Sonnensystem existieren

Literatur: [12], Kap. 6.6

5.2 Beschleunigte Bezugssysteme

5.2.1 Uniform rotierendes KOS



S : Inertialsystem

S': rotierendes KOS (nicht inertial)

Beispiel (i): Ruhender MP in S $\xrightarrow{1. \text{ Axiom}}$ kräftefrei

MP aus Sicht von S': Kreisbahn um x_3 -Achse $\xrightarrow{1. \text{ Axiom}}$ nicht kräftefrei → Scheinkraft

Beispiel (ii): MP im Potential U (keine ZBs)

$$S : \quad L = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i^2 - U(x_1 x_2 x_3)$$

$$\implies \text{Lg - Gl'en} \equiv \text{Newton II} : \quad m\ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} \text{Kotrafo : } x_1 &= x'_1 \cos \omega t - x'_2 \sin \omega t \\ x_2 &= x'_1 \sin \omega t + x'_2 \cos \omega t \\ x_3 &= x'_3 \end{aligned}$$

(passive Drehung)

Zusammenfassung:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x}'_1 \cos \omega t - \dot{x}'_2 \sin \omega t - x'_1 \omega \sin \omega t - x'_2 \omega \cos \omega t \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}'_1 \sin \omega t + \dot{x}'_2 \cos \omega t + x'_1 \omega \cos \omega t - x'_2 \omega \sin \omega t \\ \dot{x}_3 &= \dot{x}'_3 \end{aligned}$$

$$S' : L = \frac{m}{2} \left\{ \dot{x}'_1{}^2 + \dot{x}'_2{}^2 + \dot{x}'_3{}^2 + 2\omega(x'_1 \dot{x}'_2 - x'_2 \dot{x}'_1) + \omega^2(x'^2_1 + x'^2_2) \right\} - U(x'_1 x'_2 x'_3)$$

$$\text{Lagrange - Gleichungen : } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'_i} - \frac{\partial L}{\partial x'_i} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'_1} = m\dot{x}'_1 - m\omega x'_2, \quad \frac{\partial L}{\partial x'_1} = m\omega \dot{x}'_2 + m\omega^2 x'_1 - \frac{\partial U}{\partial x'_1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'_2} = m\dot{x}'_2 + m\omega x'_1, \quad \frac{\partial L}{\partial x'_2} = -m\omega \dot{x}'_1 + m\omega^2 x'_2 - \frac{\partial U}{\partial x'_2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'_3} = m\dot{x}'_3, \quad \frac{\partial L}{\partial x'_3} = -\frac{\partial U}{\partial x'_3}$$

BWGI
↪

$$\begin{aligned} m\ddot{x}'_1 &= \underbrace{2m\omega \dot{x}'_2 + m\omega^2 x'_1}_{\text{Scheinkräfte}} - \frac{\partial U}{\partial x'_1} = Q_1 \\ m\ddot{x}'_2 &= \underbrace{-2m\omega \dot{x}'_1 + m\omega^2 x'_2}_{\text{Scheinkräfte}} - \frac{\partial U}{\partial x'_2} = Q_2 \\ m\ddot{x}'_3 &= -\frac{\partial U}{\partial x'_3} = Q_3 \end{aligned}$$

$$\text{zeige : } Q_i = \left(\frac{\partial U^*}{\partial x'_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U^*}{\partial \dot{x}'_i} \right)$$

wobei : $U^*(x'_1 x'_2 x'_3) = U(x'_1 x'_2 x'_3) - m\omega(x'_1 x'_2 - x'_2 x'_1) - \frac{m}{2}\omega^2(x_1'^2 + x_2'^2)$

$$\longrightarrow L = T' - U^*$$

$$T' = \frac{m}{2}(\dot{x}_1'^2 + \dot{x}_2'^2 + \dot{x}_3'^2)$$

5.2.2 Allgemeine Rotation

S : Inertialsystem (Ursprung 0)

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$$

S': rotierendes Inertialsystem (Ursprung 0' = 0)

$$\mathbf{r}' = \sum_{i=1}^3 x'_i \mathbf{e}'_i = \mathbf{r}$$

Transformation der Geschwindigkeiten:

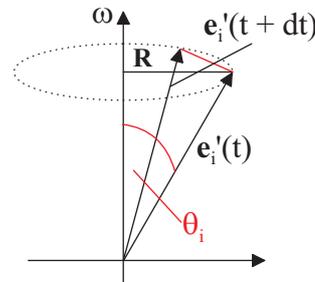
Behauptung : $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + (\boldsymbol{\omega}^{(l)} \times \mathbf{r}^{(l)})$, $(\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}' , \mathbf{r} = \mathbf{r}')$

Beweis:

(i) $\dot{\mathbf{e}}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i$

denn : $|\dot{\mathbf{e}}'_i(t)| = R\omega = \sin\theta_i\omega = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i|$

Überprüfe Richtung mit 'Drei-Finger-Regel'



(ii) $\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \frac{d}{dt} \sum_i x_i \mathbf{e}_i = \sum_i \dot{x}_i \mathbf{e}_i$
 $= \frac{d}{dt}\mathbf{r}' = \frac{d}{dt} \sum_i x'_i \mathbf{e}'_i = \sum_i \dot{x}'_i \mathbf{e}'_i + \sum_i x'_i \dot{\mathbf{e}}'_i$
 $= \sum_i \dot{x}'_i \mathbf{e}'_i + \boldsymbol{\omega} \times \sum_i x'_i \mathbf{e}'_i = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$

Bemerkung: Relation gilt allg.:

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{A} \right|_S = \left. \frac{d}{dt} \mathbf{A} \right|_{S'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

$$\rightarrow \text{symbol. Notation } \frac{d}{dt}\Big|_S = \frac{d}{dt}\Big|_{S'} + \boldsymbol{\omega} \times$$

Umschreibung der Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 - U(\mathbf{r}) = \frac{m}{2} [\mathbf{v}' + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')]^2 - U(\mathbf{r}') \\ &= \frac{m}{2} \left\{ \mathbf{v}'^2 + 2\mathbf{v}'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')^2 \right\} - U(\mathbf{r}') \end{aligned}$$

Zutaten für die Auswertung:

- $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} a_j b_k$

$$\text{mit } \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (ijk) = (123) \text{ oder zyklische Permutation} \\ -1 & (ijk) = \text{antizyklische Permutation} \\ 0 & \text{mind. zwei gleich Indizes} \end{cases}$$

”Levi-Civita-Symbol”
(vollständiger, antisymmetrischer Tensor)

- $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$

- $\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - \mathbf{a}^2 \mathbf{b}$

$$\begin{aligned} \rightarrow L &= \frac{m}{2} \left\{ \sum_i \dot{x}'_i{}^2 + 2 \sum_i \dot{x}'_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')_i + \sum_i \omega_i^2 \sum_j x'_j{}^2 - \left(\sum_i \omega_i x'_i \right)^2 \right\} \\ &\quad - U(x'_1 x'_2 x'_3) \\ &= \frac{m}{2} \left\{ \sum_i \dot{x}'_i{}^2 + 2 \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \dot{x}'_i \omega_j x'_k + \sum_i \omega_i^2 \sum_j x'_j{}^2 - \left(\sum_j \omega_j x'_j \right)^2 \right\} \\ &\quad - U(x'_1 x'_2 x'_3) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'_l} = m \dot{x}'_l + m \sum_{jk} \varepsilon_{ljk} \omega_j x'_k$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'_l} = m \ddot{x}'_l + m \sum_{jk} \varepsilon_{ljk} \dot{\omega}_j x'_k + m \sum_{jk} \varepsilon_{ljk} \omega_j \dot{x}'_k$$

$$-\frac{\partial L}{\partial x'_l} = -m \sum_{ij} \varepsilon_{ijl} \dot{x}'_i \omega_j - m \sum_i \omega_i^2 x'_l + m \sum_i \omega_i x'_i \omega_l + \frac{\partial U}{\partial x'_l}$$

$$\underline{\text{NR}}: \quad -m \sum_{ij} \varepsilon_{ijl} \dot{x}'_i \omega_j \stackrel{\varepsilon_{ijl} = -\varepsilon_{lji}}{=} m \sum_{ij} \varepsilon_{lji} \omega_j \dot{x}'_i$$

$$\stackrel{i \rightarrow k}{=} m \sum_{ik} \varepsilon_{ljk} \omega_j \dot{x}'_k$$

$$\text{Lg - Gl'en:} \quad m \ddot{x}'_l + m \sum_{jk} \varepsilon_{ljk} \dot{\omega}_j x'_k + 2m \sum_{jk} \varepsilon_{ljk} \omega_j \dot{x}'_k + m \sum_i x'_i \omega_i \omega_l$$

$$-m \sum_i \omega_i^2 x'_l + \frac{\partial U}{\partial x'_l} = 0$$

$$\iff m \ddot{x}'_l + m(\dot{\omega} \times \mathbf{r}')_l + 2m(\omega \times \mathbf{v}')_l + m(\omega \cdot \mathbf{r}')$$

$$- m\omega^2 x'_l + \frac{\partial U}{\partial x'_l} = 0$$

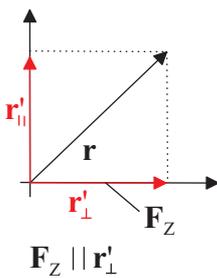
$$\iff m\mathbf{a}' = -m(\dot{\omega} \times \mathbf{r}') - 2m(\omega \times \mathbf{v}') + m(\omega^2 \mathbf{r}' - (\omega \cdot \mathbf{r}')\omega) - \nabla' U$$

$$m\mathbf{a}' = -m(\dot{\omega} \times \mathbf{r}') - 2m(\omega \times \mathbf{v}') - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}') - \nabla U$$

Scheinkräfte:

- (i) $\mathbf{F}_{\dot{\omega}} = -m(\dot{\omega} \times \mathbf{r}')$ (nur für $\dot{\omega} \neq 0$)
- (ii) $\mathbf{F}_C = -2m(\omega \times \mathbf{v}')$ "Corioliskraft" (nur für $\mathbf{v} \neq 0$)
- (iii) $\mathbf{F}_Z = -m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}')$ Zentrifugalkraft

◁ Zerlegung:



$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{||} + \mathbf{r}'_{\perp}$$

$$\hookrightarrow |\omega \times \mathbf{r}'| = \omega r'_{\perp}$$

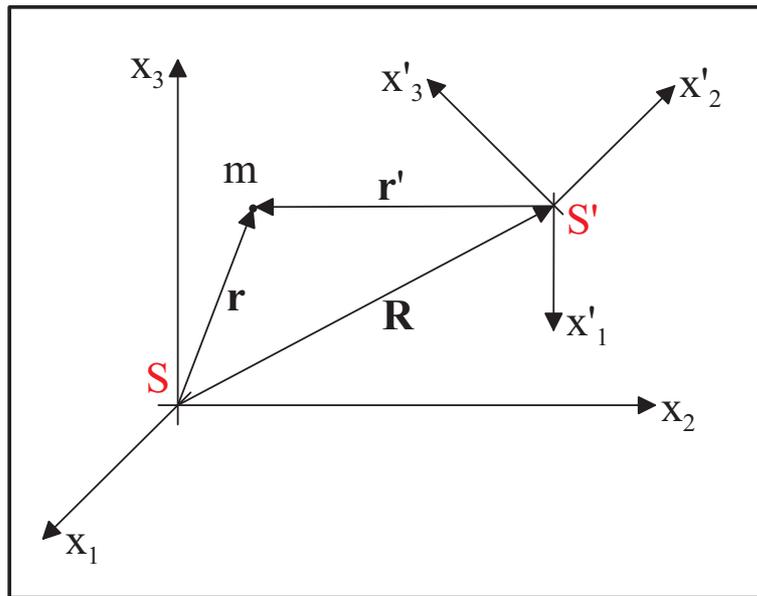
$$\hookrightarrow F_Z = m\omega^2 r'_{\perp}$$

5.2.3 Allgemeine beschleunigte Bezugssysteme: Rotation und Translation

Transformation:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$$

$$\iff \sum_i x_i(t) \mathbf{e}_i = \mathbf{R}(t) + \sum_i x_i(t) \mathbf{e}_i(t)$$



$$\begin{aligned} \hookrightarrow \sum_i \dot{x}_i \mathbf{e}_i &= \dot{\mathbf{R}} + \sum_i \dot{x}'_i \mathbf{e}'_i + \sum_i x'_i \dot{\mathbf{e}}'_i \\ &= \dot{\mathbf{R}} + \sum_i \dot{x}'_i \mathbf{e}'_i + \boldsymbol{\omega} \times \sum_i x'_i \mathbf{e}'_i \end{aligned}$$

$$\iff \mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

einsetzen in $L = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 - U$:

Lg-Gl'en
 \iff

$$\begin{aligned} m \mathbf{a}' &= -\nabla' U - m \ddot{\mathbf{R}}' - m (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} + \mathbf{r}')) \\ &\quad - 2m (\boldsymbol{\omega} \times (\dot{\mathbf{R}}' + \mathbf{v}')) - m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} + \mathbf{r}')) \end{aligned}$$

(wobei $\mathbf{R} = \mathbf{R}' \longrightarrow \dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$)

Kompaktere Form der BWGl:

$$m \mathbf{a}' = -\nabla' U - m \ddot{\mathbf{R}} - m (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - 2m (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') - m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Begründung :} \\ \ddot{\mathbf{R}} = \frac{d}{dt} \Big|_S \dot{\mathbf{R}} = \frac{d}{dt} \Big|_S (\dot{\mathbf{R}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \\ = \frac{d}{dt} \Big|_{S'} + \boldsymbol{\omega} \times (\dot{\mathbf{R}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \\ = \ddot{\mathbf{R}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \\ \text{mit} \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\omega}}' \end{array} \right)$$

Zusätzliche Scheinkraft $\mathbf{F}_T = -m\ddot{\mathbf{R}}$ 'Trägheitskraft'

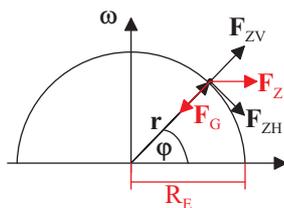
$$\left. \begin{array}{l} \text{Spezialfall : } \boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0 ; \quad \ddot{\mathbf{R}} = 0 \implies m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} \\ \longrightarrow \mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \dot{\mathbf{R}}t \quad \text{Galilei - Trafo} \end{array} \right\} \implies \text{Forminvarianz von} \\ \text{Newton II unter GT}$$

5.2.4 Anwendung: Scheinkräfte auf der rotierenden Erde

Eigenrotation : $\boldsymbol{\omega} = \frac{2\pi}{\text{Tag}} \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{s} \quad (\dot{\boldsymbol{\omega}} \approx 0)$

a) Auf der Erdoberfläche ruhender MP

Kräfte auf MP:



- $\mathbf{F}_G = m\mathbf{g}$
- $\mathbf{F}_Z = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_Z &= m\omega^2 r_{\perp} = m\omega^2 R_E \cos \varphi =: m a_Z \\ a_Z &= 0,034 \cos \varphi \frac{m}{s^2} \\ \hookrightarrow \frac{a_Z}{g} &\leq 0,0034 \end{aligned}$$

Vertikalkomponente:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{eff} &= \mathbf{g} + \mathbf{a}_{ZV} = -(g - \omega^2 R_e \cos^2 \varphi) \mathbf{e}_r \\ &\quad - g_{eff} \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

Horizontalkomponente:

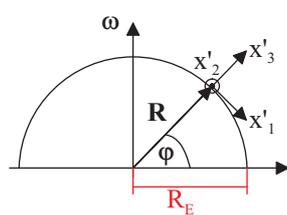
$$a_{ZH} = \omega^2 R_E \cos \varphi \sin \varphi \quad \text{wirkt in Richtung Äquator}$$

→ wird aufgefangen von der Anpassung der Massenverteilung der Erde (Kugel → Ellipsoid)

In praxi:

$$\mathbf{F}_G + \mathbf{F}_Z \approx -mg_{eff} \mathbf{e}_r$$

b) Freier Fall auf rotierender Erde



x'_1 : Nord → Süd

x'_2 : West → Ost

x'_3 : Vertikal nach oben

BWGl. für $\dot{\omega} = 0$, $\mathbf{R} = R_E \mathbf{e}'_3 \rightarrow \dot{\mathbf{R}}' = \ddot{\mathbf{R}}' = 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow m \mathbf{a}' &= -\nabla' U - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} + \mathbf{r}')) \\ &\approx m\mathbf{g} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') \\ &= mg_{eff} - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (\text{für } x'_3 \ll R_E) \end{aligned}$$

Zur Auswertung:

- $\boldsymbol{\omega} = -\omega \cos \varphi \mathbf{e}'_1 + \omega \sin \varphi \mathbf{e}'_3$
- $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = \begin{vmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \\ -\omega \cos \varphi & 0 & \omega \sin \varphi \\ \dot{x}'_1 & \dot{x}'_2 & \dot{x}'_3 \end{vmatrix} = -\omega \dot{x}'_2 \sin \varphi \mathbf{e}'_1 - \omega \dot{x}'_2 \cos \varphi \mathbf{e}'_3 + (\omega \dot{x}'_1 \sin \varphi + \omega \dot{x}'_3 \cos \varphi) \mathbf{e}'_2$

BWGl:

$$\begin{aligned} \ddot{x}'_1 &= 2\omega \dot{x}'_2 \sin \varphi \\ \ddot{x}'_2 &= -2\omega \dot{x}'_1 \sin \varphi - 2\omega \dot{x}'_3 \cos \varphi \\ \ddot{x}'_3 &= -g_{eff} + 2\omega \dot{x}'_2 \cos \varphi \end{aligned}$$

Näherungslösung: betrachte ABs

$$\begin{aligned} x'_1(0) &= \dot{x}'_1(0) = 0 \\ x'_2(0) &= \dot{x}'_2(0) = 0 \\ x'_3(0) &= h, \quad \dot{x}'_3(0) = 0 \\ &\rightarrow \dot{x}'_1, \dot{x}'_2 \ll \dot{x}'_3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\text{genäherte BWGl}} \\ \ddot{x}'_1 = 0 \\ \ddot{x}'_2 = -2\omega\dot{x}'_3 \cos\varphi \\ \ddot{x}'_3 = -g_{eff} \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{Lsg.}} \boxed{\begin{array}{l} x'_1 = 0 \\ x'_3 = h - \frac{1}{2}g_{eff}t^2 \end{array}}$$

$$\hookrightarrow \ddot{x}'_2 = 2\omega g_{eff} t \cos\varphi$$

$$\hookrightarrow \boxed{x'_2 = \frac{1}{3}g_{eff}\omega t^3 \cos\varphi}$$

Diskussion:

- (i) $x'_2(t) \geq 0$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) \hookrightarrow Ostabweichung
 - (ii) Zahlenbeispiel: $h = 100m \rightarrow$ Fallzeit $T \approx 4,5s$
 $\varphi = 45^\circ \rightarrow x'_2(T) \approx 1,6cm$
 - (iii) Exakte Lösung der DGLs möglich: [5] II, Kap. 1,2 und [11], Kap. 6.2.3.1
- für Zahlenbeispiel (ii): Zusätzliche Südabweichung $2 \cdot 10^{-4}cm$

Abschließende Bemerkungen:

- (i) Variante von b): freier Wurf auf rotierender Erde
(Details: [11], Kap. 6.2.3.2)
- (ii) Schein-(Coriolis-)Kräfte sind nur für 'großräumige' Bewegungsformen signifikant
(im Kleinen ist Erde \approx IS)
- (iii) Auswirkungen der Corioliskräfte auf das Wetter
([7], Kap. 1.5)
- (iv) weitere Anwendung: Foucaultsches Pendel (\rightarrow Übungen)

5.3 Bewegung starrer Körper

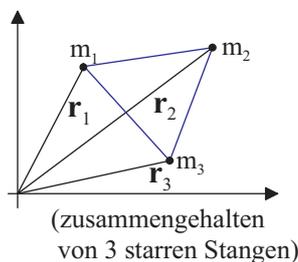
Ziel: Beschreibung ausgedehnter Objekte

Definition: "Starrer Körper"

Ein starrer Körper ist eine (kontinuierliche) Verteilung von MPs, deren Abstände untereinander sich nicht mit der Zeit ändern.

5.3.1 Vorbereitungen

◁ Starrer Körper aus N MP $(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_N)$



Zwangsbedingungen:

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = c_{ij} = \text{konst.} \quad \forall ij$$

$$\longrightarrow \binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2} \quad \text{Bedingungen}$$

N	$\binom{N}{2}$	$3N - \binom{N}{2}$
2	1	5
3	3	6
4	6	6
5	10	5
6	15	3
7	21	0
8	28	-4

→ $\binom{N}{2}$ ZBs nicht unabhängig voneinander

→ für $N > 2$ ⇒

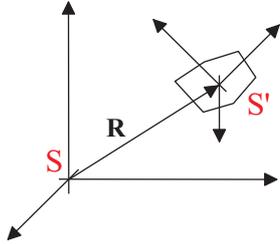
6 FGs

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i^2 - \sum_{i=1}^N U(\mathbf{r}_i) \quad (V = \text{konst.})$$

Theorem von Chasles: Die allg. Bewegung eines starren Körpers setzt sich aus einer Translation und einer Rotation des Gesamtsystems zusammen

Mögliche Wahl für 3 Koordinaten für die Translation: SP $\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i$

Zur Fassung der Rotation:



S : Raumfestes IS

S': Körperfestes System

(Ursprung in der Regel SP)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i \\ \mathbf{v}_i &= \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{v}'_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i \quad (\text{siehe Kap.5.2}) \\ &= \dot{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i \quad (\mathbf{v}'_i = 0 \text{ für } \underline{\text{starren}} \text{ Körper}) \end{aligned}$$

5.3.2 Kinetische Energie und Trägheitstensor

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i \left(\dot{\mathbf{R}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left\{ \dot{\mathbf{R}}^2 + 2\dot{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \dot{\mathbf{R}} \left(\boldsymbol{\omega} \times \underbrace{\sum_i m_i \mathbf{r}'_i}_{=0} \right) + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)^2 \\ &= T_{trans} \quad \quad \quad + T_{rot} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{rot} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}_i'^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}')^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left\{ \sum_{j=1}^N \omega_j'^2 \mathbf{r}_i'^2 - \left(\sum_{j=1}^N \omega_j' x_i^{j'} \right) \left(\sum_{k=1}^3 \omega_k' x_i^{k'} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \sum_{j,k=1}^N \left\{ \mathbf{r}_i'^2 \delta_{jk} - x_i^{j'} x_i^{k'} \right\} \omega_j' \omega_k' \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Theta_{jk} \omega_j' \omega_k' \end{aligned}$$

mit $\Theta_{jk} = \sum_{i=1}^N m_i \left\{ \delta_{jk} \mathbf{r}_i'^2 - x_i^{j'} x_i^{k'} \right\}$ 'Trägheitstensor' (Trägheitsmatrix)

Über Tensoren: [2], Kap. 21 und [8]

Zusammenfassung:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \omega^T \underline{\underline{\Theta}} \omega$$

5.3.3 Struktur und Eigenschaften des Trägheitstensors

a) Übergang zu kontinuierlicher Massenverteilung

(Vereinbarung: Die Striche an KF-Koordinaten werden ab jetzt weggelassen)

$$m_i = \Delta m_i = \rho(\mathbf{r}_i) \Delta V_i \quad \longrightarrow \quad \rho(\mathbf{r}) d^3 r = dm$$

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad \longrightarrow \quad \int_V \rho(\mathbf{r}) d^3 r$$

$$\Theta_{jk} = \int_V \rho(\mathbf{r}) \{ \delta_{jk} \mathbf{r}^2 - x_j x_k \} d^3 r$$

Explizit:

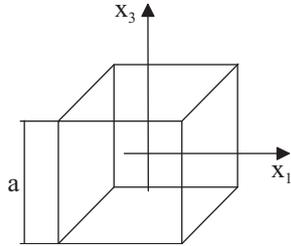
$$\left. \begin{aligned} \Theta_{11} &= \int_V (x_2^2 + x_3^2) \rho(\mathbf{r}) d^3 r \\ \Theta_{22} &= \int_V (x_1^2 + x_3^2) \rho(\mathbf{r}) d^3 r \\ \Theta_{33} &= \int_V (x_1^2 + x_2^2) \rho(\mathbf{r}) d^3 r \end{aligned} \right\} \text{''Trägheitsmomente''}$$

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{12} = \Theta_{21} &= - \int_V x_1 x_2 \rho(\mathbf{r}) d^3 r \\ \Theta_{13} = \Theta_{31} &= - \int_V x_1 x_3 \rho(\mathbf{r}) d^3 r \\ \Theta_{23} = \Theta_{32} &= - \int_V x_2 x_3 \rho(\mathbf{r}) d^3 r \end{aligned} \right\} \text{''Deviationsmomente''}$$

Bemerkung: $\underline{\underline{\Theta}}$ ist symmetrisch ($\Theta_{jk} = \Theta_{kj}$)

b) Beispiele

(i) Homogener Würfel (I)

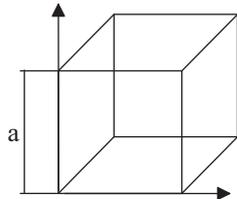


$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \rho_0 = \frac{M}{a^3} & \mathbf{r} \in W \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= \frac{M}{a^3} \int_W (x_2^2 + x_3^2) d^3r = \frac{M}{a^3} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x_2^2 + x_3^2) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \frac{M}{a^2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx_2 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx_3 (x_2^2 + x_3^2) \\ &= \frac{M}{a^2} \left(a \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x_2^2 dx_2 + a \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x_3^2 dx_3 \right) \\ &= \frac{M}{a} \left(\frac{x_2^3}{3} \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} + \frac{x_3^3}{2} \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{6} Ma^2 = \Theta_{22} = \Theta_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{12} &= -\frac{M}{a^3} \int_W x_1 x_2 dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= -\frac{M}{a^3} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x_1 dx_1 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x_2 dx_2 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx_3 \\ &= -\frac{M}{4a^2} x_1^2 \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x_2^2 \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \\ &= 0 = \Theta_{13} = \Theta_{23} \end{aligned}$$

(ii) Homogener Würfel (II)



$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= \frac{M}{a^3} \int_0^a \int_0^a \int_0^a (x_2^2 + x_3^2) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \frac{M}{a} \left(\frac{x_2^3}{3} \Big|_0^a + \frac{x_3^3}{2} \Big|_0^a \right) \\ &= \frac{2}{3} Ma^2 = \Theta_{22} = \Theta_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{12} &= -\frac{M}{a^3} \int_0^a x_1 dx_1 \int_0^a x_2 dx_2 \int_0^a dx_3 \\ &= -\frac{M}{a^2} \left(\frac{1}{2} x_1^2 \Big|_0^a \right) \left(\frac{1}{2} x_2^2 \Big|_0^a \right) \\ &= -\frac{Ma^2}{4} = \Theta_{13} = \Theta_{23} \end{aligned}$$

c) Hauptachsentheorem

$$\text{Falls } \Theta_{jk} = \Theta_k \delta_{jk} \quad \longrightarrow \quad T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_k \Theta_k \omega_k^2$$

Existiert für jeden starren Körper und jeder Wahl des Koordinatensystems ein KF-System, sodass $\Theta_{jk} = \Theta_k \delta_{jk}$?

→ Ja! ($\underline{\Theta}$ ist symmetrisch, also diagonalisierbar)

Diagonalisierbarkeit von $\underline{\Theta}$ $\iff \exists$ orthogonale Transformation(-Matrix)

$$\underline{\underline{D}}^{-1} = \underline{\underline{D}}^T \iff (\underline{\underline{D}}^{-1})_{kj} = D_{kj}^{-1} = D_{jk} ,$$

$$\text{sodass : } \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{\Theta}} \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix} \iff \sum_{jk} D_{nj}^T \Theta_{jk} D_{km} = \delta_{mn} \Theta_n$$

$$\begin{aligned} \iff \underline{\underline{\Theta}} \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}} \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix} &\iff \sum_k \Theta_{jk} D_{km} = \sum_k D_{jk} \Theta_k \delta_{km} \\ &= D_{jm} \Theta_m \\ &= \sum_k \delta_{jk} D_{km} \Theta_m \end{aligned}$$

$$\iff \boxed{\sum_k (\Theta_{jk} - \Theta_m \delta_{jk}) D_{km} = 0}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \Theta_{11} - \Theta_m & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} - \Theta_m & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} - \Theta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{1m} \\ D_{2m} \\ D_{3m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2, 3$$

Praktisches Diagonalisierungsverfahren:

- (i) Bedingung für nichttriviale Lösung des homogenen Gleichungssystems:
 $\det(\Theta_{jk} - \Theta_m \delta_{jk}) = 0$
 \rightarrow Lösung dieser (kubischen) "Säkulargleichung" liefert "Eigenwerte"
 $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$
- (ii) Bestimme $\underline{\underline{D}}$ durch Einsetzen der Eigenwerte in das homogene Gleichungssystem

Bemerkungen:

- (i) Θ_k : "Hauptträgheitsmomente", das entsprechende KF-System heißt "Hauptachsensystem" (HAS) ($\Theta_k = \int_V \rho(\mathbf{r})(\mathbf{r}^2 - x_k^2) d^3r$ bzgl. HAS)
- (ii) Trafo-Matrizen $\underline{\underline{D}}$ charakterisieren Drehung im \mathfrak{R}^3
- (iii) Hauptachsentheorem: Für jeden starren Körper gibt es (mindestens) einen Satz von Hauptachsen (für einen geg. Koordinatenursprung)
- (iv) Eigenwerte einer symmetrischen Matrix sind reell
- (v) $\underline{\underline{\Theta}}$ ist positiv definit (da $T_{rot} > 0$) \implies alle Eigenwerte sind positiv (was aufgrund der Formel für Θ_k evident ist)
- (vi) Satz von Steiner (\rightarrow Übung 12.3)

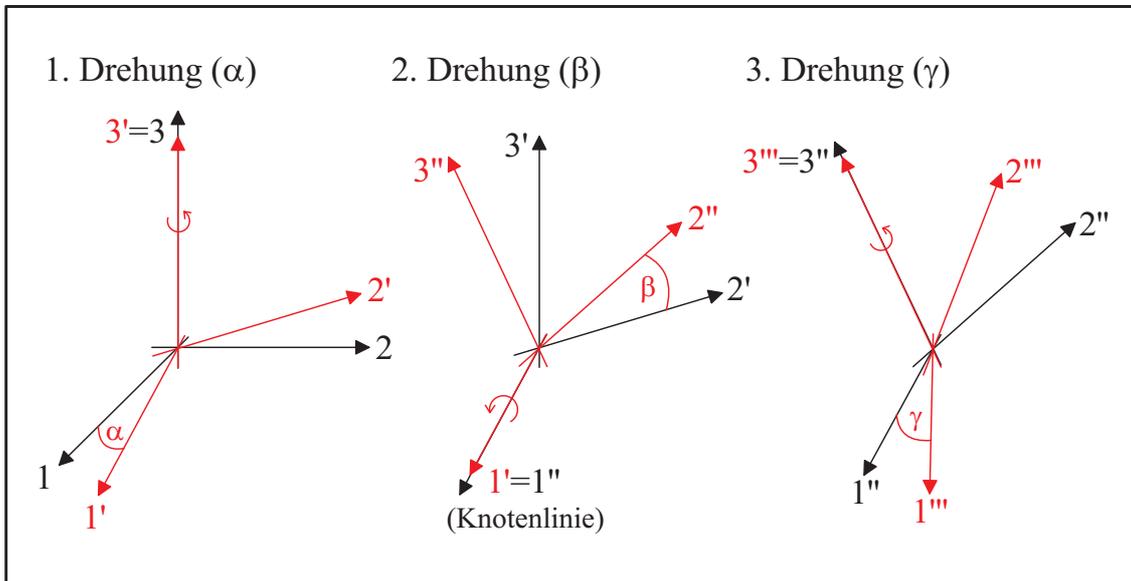
5.3.4 Generalisierte Koordinaten für die Rotation: Euler Winkel

Behauptung: Beliebige Drehung $\mathbf{r}_{RF} \xrightarrow{\underline{\underline{D}}} \mathbf{r}_{KF}$ ($0_{RF} = 0_{KF}$) kann durch drei aufeinanderfolgende Drehungen um die "Euler-Winkel" (α, β, γ) beschrieben werden:

$$\mathbf{r}_{KF} = \underline{\underline{D}}_{\gamma} \underline{\underline{D}}_{\beta} \underline{\underline{D}}_{\alpha} \mathbf{r}_{RF} = \underline{\underline{D}} \mathbf{r}_{RF}$$

Bemerkung: Drehmatrizen bilden nicht-abelsche kontinuierliche Gruppe

Festlegung der Euler Winkel:



Detailrechnungen (siehe Anhang A.2) ergeben die körperfeste Komponentenzersetzung von ω

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\alpha} \sin \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma \\ \omega_2 &= \dot{\alpha} \sin \beta \cos \gamma - \dot{\beta} \sin \gamma \\ \omega_3 &= \dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\gamma}\end{aligned}$$

Lagrange-Funktion des starren Körpers:

$$\begin{aligned}L &= T - U = T_{trans} + T_{rot} - U \\ &= \frac{M}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_k \Theta_k \omega_k^2}_{\text{(im HAS)}} - U \\ &= \frac{M}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \Theta_1 (\dot{\alpha} \sin \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma)^2 + \Theta_2 (\dot{\alpha} \sin \beta \cos \gamma - \dot{\beta} \sin \gamma)^2 \right. \\ &\quad \left. + \Theta_3 (\dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\gamma})^2 \right\} - U(X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma) \\ &= L(XYZ, \alpha\beta\gamma; \dot{X}\dot{Y}\dot{Z}, \dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma})\end{aligned}$$

Beispiel zur potentiellen Energie: homogenes Schwerfeld

$$U = \sum_i m_i g z_i \Big|_{RF} = g \sum_i m_i z_i = MgZ = U(Z)$$

$$\text{offensichtlich : } \frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{\partial U}{\partial \beta} = \frac{\partial U}{\partial \gamma} = 0$$

↔ die Rotationsbewegung wird nicht von U beeinflusst (→ 'freier' Kreisel)

5.3.5 BWG1'en des starren Körpers

$$\begin{aligned} \text{Translation : } \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = \frac{\partial L}{\partial X} &\iff M\ddot{X} = -\frac{\partial U}{\partial X} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} = \frac{\partial L}{\partial Y} &\iff M\ddot{Y} = -\frac{\partial U}{\partial Y} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Z}} = \frac{\partial L}{\partial Z} &\iff M\ddot{Z} = -\frac{\partial U}{\partial Z} \quad (= -Mg \text{ für obiges Bsp.}) \end{aligned}$$

- Rotation: • nichtlineare, gekoppelte DGI's 2. Ordnung für Euler-Winkel α, β, γ (siehe Anhang A.2)
• 'Kurzform':

$$\begin{aligned} \Theta_1 \dot{\omega}_1 - (\Theta_2 - \Theta_3) \omega_2 \omega_3 &= M_1 \\ \Theta_2 \dot{\omega}_2 - (\Theta_3 - \Theta_1) \omega_1 \omega_3 &= M_2 \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3 - (\Theta_1 - \Theta_2) \omega_2 \omega_3 &= M_3 \end{aligned}$$

"Euler-Gleichungen", M_i : KF-Komponenten des Drehmoments

→ nichtlineare, gekoppelte DGI's 1. Ordnung für die KF-Komponenten von $\boldsymbol{\omega}$

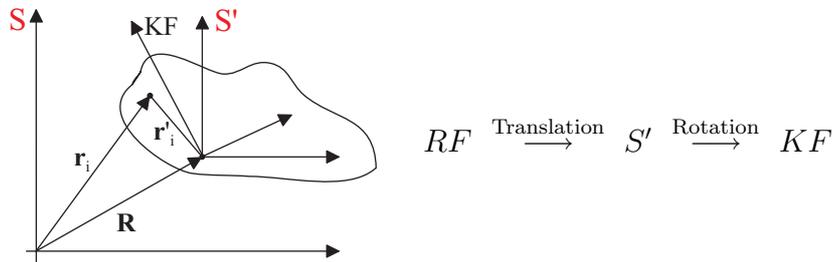
5.3.6 Drehimpuls und Drehimpulssatz

a) Drehimpuls des starren Körpers

Allgemein gilt (siehe Kapitel 2.2.2)

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{RF} &= \mathbf{L}_{SP} + \mathbf{L}' \\ &= M(\mathbf{R} \times \mathbf{V}) + \sum_i m_i (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i) \quad (\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \end{aligned}$$

Betrachte 3 Koordinatensysteme: S (RF), S' , KF



Es gilt für Geschwindigkeitsvektoren in S' die Standard-Trafo-Formel

$$\mathbf{v}'_i \Big|_{S'} = \mathbf{v}'_i \Big|_{KF} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i \quad (\text{da } \mathbf{v}'_i \Big|_{KF} = 0)$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \mathbf{L}' &= \sum_i m_i (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i) = \sum_i m_i (\mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)) \\ &= \sum_i m_i \{ \mathbf{r}'_i{}^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}'_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}'_i \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Komponentenweise: } L'_j &= \sum_i m_i \left\{ \mathbf{r}'_i{}^2 \omega'_j - \left(\sum_{k=1}^3 x'^k_i \omega'_k \right) x'^j_i \right\} \\ &= \sum_k \omega'_k \left\{ \sum_i m_i (\delta_{kj} \mathbf{r}'_i{}^2 - x'^k_i x'^j_i) \right\} \\ &= \sum_k \Theta_{jk} \omega'_k \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\mathbf{L} = \underline{\underline{\Theta}} \boldsymbol{\omega}} \quad \text{Drehimpuls im KF-System}$$

(Vereinbarung: Striche werden ab jetzt wieder weggelassen)

Bemerkungen:

- (i) Im HAS gilt: $L_j = \Theta_j \omega_j$
- (ii) Im allg. $\mathbf{L} \not\parallel \boldsymbol{\omega}$ (\rightarrow Ursache der Kompliziertheit der Drehbewegung starrer Körper)
- (iii) $T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{jk} \Theta_{jk} \omega_k \omega_j = \frac{1}{2} \sum_j L_j \omega_j = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}$

$$\text{im HAS gilt } T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_j L_j \omega_j = \frac{1}{2} \sum_j \frac{L_j^2}{\Theta_j}$$

(iv) HAS:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}(\Theta_1\omega_1^2 + \Theta_2\omega_2^2 + \Theta_3\omega_3^2)$$

"Trägheitellipsoid" mit Hauptachsen $\sim \frac{1}{\sqrt{\Theta_i}}$

$$\mathbf{L}^2 = \Theta_1^2\omega_1^2 + \Theta_2^2\omega_2^2 + \Theta_3^2\omega_3^2$$

"Schwungellipsoid" mit Hauptachsen $\sim \frac{1}{\Theta_i}$

freier Kreisel: $T_{rot} = \text{konst.}$, $\mathbf{L}^2 = \text{konst.}$

→ Betrachte Schnitte von Trägheits- und Schwungellipsoid im ' ω -Raum' zur (qualitativen) Diskussion der Bewegung

b) Drehimpulssatz

nach Kapitel 2.2.2 gilt Drehimpulssatz in S' :

$$\dot{\mathbf{L}}\Big|_{S'} = \mathbf{M}\Big|_{S'}$$

Umschreibung der linken Seite ins KF-HAS:

$$\text{Standard - Trafo } \dot{\mathbf{L}}\Big|_{S'} = \dot{\mathbf{L}}\Big|_{KF} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$$

$$\begin{aligned} \text{Komponentenweise } \dot{L}_i &= \Theta_i\dot{\omega}_i + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L})_i \\ &= \Theta_i\dot{\omega}_i + \sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\omega_j\Theta_k\omega_k \end{aligned}$$

explizit:

$$\begin{aligned} \dot{L}_1\Big|_{S'} &= \Theta_1\dot{\omega}_1 - (\Theta_2 - \Theta_3)\omega_2\omega_3 = M_1 \\ \dot{L}_2\Big|_{S'} &= \Theta_2\dot{\omega}_2 - (\Theta_3 - \Theta_1)\omega_3\omega_1 = M_2 \\ \dot{L}_3\Big|_{S'} &= \Theta_3\dot{\omega}_3 - (\Theta_1 - \Theta_2)\omega_1\omega_2 = M_3 \end{aligned}$$

Euler-Gleichungen = Drehimpulssatz ausgedrückt durch KF Koordinatenzerlegungen

5.3.7 Drehbewegung starrer Körper: Kreiseltheorie

a) Kräftefreier symmetrischer Kreisel

”Kreisel”: In einem Punkt unterstützter (aufgehänger) starrer Körper
 Falls Unterstützung = SP \implies Kreisel ist frei

$$M_i = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{g} = 0$$

\uparrow (homogenes Schwerfeld)

Beispiele:

(i) Kugelkreisel: $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = \Theta$ (z.B. Im SP gelagerter homogener Würfel)

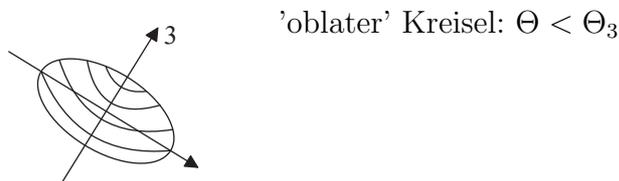
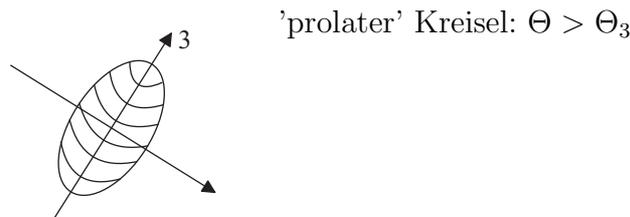
$$\stackrel{\text{Euler-Gl.}}{\iff} \dot{\omega}_i = 0 \implies \omega_i(t) = \omega_i(0) = \text{konst.}$$

(Drehvektor im KF und im RF System konstant)

\longrightarrow Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um feste Achse

(ii) Symmetrischer Kreisel: $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta, \Theta_3 \neq 0 \longrightarrow$ 3-Achse: ”Figuren-achse”

Unterscheide zwei Fälle:



BWGl'en :

$$\begin{aligned} \Theta \dot{\omega}_1 - (\Theta - \Theta_3) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ \Theta \dot{\omega}_2 - (\Theta_3 - \Theta) \omega_3 \omega_1 &= 0 \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3 &= 0 \implies \omega_3(t) = \omega_3 = \text{konst.} \end{aligned}$$

Definition: $\Omega := \frac{\Theta_3 - \Theta}{\Theta} \omega_3$ (= konst.)

$$\hookrightarrow \begin{cases} \dot{\omega}_1 - \Omega \omega_2 = 0 & (1) \\ \dot{\omega}_2 - \Omega \omega_1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Entkopplung:

$$(1') : \quad \ddot{\omega}_1 + \Omega \dot{\omega}_2 = 0 \iff \dot{\omega}_2 = -\frac{1}{\Omega} \ddot{\omega}_1$$

$$(2') : \quad -\frac{1}{\Omega} \ddot{\omega}_1 - \Omega \dot{\omega}_1 = 0 \iff \ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = 0$$

$$\hookrightarrow \text{allg. Lösung : } \omega_1(t) = C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t$$

$$(1'') : \quad \frac{d}{dt} (C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t) = -\Omega \omega_2$$

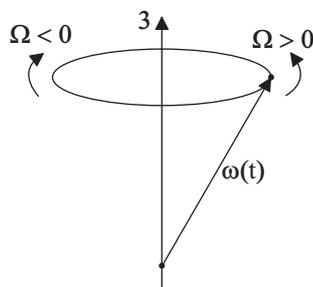
$$\iff \omega_2(t) = C_1 \sin \Omega t - C_2 \cos \Omega t$$

$$\triangleleft \text{ ABs: } \omega_1(0) = A, \quad \omega_2(0) = 0$$

$\begin{aligned} \omega_1(t) &= A \cos \Omega t \\ \omega_2(t) &= A \sin \Omega t \\ \omega_3(t) &= \omega_3 = \text{konst.} \end{aligned}$	(Lösung im KF-System)
---	-----------------------

$$|\boldsymbol{\omega}| = \sqrt{A^2 + \omega_3^2} = \text{konst.}$$

Veranschaulichung im KF-System:

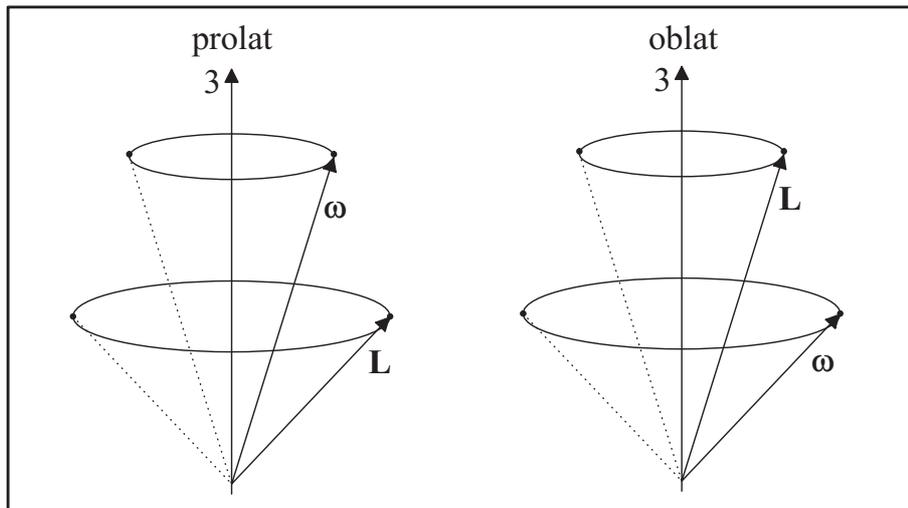


”reguläre Präzession”

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \Theta_1 \omega_1 \\ \Theta_2 \omega_2 \\ \Theta_3 \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta A \cos \Omega t \\ \Theta A \sin \Omega t \\ \Theta_3 \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{prolat : } \frac{L_3}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}} \frac{\Theta_3 \omega_3}{\Theta A} < \frac{\omega_3}{A} = \frac{\omega_3}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$$

$$\text{oblat : } \frac{\Theta_3 \omega_3}{\Theta A} > \frac{\omega_3}{A}$$



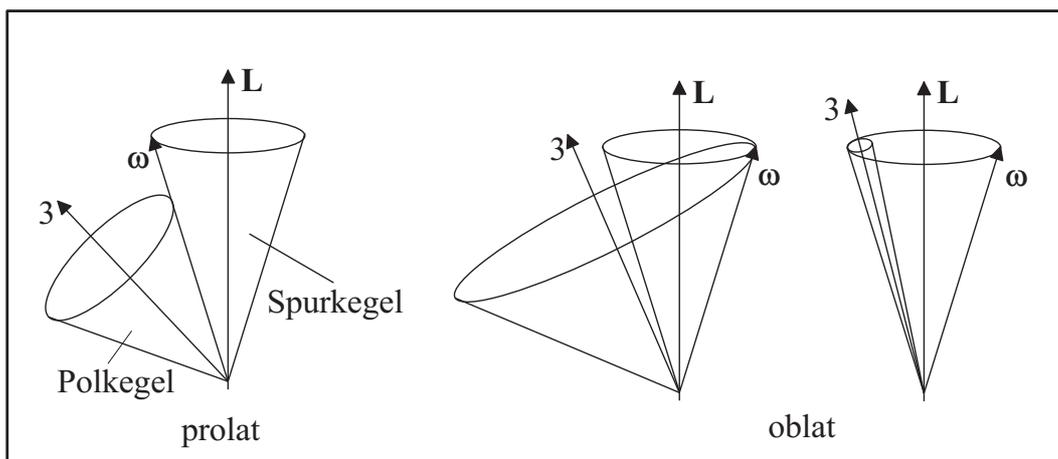
$\boldsymbol{\omega}, \mathbf{L}, \mathbf{e}_3$ liegen stets in Ebene (zeige dazu $\mathbf{e}_3 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}) = 0$)

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \mathbf{L} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\Theta A^2 + \Theta_3 \omega_3^2) = \text{konst.}$$

Situation aus Sicht eines RF-Systems

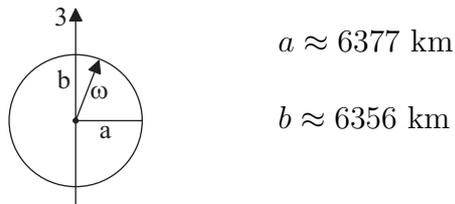
$$\dot{\underline{L}} \Big|_{RF} = \dot{\underline{L}} \Big|_{KF} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = 0 \quad \longrightarrow \quad \underline{L} \Big|_{RF} = \text{konst.}$$

Poinsot'sche Darstellung:



Zusatzbemerkungen:

- (i) Quantitative(-re) Diskussion: bestimme $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$
 Literatur: [11], Kap. 6.3.7.4, ([2], Kap. 22), [7], Kap. 12.5
- (ii) Anwendung: Erdrotation



$$\begin{aligned} \longrightarrow \text{Präzessionsfrequenz : } \Omega &= \frac{\Theta_3 - \Theta}{\Theta} \omega_3 = \frac{\Theta_3 - \Theta}{\Theta} \cdot \frac{2\pi}{\text{Tag}} \\ &\approx \frac{1}{300} \frac{2\pi}{\text{Tag}} \\ \iff T &= \frac{2\pi}{\Omega} \approx 300 \text{ Tage} \approx 10 \text{ Monate} \end{aligned}$$

Gemessene Periode $T_{\text{Chandler}} \approx 433 \text{ Tage}$ (14 Monate)

\longrightarrow Erde ist nicht starr

- (iii) Stabilitätsanalyse für freien Kreisel:
 siehe [2], Kap. 2.2 und [1], Kap. 7.4.2

b) Schwerer Kreisel ($\mathbf{M} \neq 0$)

\longrightarrow Präzession und Nutation

Literatur: [2], Teil V (insb. Kap. 23); [5], Teil IV (insb. Kap. 13); [4], Kap. 4 + 5; [13], Kap. 4

5.4 Oszillatorprobleme II

- Lineare Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden \leftrightarrow Gekoppelte Oszillatoren
- Kontinuumsübergang \longrightarrow schwingende Saite

5.4.1 Lagrange-Funktion und -Gleichungen für gekoppelte Oszillatoren

Voraussetzungen:

- (i) Evtl. ZBs sind holonom
- (ii) Zeitunabhängige Transformation $x_i \longleftrightarrow q_\mu$
- (iii) Konservative Kräfte
- (iv) System ist in Umgebung eines stabilen Gleichgewichts

$$\begin{aligned} \hookrightarrow L &= T - U - V = T - W \\ &= T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - W(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

$$H = T + W = E = \text{konst.}$$

- Taylorentwicklung von $W(\mathbf{q})$ um Gleichgewicht $\mathbf{q}^0 = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} W(\mathbf{q}) &\approx \underbrace{W(0)}_{=0} + \sum_{\mu} \underbrace{\frac{\partial W}{\partial q_{\mu}} \Big|_0}_{=0} q_{\mu} + \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \frac{\partial^2 W}{\partial q_{\mu} \partial q_{\nu}} \Big|_0 q_{\mu} q_{\nu} + \dots \\ &\approx \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} W_{\mu\nu} q_{\mu} q_{\nu}, \quad \left(W_{\mu\nu} := \frac{\partial^2 W}{\partial q_{\mu} \partial q_{\nu}} \Big|_0 = W_{\nu\mu} \right) \end{aligned}$$

- $T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2$ mit $\dot{x}_i = \sum_{\mu} \frac{\partial x_i}{\partial q_{\mu}} \dot{q}_{\mu}$

$$\hookrightarrow T = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} T_{\mu\nu}(\mathbf{q}) \dot{q}_{\mu} \dot{q}_{\nu}$$

mit $T_{\mu\nu}(\mathbf{q}) = \sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_{\mu}} \frac{\partial x_i}{\partial q_{\nu}} = T_{\nu\mu}(\mathbf{q})$

Taylorentwicklung:

$$T_{\mu\nu}(\mathbf{q}) \approx T_{\mu\nu}(0) + \sum_{\lambda} \frac{\partial T_{\mu\sigma}}{\partial q_{\lambda}} \Big|_0 q_{\lambda} \approx T_{\mu\nu}(0) \equiv T_{\mu\nu}$$

(0.Ordnung für $T_{\mu\nu}(\mathbf{q})$ ist konsistent zur 2.Ordnung für $W(\mathbf{q})$)

$$\begin{aligned} \hookrightarrow L &= \frac{1}{2} \sum_{\mu} \left(T_{\mu\nu} \dot{q}_{\mu} \dot{q}_{\nu} - W_{\mu\nu} q_{\mu} q_{\nu} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{q}}^T \underline{T} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{q}^T \underline{W} \mathbf{q} \right) \end{aligned}$$

Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\lambda} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} T_{\mu\nu} (\delta_{\mu\lambda} \dot{q}_\nu + \delta_{\nu\lambda} \dot{q}_\mu) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu} T_{\lambda\nu} \dot{q}_\nu + \frac{1}{2} \sum_{\mu} T_{\mu\lambda} \dot{q}_\mu \\ &= \sum_{\mu} T_{\lambda\mu} \dot{q}_\mu \\ -\frac{\partial L}{\partial q_\lambda} = \frac{\partial W}{\partial q_\lambda} &= \dots = \sum_{\mu} W_{\lambda\mu} q_\mu \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \sum_{\mu} (T_{\lambda\mu} \ddot{q}_\mu + W_{\lambda\mu} \ddot{q}_\mu) &= 0, \quad \lambda = 1, \dots, n \quad \text{für } n \text{ FG's} \\ \underline{\underline{T}} \ddot{\mathbf{q}} + \underline{\underline{W}} \ddot{\mathbf{q}} &= 0 \end{aligned}}$$

explizit:

$$\begin{pmatrix} T_{11} & \dots & T_{1n} \\ \vdots & & \\ T_{n1} & \dots & T_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{11} & \dots & W_{1n} \\ \vdots & & \\ W_{n1} & \dots & W_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.4.2 Lösung der BWGls

a) Einfache Situation: ungekoppelte Oszillatoren

$$\text{charakterisiert durch } T_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\mu} T_\lambda, \quad W_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\mu} W_\lambda$$

$$\stackrel{\text{BWGl}}{\hookrightarrow} \ddot{q}_\lambda + \frac{W_\lambda}{T_\lambda} q_\lambda = 0, \quad \lambda = 1, \dots, n$$

$$\text{Lösung: } q_\lambda(t) = A_\lambda \cos(\omega_\lambda t + \delta_\lambda), \quad \omega_\lambda = \sqrt{\frac{W_\lambda}{T_\lambda}}$$

b) Diagonale $\underline{\underline{T}}$ -Matrix

$$\text{charakterisiert durch } T_{\lambda\mu} = T_\lambda \delta_{\lambda\mu}$$

$$\stackrel{\text{BWGl}}{\hookrightarrow} T_\lambda \ddot{q}_\lambda + \sum_{\mu} W_{\lambda\mu} q_\mu = 0$$

Trafo (i): $\tilde{q}_\lambda = \sqrt{T_\lambda} q_\lambda$

$$\stackrel{\text{BWGl}}{\hookrightarrow} \ddot{\tilde{q}}_\lambda + \sum_{\mu} D_{\lambda\mu} \tilde{q}_\mu = 0$$

mit $D_{\lambda\mu} = \frac{W_{\lambda\mu}}{\sqrt{T_\lambda T_\mu}}$ "Dynamische Matrix"

$\underline{\underline{D}}$ ist symmetrische, positiv semidefinite Matrix, d.h.

$$D_{\lambda\mu} = D_{\mu\lambda}, \quad \underline{\underline{\xi}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\xi}} \geq 0 \quad \forall \underline{\underline{\xi}} = \{\xi_1 \dots \xi_n\} \neq \{0 \dots 0\}$$

$\implies \underline{\underline{D}}$ ist diagonalisierbar, Eigenwerte sind reell (weil $\underline{\underline{D}}$ symmetrisch) und nicht-negativ (weil $\underline{\underline{D}}$ positiv-semidefinit)

d.h. es existiert orthogonale Trafo-Matrix $\underline{\underline{U}} (\underline{\underline{U}}^{-1} = \underline{\underline{U}}^T)$:

$$\underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} \Omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \Omega_n^2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\Omega}}^2 \quad (\Omega_i^2 \geq 0)$$

Dieser Sachverhalt motiviert Trafo (ii) der BWGl:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Q}} &= \underline{\underline{U}}^T \tilde{\underline{\underline{q}}} \iff \tilde{\underline{\underline{q}}} = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{Q}} \\ \hookrightarrow \underline{\underline{U}} \ddot{\underline{\underline{Q}}} + \underline{\underline{D}} \underline{\underline{U}} \underline{\underline{Q}} &= 0 \\ \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{U}} \ddot{\underline{\underline{Q}}} + \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{U}} \underline{\underline{Q}} &= 0 \end{aligned}$$

$$\iff \boxed{\ddot{\underline{\underline{Q}}} + \underline{\underline{\Omega}}^2 \underline{\underline{Q}} = 0}$$

$$\iff \boxed{\ddot{Q}_\lambda + \Omega_\lambda^2 Q_\lambda = 0} \quad \lambda = 1, \dots, n$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Lsg :} & Q_\lambda(t) = & A_\lambda \cos(\Omega_\lambda t + \delta_\lambda) \\ & \uparrow & \uparrow \\ & \text{"Normalkoordinaten"} & \text{"Eigenfrequenzen"} \end{array}$$

Rezept:

(i) Diagonalisiere $\underline{\underline{D}}$: Löse Säkulargleichung

$$\det(D_{\mu\nu} - \Omega_\lambda^2 \delta_{\mu\nu}) = 0$$

→ (i.d.R. paarweise verschiedene) Wurzeln

$$0 \leq \Omega_1^2 < \Omega_2^2 < \dots < \Omega_n^2$$

(ii) Bestimme orthogonale Transformation $\underline{\underline{U}}$ durch Einsetzen der Ω_λ^2 in homogenes Gleichungssystem

$$\sum_{\nu} (D_{\mu\nu} - \Omega_\lambda^2 \delta_{\mu\nu}) U_{\nu\lambda} = 0$$

(iii) Rücktransformation

$$\begin{aligned} q_\mu(t) &= \frac{1}{\sqrt{T_\mu}} \tilde{q}_\mu(t) = \sum_{\lambda} \frac{U_{\mu\lambda}}{\sqrt{T_\mu}} Q_\lambda(t) \\ &= \sum_{\lambda} \frac{U_{\mu\lambda}}{\sqrt{T_\mu}} A_\lambda \cos(\Omega_\lambda t + \delta_\lambda), \quad \mu = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Konsistenztest:

- $$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\mu} T_{\mu} \dot{q}_{\mu}^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\lambda\lambda'} U_{\mu\lambda} U_{\mu\lambda'} \dot{Q}_{\lambda} \dot{Q}_{\lambda'} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda\lambda'} \left(\sum_{\mu} U_{\lambda\mu}^T U_{\mu\lambda'} \right) \dot{Q}_{\lambda} \dot{Q}_{\lambda'} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \dot{Q}_{\lambda}^2 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} W_{\mu\nu} q_{\mu} q_{\nu} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\lambda\lambda'} \frac{W_{\mu\nu}}{\sqrt{T_{\mu} T_{\nu}}} U_{\mu\lambda} U_{\nu\lambda'} Q_{\lambda} Q_{\lambda'} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda\lambda'} \left(\sum_{\mu\nu} U_{\lambda\mu}^T D_{\mu\nu} U_{\nu\lambda'} \right) Q_{\lambda} Q_{\lambda'} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \Omega_{\lambda}^2 Q_{\lambda}^2 \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow L = T - W = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \left(\dot{Q}_{\lambda}^2 - \Omega_{\lambda}^2 Q_{\lambda}^2 \right)$$

$$\text{Lg - Gl'en : } \quad \ddot{Q}_{\lambda} - \Omega_{\lambda}^2 Q_{\lambda} = 0, \quad \lambda = 1, \dots, n$$

Letztlich sind die Normalkoordinaten die geeigneten generalisierten Koordinaten, denn für sie werden die Lagrange-Gleichungen besonders einfach.

c) Allgemeiner Fall

- BWGl:
$$\sum_{\nu} \left(T_{\mu\nu} \ddot{q}_{\nu} + W_{\mu\nu} q_{\nu} \right) = 0, \quad \mu = 1, \dots, n$$

- Lsg-Ansatz: (motiviert durch b))

$$q_{\nu}(t) = \sum_{\lambda} U_{\nu\lambda} Q_{\lambda}(t) \quad \text{mit} \quad Q_{\lambda}(t) = A_{\lambda} \cos(\Omega_{\lambda} t + \delta_{\lambda})$$

$$\hookrightarrow \ddot{q}_{\nu} = \sum_{\lambda} U_{\nu\lambda} \ddot{Q}_{\lambda}$$

$$= - \sum_{\lambda} U_{\nu\lambda} \Omega_{\lambda}^2 Q_{\lambda}$$

$$\stackrel{\text{einsetzen}}{\hookrightarrow} \sum_{\nu\lambda} \left(W_{\mu\nu} - \Omega_{\lambda}^2 T_{\mu\nu} \right) U_{\nu\lambda} Q_{\lambda} = 0$$

da die Q_{λ} linear unabhängig sind, folgt:

$$\sum_{\nu} \left(W_{\mu\nu} - \Omega_{\lambda}^2 T_{\mu\nu} \right) U_{\nu\lambda} = 0 \quad (*)$$

- Lösbarkeitsbed. : $\det \left(W_{\mu\nu} - \Omega_{\lambda}^2 T_{\mu\nu} \right) = 0$

\implies (i.d.R. paarweise verschiedene) reelle Wurzeln $0 \leq \Omega_{\lambda}^2 < \dots < \Omega_n^2$

- Einsetzen der Ω_{λ}^2 in (*) liefert Trafo-Matrix $\underline{\underline{U}}$:

$$\hookrightarrow \begin{aligned} \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{U}} &= \underline{\underline{\Omega}}^2 \\ \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{T}} \underline{\underline{U}} &= \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

\longrightarrow simultane Diagonalisierung von $\underline{\underline{W}}$, $\underline{\underline{T}}$

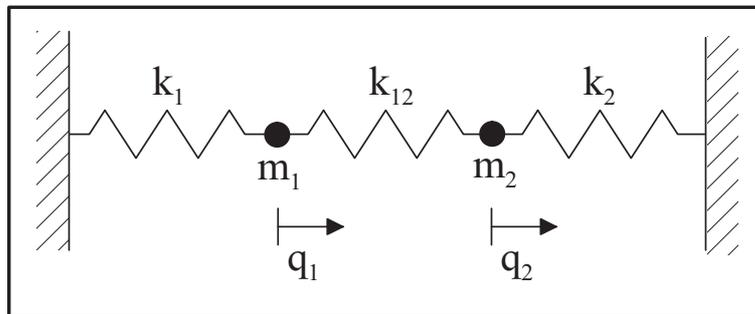
Details: Anhang A.3, sowie [7], Kap. 13.2; [2], Kap. 25; [4], Kap. 10 (insb. 10.2)

- Konsistenz:

$$\begin{aligned}
 L &= T - W \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \left(\dot{q}_\mu T_{\mu\nu} \dot{q}_\nu - q_\mu W_{\mu\nu} q_\nu \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \left(\dot{Q}_\lambda^2 - \Omega_\lambda^2 Q_\lambda \right) \quad (\text{wie bei b))}
 \end{aligned}$$

5.4.3 Anwendungen

- a) Zwei gekoppelte Oszillatoren



- $$T = \frac{m_1}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{q}_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} T_{\mu\nu} \dot{q}_\mu \dot{q}_\nu$$

identifiziere $T_{11} = m_1 \equiv T_1$, $T_{22} = m_2 \equiv T_2$, $T_{12} = T_{21} = 0$

- $$U = \frac{k_1}{2} q_1^2 + \frac{k_2}{2} q_2^2$$

- $$V = \frac{k_{12}}{2} (q_1 - q_2)^2$$

$$\begin{aligned}
 \hookrightarrow W &= U + V = \frac{1}{2} \left(k_1 q_1^2 + k_2 q_2^2 + k_{12} (q_1^2 - 2q_1 q_2 + q_2^2) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} W_{\mu\nu} q_\mu q_\nu
 \end{aligned}$$

mit $W_{11} = k_1 + k_{12}$, $W_{12} = W_{21} = -k_{12}$, $W_{22} = k_2 + k_{12}$

$$\hookrightarrow L = \frac{1}{2} \left\{ (\dot{q}_1, \dot{q}_2) \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} - (q_1, q_2) \begin{pmatrix} k_1 + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_2 + k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\}$$

Schritt (1): Diagonalisiere $D_{\mu\nu} = \frac{\omega_{\mu\nu}}{\sqrt{T_\mu T_\nu}}$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} \frac{k_1+k_{12}}{m_1} - \Omega^2 & -\frac{k_{12}}{\sqrt{m_1 m_2}} \\ -\frac{k_{12}}{\sqrt{m_1 m_2}} & \frac{k_2+k_{12}}{m_2} - \Omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{k_1 + k_{12}}{m_1} - \Omega^2 \right) \left(\frac{k_2 + k_{12}}{m_2} - \Omega^2 \right) - \frac{k_{12}^2}{m_1 m_2} = 0$$

$$\Rightarrow \Omega_{1,2}^2 = +\frac{1}{2} \left(\frac{k_1 + k_{12}}{m_1} + \frac{k_2 + k_{12}}{m_2} \right) \pm \frac{1}{2} \left[\left(\frac{k_1 + k_{12}}{m_1} - \frac{k_2 + k_{12}}{m_2} \right)^2 + \frac{4k_{12}^2}{m_1 m_2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Spezialfall: $m_1 = m_2 \equiv m$, $k_1 = k_2 \equiv k$

$$\hookrightarrow \Omega_{1,2}^2 = \frac{k + k_{12}}{m} \pm \frac{k_{12}}{m}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} , \quad \Omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}}}$$

Schritt (2): Bestimme \underline{U}

$$\begin{pmatrix} \frac{k+2k_{12}}{m} - \Omega_\lambda^2 & -\frac{k_{12}}{m} \\ -\frac{k_{12}}{m} & \frac{k+2k_{12}}{m} - \Omega_\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1\lambda} \\ U_{2\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda = 1, 2$$

Einsetzen von Ω_1^2, Ω_2^2 : $U_{11} = U_{21}$, $U_{12} = -U_{22}$

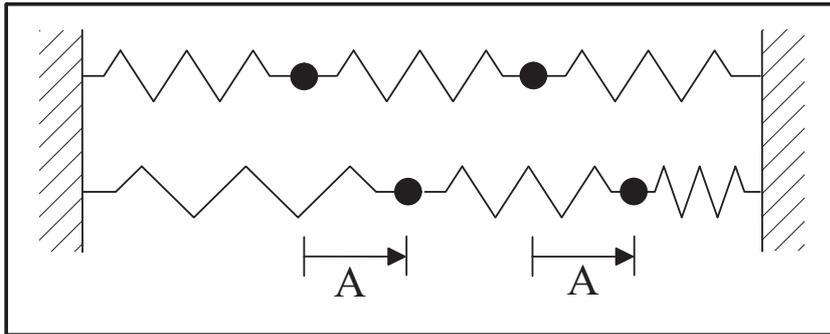
Forderung : $\underline{U}^T = \underline{U}^{-1} \hookrightarrow \underline{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \underline{U}^T$

Schritt (3):

$$\begin{aligned} \text{Trafo : } q_\mu(t) &= \sum_\lambda \frac{U_{\mu\lambda}}{\sqrt{T_\mu}} A_\lambda \cos(\Omega_\lambda t + \delta_\lambda) \\ \text{explizit : } q_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \left\{ A_1 \cos(\Omega_1 t + \delta_1) + A_2 \cos(\Omega_2 t + \delta_2) \right\} \\ q_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \left\{ A_1 \cos(\Omega_1 t + \delta_1) - A_2 \cos(\Omega_2 t + \delta_2) \right\} \end{aligned}$$

Schritt (4): Anfangsbedingungen

$$(1) \quad q_1(0) = q_2(0) = A, \quad \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$$



$$q_1(0) = A = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(A_1 \cos \delta_1 + A_2 \cos \delta_2 \right) \quad (1)$$

$$q_2(0) = A = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(A_1 \cos \delta_1 - A_2 \cos \delta_2 \right) \quad (2)$$

$$\dot{q}_1(0) = 0 = -\frac{1}{\sqrt{2m}} \left(A_1 \Omega_1 \sin \delta_1 + A_2 \Omega_2 \sin \delta_2 \right) \quad (3)$$

$$\dot{q}_2(0) = 0 = -\frac{1}{\sqrt{2m}} \left(A_1 \Omega_1 \sin \delta_1 - A_2 \Omega_2 \sin \delta_2 \right) \quad (4)$$

$$(1) = (2) \iff A_2 \cos \delta_2 = 0 \iff A_1 \cos \delta_1 = \sqrt{2m}A$$

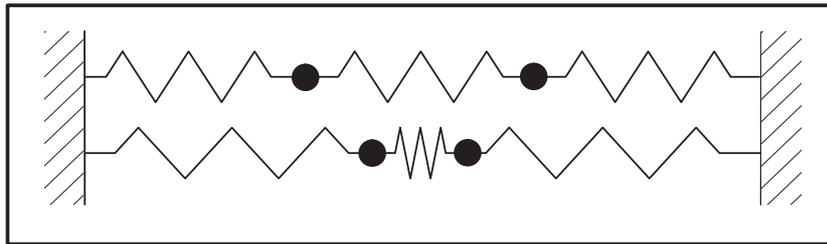
$$(3) + (4) \iff A_1 \sin \delta_1 = 0$$

$$(3) - (4) \iff A_2 \sin \delta_2 = 0$$

$$\iff A_2 = 0, \quad \tan \delta_1 = 0, \quad \delta_1 = 0, \quad A_1 = \sqrt{2m}A$$

$$\hookrightarrow \boxed{q_1(t) = A \cos \Omega_1 t = q_2(t)} \rightarrow \text{symmetrische Normalschwingung}$$

$$(2) \quad q_1(0) = -q_2(0) = A, \quad \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$$



$$\overset{\text{Lsg.}}{\hookrightarrow} \boxed{q_1(t) = A \cos \Omega_2 t = -q_2(t)} \rightarrow \text{antisymmetrische Normalschwingung}$$

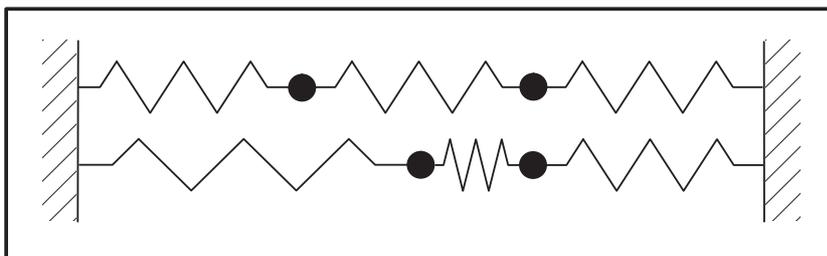
beachte : $\Omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}} > \sqrt{\frac{k}{m}} = \Omega_1$

Dies geht einher mit der Tatsache, dass im antisymmetrischen Fall mehr Energie im System gespeichert ist:

$$E_S = W_S(0) = \frac{1}{2}(A, A) \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} = kA^2$$

$$E_A = W_A(0) = \frac{1}{2}(A, -A) \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} = (k + 2k_{12}) A^2$$

$$(3) \quad q_1(0) = A, \quad q_2(0) = \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$$



Lösung:

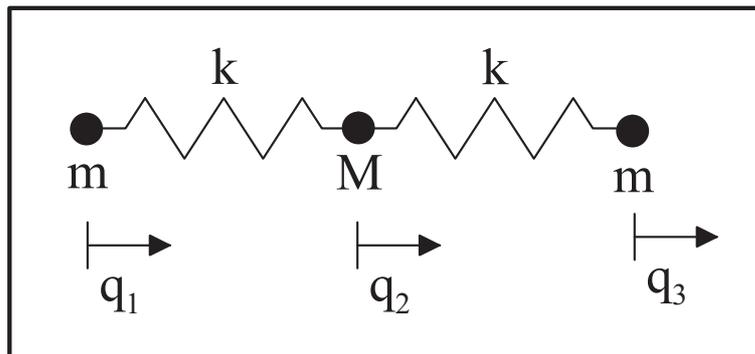
$$\begin{aligned}
 q_1(t) &= \frac{A}{2} (\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t) = A \cos \frac{(\Omega_1 + \Omega_2)t}{2} \cos \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)t}{2} \\
 q_2(t) &= \frac{A}{2} (\cos \Omega_1 t - \cos \Omega_2 t) = -A \sin \frac{(\Omega_1 + \Omega_2)t}{2} \sin \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)t}{2}
 \end{aligned}$$

→ Schwebungen

Spezialfall: $k_{12} \ll k$ (schwache Kopplung)

$$\left. \begin{aligned}
 q_1(t) &\approx A \cos \Delta t \cos \Omega_1 t \\
 q_2(t) &\approx -A \sin \Delta t \sin \Omega_1 t
 \end{aligned} \right\} \Delta = \frac{\Omega_1 k_{12}}{2k} \ll \Omega_1$$

b) Dreiatomiges lineares Molekül



- $$T = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{M}{2} \dot{q}_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} T_{\mu\nu} \dot{q}_\mu \dot{q}_\nu$$

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

- $U = 0$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad V &= \frac{k}{2}(q_1 - q_2)^2 + \frac{k}{2}(q_3 - q_2)^2 \\
 &= \frac{k}{2}(q_1^2 + 2q_2 + q_3^2 - 2q_1q_2 - 2q_2q_3) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} W_{\mu\nu} q_\mu q_\nu
 \end{aligned}$$

$$\underline{W} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}$$

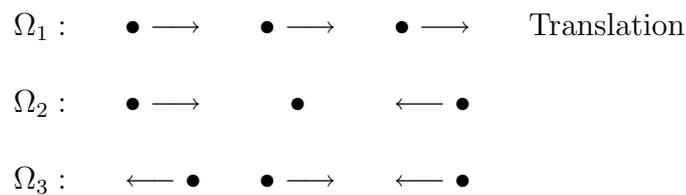
Schritt (1): Diagonalisiere $D_{\mu\nu} = \frac{W_{\mu\nu}}{\sqrt{T_\mu T_\nu}}$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{k}{m} - \Omega^2 & -\frac{k}{\sqrt{mM}} & 0 \\ -\frac{k}{\sqrt{mM}} & \frac{2k}{m} - \Omega^2 & -\frac{k}{\sqrt{mM}} \\ 0 & -\frac{k}{\sqrt{mM}} & \frac{k}{m} - \Omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \Omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}}$$

Aus $\Omega_1 = 0$ folgt: $\ddot{Q}_1 = 0 \quad \longrightarrow \quad Q_1(t) = a_1 t + B_1$

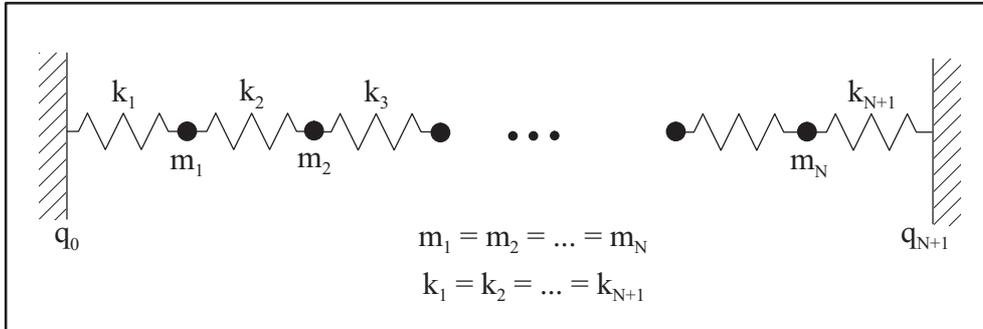
Genauere Diskussion (siehe Anhang A.4) liefert die folgende Veranschaulichung der Normalschwingungen



Literatur: [4], Kap. 10.4

5.4.4 Übergang zum Kontinuum: schwingende Saite

- a) Lineare Oszillatorkette (klassisches Modell für eindimensionales Kristallgitter)



- $T = \frac{m}{2} \sum_{\mu=1}^N \dot{q}_\mu^2$
- $U = \frac{k}{2} (q_1^2 + q_N^2)$
- $V = \frac{k}{2} \left\{ (q_2 - q_1)^2 + (q_3 - q_2)^2 + \dots + (q_N - q_{N-1})^2 \right\}$

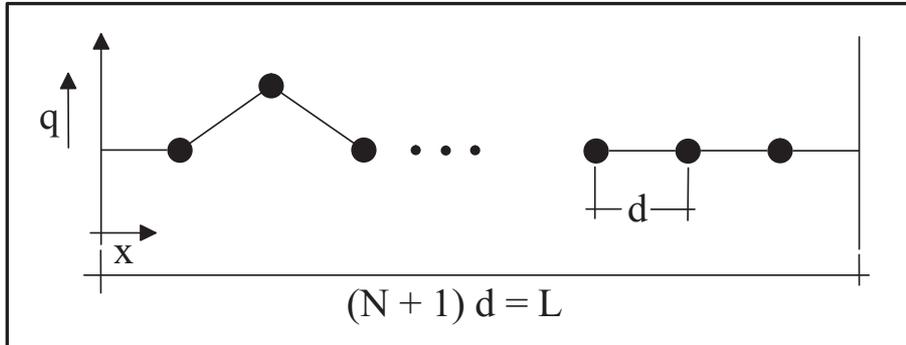
Festlegung: $q_0(t) = q_{N+1}(t) = 0$ "Randbedingungen"

$$\hookrightarrow W = U + V = \frac{k}{2} \sum_{\mu=1}^{N+1} (q_\mu - q_{N+1})^2$$

$$\begin{aligned}
 \text{BWGs : } \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\lambda} &= m \ddot{q}_\lambda \\
 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\lambda} = - \frac{\partial W}{\partial q_\lambda} \\
 &= k (q_{\lambda+1} - 2q_\lambda + q_{\lambda-1}), \quad \lambda = 1, \dots, N
 \end{aligned}$$

Zur Lösung der BWGs: [11], Kap. 6.1.3.3

b) Transversale Schwingung



Man findet (für kleine Auslenkungen) dieselbe BWGls wie bei a):

$$m\ddot{q}_\lambda - \frac{\tau}{d} (q_{\lambda+1} - 2q_\lambda + q_{\lambda-1}) = 0, \quad \lambda = 1, \dots, N$$

τ : Fadenspannung

Literatur: [11], Kap. 6.1.4

c) Kontinuumsübergang

$$N \longrightarrow \infty, \quad d \longrightarrow 0 \quad : \quad (N+1)d = L = \text{konst.}$$

$$m \longrightarrow 0, \quad d \longrightarrow 0 \quad : \quad \frac{m}{d} = \rho = \text{konst.}$$

$$q_\lambda(t) \longrightarrow q(x, t)$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{BWGl:}} \quad \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} &= \frac{\tau d}{m} \left(\frac{q(x+d, t) - 2q(x, t) + q(x-d, t)}{d^2} \right) \\ &\longrightarrow \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$\iff \boxed{\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = 0} \quad \text{eindimensionale Wellengleichung}$$

mit $v = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ 'Phasengeschwindigkeit'

Lösungen: stehende + laufende Wellen

Literatur: [7], Kap. 13.3

Weiterführender Gesichtspunkt: Lagrange- (und Hamilton-) Formalismus für Felder

Literatur: [1], Kap. 10; [2], Teil VIII, insb. Kap. 30+33; [4], Kap. 11

Kapitel 6

Hamilton'sche Mechanik

- Formale Weiterentwicklung der Theorie
- Anknüpfungs- und Ausgangspunkt für Quantenmechanik (+ statistische Mechanik → Thermodynamik)

6.1 Hamilton'sche (Kanonische) Bewegungsgleichungen

Ausgangspunkt: Hamiltonfunktion

$$H = \sum_{\mu} p_{\mu} \dot{q}_{\mu} - L$$

$$L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t); \quad H = H(?)$$

Zur Klärung der unabhängigen Variablen betrachte totales Differential

$$\begin{aligned} dH &= d\left(\sum_{\mu} p_{\mu} \dot{q}_{\mu} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\right) \\ &= \sum_{\mu} \left\{ p_{\mu} d\dot{q}_{\mu} + \dot{q}_{\mu} dp_{\mu} - \frac{\partial L}{\partial q_{\mu}} dq_{\mu} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu}} d\dot{q}_{\mu} \right\} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ \text{benutze Lg - Gl'en :} &= \sum_{\mu} \left\{ \dot{q}_{\mu} dp_{\mu} - \dot{p}_{\mu} dq_{\mu} \right\} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \end{aligned}$$

andererseits:

$$dH(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{\mu} \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_{\mu}} dq_{\mu} + \frac{\partial H}{\partial p_{\mu}} dp_{\mu} \right\} + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$\text{Vergleich: } \implies \boxed{\dot{p}_{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\mu}}, \quad \dot{q}_{\mu} = \frac{\partial H}{\partial p_{\mu}}, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \right)}$$

→ Hamilton'sche (Kanonische) Gleichungen

Bemerkungen:

(i) Kanonische Gl. \iff Lg.-Gl. \iff Ham. Prinzip \iff Newton II

Beweis der Äquivalenz zu den Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{\mu} p_{\mu} \dot{q}_{\mu} - H \\ \hookrightarrow dL &= \sum_{\mu} (p_{\mu} d\dot{q}_{\mu} + \dot{q}_{\mu} dp_{\mu}) - dH(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \\ &= \sum_{\mu} \left(p_{\mu} d\dot{q}_{\mu} + \dot{q}_{\mu} dp_{\mu} - \frac{\partial H}{\partial q_{\mu}} dq_{\mu} - \frac{\partial H}{\partial p_{\mu}} dp_{\mu} \right) - \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ &= \sum_{\mu} \left(p_{\mu} d\dot{q}_{\mu} + \dot{q}_{\mu} dp_{\mu} + \dot{p}_{\mu} d\dot{q}_{\mu} - \dot{q}_{\mu} dp_{\mu} \right) - \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ &= dL(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \\ &= \sum_{\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial q_{\mu}} dq_{\mu} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu}} d\dot{q}_{\mu} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ \hookrightarrow \left. \begin{aligned} p_{\mu} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu}} \\ \dot{p}_{\mu} &= \frac{\partial L}{\partial q_{\mu}} \end{aligned} \right\} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu}} - \frac{\partial L}{\partial q_{\mu}} = 0 \end{aligned}$$

(ii) Beispiel 1: eindimensionaler Oszillator

$$\begin{aligned} L &= T - U = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) \\ H &= p\dot{x} - L = m\dot{x}\dot{x} - \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} \omega^2 x^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = T + U = E \\ p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \iff \dot{x} = \frac{p}{m} \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2$$

Beachte, dass \dot{x} zugunsten von p eliminiert wurde, um H ordnungsgemäß als Funktion der unabhängigen Variablen x, p auszudrücken

$$\text{BWGl : } \left. \begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega^2 x \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= 0 \\ \uparrow \\ \ddot{x} &= \frac{\dot{p}}{m} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \longrightarrow H = E = \text{konst.}$$

$$(iii) \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dH}{dt} \iff H = \text{konst.} \quad \text{falls} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

(iv) System mit $n := 3N - k$ Freiheitsgraden:

$$\begin{aligned} \text{Lg - Gl'en} &\hat{=} n - \text{DGl's 2. Ordnung} \\ &\quad (2n \text{ ABs } q_\mu(0), \dot{q}_\mu(0), \mu = 1, \dots, n) \\ \text{Hamilton - Gl'en} &\hat{=} 2n - \text{DGl's 1. Ordnung} \\ &\quad (2n \text{ ABs } q_\mu(0), p_\mu(0), \mu = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

(v) Legendre-Transformation: Wechsel der unabhängigen Variablen ohne Informationsverlust

$$\begin{aligned} \text{Gegeben} \quad f(x) &\xleftrightarrow{\text{Trafo } x \leftrightarrow u} g(u) \\ \text{Transformation :} \quad u(x) = \frac{df}{dx} &\hookrightarrow df = \frac{df}{dx} dx = u dx \end{aligned}$$

$$\text{Ansatz : } g = f - ux$$

$$\hookrightarrow dg = d(f - ux) = df - u dx - x du = -x du = \frac{dg}{du} du$$

$$\hookrightarrow g = g(u) \longrightarrow x = -\frac{dg}{du}$$

Legendre-Transformation ist umkehrbar eindeutig, falls $\frac{d^2 f}{dx^2} \neq 0$

$$g(u) = f(x(u)) - x(u) \frac{df}{dx} \iff f(x) = g(u(x)) - u(x) \frac{dg}{du}$$

Erweiterung : $f = f(x, y) \xleftrightarrow{\text{Trafo } x \leftrightarrow u} g = g(u, y)$ mit $u(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$

$$\triangleleft \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = u dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Ansatz :

$$\begin{aligned} g &= f - ux \\ \hookrightarrow dg &= u dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy - u dx - x du \\ &= -x du + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ &= \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial y} dy \\ \implies g &= g(u, y) \\ \hookrightarrow x &= -\frac{\partial g}{\partial u}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

einfache Anwendung:

$$\begin{array}{ccc} L = L(q, \dot{q}) & \xleftrightarrow{\text{Trafo}} & H = H(q, p) \\ & \uparrow & \\ & p(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Leftrightarrow \dot{q}(q, p) = \frac{\partial H}{\partial p} & \end{array}$$

$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L$ ist negative Legendre – Trafo von L (und umgekehrt)

(vi) Beispiel 2: Zentralkraftproblem in Polarkoordinaten

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r) = L(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$$

$$\begin{aligned} \text{BWGl : } \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r}, & \frac{\partial L}{\partial r} &= mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \\ &= p_r \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= mr^2\dot{\varphi}, & \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \quad (\varphi \text{ zyklisch}) \\ &= p_\varphi \end{aligned}$$

$$\implies \boxed{\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial U}{\partial r} &= 0 \\ r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} &= 0 \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
 H &= p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} - L(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) \quad \text{mit} \quad \dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad \text{und} \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \\
 &= p_r \frac{p_r}{m} + p_\varphi \frac{p_\varphi}{mr^2} - \frac{m}{2} \left(\left(\frac{p_r}{m} \right)^2 + r^2 \left(\frac{p_\varphi}{mr^2} \right)^2 \right) + U(r) \\
 &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + U(r) \\
 &= H(r, p_r, p_\varphi)
 \end{aligned}$$

BWGl:

$ \begin{aligned} \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - \frac{\partial U}{\partial r}, & \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \\ \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, & \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \end{aligned} $

\iff Lagrange-Gleichungen

Beachte:

$ \left. \begin{aligned} H = E &= \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + U(r) \\ L = T - U &= \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - U(r) \end{aligned} \right\} $	<p>uneinheitliche, problematische Schreibweise :</p> <p>nur $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ und $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$</p> <p>führen auf die richtigen BWGls!</p>
---	--

(vi) Rezept

- Lege $3N - k$ generalisierte Koordinaten fest und bestimme Transformation

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_{3N-k}, t), \quad (i = 1, \dots, 3N)$$

- Bestimme

$$L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - U(\mathbf{q}, t) - V(\mathbf{q}, t)$$

- Berechne generalisierte Impulse

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = p_\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

- Löse nach generalisierten Geschwindigkeiten auf

$$p_\mu \longrightarrow \dot{q}_\mu = \dot{q}_\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$

- Setze in L ein

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t) = \tilde{L}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$

- Berechne

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{\mu} p_{\mu} \dot{q}_{\mu}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - \tilde{L}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$

falls $H = E$:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t) + U(\mathbf{q}, t) + V(\mathbf{q}, t)$$

- Bilde $(2(3N - k))$ Hamilton-Gleichungen

(viii) "Phasenraum": wird aufgespannt durch

$$\text{"Phasen(-punkte)"} : \mathbf{\Pi}(q_1 \dots q_{3N-k}, p_1 \dots p_{3N-k})$$

→ Phasentrajektorie $\mathbf{\Pi}(t)$ charakterisiert Bewegung des Systems

Kenntnis des Phasenpunktes für einen Zeitpunkt t_0 genügt zur Berechnung von $\mathbf{\Pi}(t)$

$$\mathbf{\Pi}(t_0) = \mathbf{\Pi}_0 \xrightarrow{\text{Hamilton-Gl'en}} \mathbf{\Pi}(t)$$

Zustand des mechanischen Systems \iff Phasenpunkt $\mathbf{\Pi}$
--

→ alle Observablen sind Funktionen der Phase : $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = f(\mathbf{\Pi}, t)$

Literatur: [6] II, Kap. 15.3.1, 15.3.2

6.2 Poisson-Klammern

6.2.1 Definition und fundamentale Poisson-Klammern

$$\begin{aligned} \triangleleft \quad \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &= \sum_{\mu} \left(\frac{\partial f}{\partial q_{\mu}} \dot{q}_{\mu} + \frac{\partial f}{\partial p_{\mu}} \dot{p}_{\mu} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \sum_{\mu} \left(\frac{\partial f}{\partial q_{\mu}} \frac{\partial H}{\partial p_{\mu}} - \frac{\partial f}{\partial p_{\mu}} \frac{\partial H}{\partial q_{\mu}} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

Definition: Seien f, g skalare Observablen

$$\{f, g\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} := \sum_{\mu} \left(\frac{\partial f}{\partial q_{\mu}} \frac{\partial g}{\partial p_{\mu}} - \frac{\partial f}{\partial p_{\mu}} \frac{\partial g}{\partial q_{\mu}} \right)$$

Poisson-Klammer von f und g

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Spezialfälle:

(i) $f = q_{\mu}$	\Leftrightarrow	$\dot{q}_{\mu} = \{q_{\mu}, H\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = \frac{\partial H}{\partial p_{\mu}}$	}	Zusammenfassung :
(ii) $f = p_{\mu}$	\Leftrightarrow	$\dot{p}_{\mu} = \{p_{\mu}, H\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\mu}}$		
				$\dot{\Pi} = \{\Pi, H\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}$

Fundamentale Poisson-Klammern:

$$\begin{aligned} \{q_{\mu}, q_{\nu}\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} &= \{p_{\mu}, p_{\nu}\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = 0 \\ \{q_{\mu}, p_{\nu}\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} &= \delta_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \{q_{\mu}, p_{\nu}\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} &= \sum_{\lambda} \left(\frac{\partial q_{\mu}}{\partial q_{\lambda}} \frac{\partial p_{\nu}}{\partial p_{\lambda}} - \frac{\partial q_{\mu}}{\partial p_{\lambda}} \frac{\partial p_{\nu}}{\partial q_{\lambda}} \right) \\ &= \sum_{\lambda} \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\lambda} = \delta_{\mu\nu} \end{aligned}$$

6.2.2 Algebraische Eigenschaften der Poisson-Klammer

- Antisymmetrie (oder Antikommutativität)

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} &= -\{g, f\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} \\ \text{insbesondere : } \{f, f\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} &= 0 \end{aligned}$$

- Linearität

$$\left\{ c_1 f_1 + c_2 f_2, g \right\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = c_1 \left\{ f_1, g \right\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} + c_2 \left\{ f_2, g \right\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}$$

- Nullelement

$$\left\{ c, f \right\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = 0 \quad (\text{mit } c = \text{konst.})$$

- Produktregel

$$\left\{ f, gh \right\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = g \left\{ f, h \right\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} + h \left\{ f, g \right\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}$$

- Jacobi-Identität

$$\left\{ f, \left\{ g, h \right\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} \right\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} + \left\{ g, \left\{ h, f \right\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} \right\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} + \left\{ h, \left\{ f, g \right\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} \right\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = 0$$

Die Eigenschaften beweist man unmittelbar durch Einsetzen der Definition. Eleganterer Nachweis der Jacobi-Identität: [10], Kap. 2.4.3

6.2.3 Wichtigkeit der Poisson-Klammer

Beispiel: Eindimensionaler Oszillator

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 x^2$$

$$\begin{aligned} \text{BWGl:} \quad \dot{x} &= \left\{ x, H \right\}_{x,p} = \left\{ x, \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 x^2 \right\}_{x,p} \\ &= \frac{1}{2m} \left\{ x, p^2 \right\}_{x,p} + \frac{m}{2} \omega^2 \left\{ x, x^2 \right\}_{x,p} \\ &= \frac{p}{m} \left\{ x, p \right\}_{x,p} + m\omega^2 \left\{ x, x \right\}_{x,p} \\ &= \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= \left\{ p, H \right\}_{x,p} = \frac{1}{2m} \left\{ p, p^2 \right\}_{x,p} + \frac{m}{2} \omega^2 \left\{ p, x^2 \right\}_{x,p} \\ &= m\omega^2 x \left\{ p, x \right\}_{x,p} \\ &= -m\omega^2 x \end{aligned}$$

$$\iff \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Die bekannte BWGl wurde gewonnen, ohne die Definition der Poisson-Klammer zu verwenden. Lediglich die algebraischen Eigenschaften und die fundamentalen Poisson-Klammern wurden benutzt.

Das führt auf die folgende Idee:

- Betrachte andere Objekte als Grundgrößen, z.B. lineare Operatoren
- Definiere für sie Klammersymbole durch die abstrakten Eigenschaften der Poisson-Klammern
- Fordere Gültigkeit der BWGl und der fundamentalen Poisson-Klammern

cum grano salis
 \implies Quantenmechanik

$\hat{=}$ andere Realisierung derselben mathematischen Struktur

KM: Poisson-Klammern $\hat{=}$ QM: "Kommutatoren"

Literatur: [10] II, Kap. 2.4.5

6.3 Erweiterungen

(zum Selbststudium)

6.3.1 Phasenraum und Satz von Liouville

Phasenraumportraits: [11], Kap. 5.4.3

Statistische Mechanik + Satz von Liouville: [7], Kap. 20; [1], Kap. 8.3 - 8.5

6.3.2 Kanonische Transformationen

◁ "Phasentransformationen"

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= Q_\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) & \alpha &= 1, \dots, n \\ P_\alpha &= P_\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) & \alpha &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

Hamilton-Gleichungen i.a. nicht forminvariant!

Man muss gewisse Bedingungen an die Phasentransformationen knüpfen, um Forminvarianz der Hamilton-Gleichungen sicherzustellen. Die entsprechend eingeschränkten Transformationen nennt man kanonische Transformationen. Man findet: eine Transformation ist genau dann kanonisch, wenn die fundamentalen Poisson-Klammern gelten:

$$\begin{aligned} \left\{ Q_\alpha, Q_\beta \right\}_{q,p} &= \left\{ P_\alpha, P_\beta \right\}_{q,p} = 0 \\ \left\{ Q_\alpha, P_\beta \right\}_{q,p} &= \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Literatur: [7], Kap. 18 + 19; [6] II, Kap. 15.4; [10] II, Kap. 2.5

6.3.3 Hamilton-Jacobi-Theorie

⇒ Übergang zur Quanten-(Wellen-)Mechanik

Literatur: [7], Kap. 21 + 22; [10] II, Kap. 3; [4], Kap. 9

Anhang A

Ergänzungen

A.1 Einführung der δ -Funktion

(Distribution: Beschreibung singulärer phys. Objekte in der Mathematik)

Definition:

(i)

$$\delta(x - a) = 0 \quad x \neq a$$

(ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Daraus folgt:

$$\delta(x - a) \longrightarrow \infty \quad x = a$$

Faltungssatz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a)$$

insb. :
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

Diese Eigenschaften bleiben ohne Beweis. Es genügt in diesem Fall, sich die δ -Funktion als einen 'Automaten' vorzustellen, der den Funktionswert an der Stelle Null (bzw. a) ausgibt, wenn man die Funktion eingibt.

A.2 Details zu den Euler-Winkeln

Details zu den Eulerwinkeln und den Lagrange-Gleichungen für die Rotation eines starren Körpers (siehe [11], Kap. 6.3.5 + 6.3.6)

Eine beliebige Rotation um einen festen Punkt kann als Hintereinanderausführung von drei Rotationen um die sogenannten Eulerwinkel (α, β, γ) aufgefasst werden.

Raumfeste Koordinaten	$\xrightarrow{\alpha}$	(x'_1, x'_2, x'_3)	$\xrightarrow{\beta}$	(x''_1, x''_2, x''_3)	$\xrightarrow{\gamma}$	Körperfeste Koordinaten
(x, y, z)						(x_1, x_2, x_3)

$$\mathbf{r}_{KF} = \underline{\underline{D}}_{\gamma} \underline{\underline{D}}_{\beta} \underline{\underline{D}}_{\alpha} \mathbf{r}_{RF} = \underline{\underline{D}} \mathbf{r}_{RF}$$

Jede dieser Rotationen wird durch eine Drehmatrix ausgedrückt. Das Produkt der Drehmatrizen (beachte Reihenfolge!) charakterisiert die Gesamtdrehung.

Drehung 1: Drehe raumfestes System um α (im Gegenurzeigersinn) um z -Achse:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (\mathbf{r}' = \underline{\underline{D}}_{\alpha} \mathbf{r}_{RF})$$

Drehung 2: Drehe das neue System (S') um β (im Gegenurzeigersinn) um x'_1 -Achse:

$$\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{r}'' = \underline{\underline{D}}_{\beta} \mathbf{r}')$$

Drehung 3: Drehe das neue System (S'') um γ (im Gegenurzeigersinn) um x''_3 -Achse:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{r}_{KF} = \underline{\underline{D}}_{\gamma} \mathbf{r}'')$$

Multiplikation der Matrizen:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}} &= \underline{\underline{D}}_{\gamma} \underline{\underline{D}}_{\beta} \underline{\underline{D}}_{\alpha} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \sin \gamma \\ -\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma & -\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma & \sin \beta \cos \gamma \\ \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da sich die Gesamtdrehung aus den drei Einzeldrehungen zusammensetzt, ist der Drehvektor $\boldsymbol{\omega}$ (der die Lage des KF-Systems zum RF-System beschreibt) die Summe der drei zugehörigen Drehvektoren:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\alpha + \boldsymbol{\omega}_\beta + \boldsymbol{\omega}_\gamma$$

Gesucht sind die KF-Zerlegungen dieser Vektoren.

- (i) $\boldsymbol{\omega}_\alpha$ zeigt im RF-System in z -Richtung (siehe Drehung 1). Ein Vektor im RF-System wird auf das KF-System umgerechnet durch Anwendung von $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}_\gamma \underline{\underline{D}}_\beta \underline{\underline{D}}_\alpha$:

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \boldsymbol{\omega}_\alpha \Big|_{KF} &= \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\underline{\underline{D}}}_{\parallel} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \sin \beta \sin \gamma \\ \dot{\alpha} \sin \beta \cos \gamma \\ \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix} \\ & \underline{\underline{D}}_\gamma \underline{\underline{D}}_\beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \quad (\text{denn bei der 1. Drehung} \\ & \hspace{10em} \text{ändert sich die Kompo-} \\ & \hspace{10em} \text{nentenzerlegung von } \boldsymbol{\omega}_\alpha \\ & \hspace{10em} \text{natürlich nicht}) \end{aligned}$$

- (ii) $\boldsymbol{\omega}_\beta$ zeigt im S' (und S'')-System in Richtung der Knotenlinie ($x'_1 = x''_1$). Der Übergang ins KF-System wird durch $\underline{\underline{D}}_\gamma$ vermittelt:

$$\boldsymbol{\omega}_\beta \Big|_{KF} = \begin{pmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}}_\gamma \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\beta} \cos \gamma \\ -\dot{\beta} \sin \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (iii) $\boldsymbol{\omega}_\gamma$ zeigt im S'' - und im KF-System in Richtung von $x''_3 = x_3$:

$$\boldsymbol{\omega}_\gamma \Big|_{KF} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \\ \dot{\gamma}_3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}}_\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}$$

Zusammensetzung: ($\omega_k = \dot{\alpha}_k + \dot{\beta}_k + \dot{\gamma}_k$)

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\alpha} \sin \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma \\ \omega_2 &= \dot{\alpha} \sin \beta \cos \gamma - \dot{\beta} \sin \gamma \\ \omega_3 &= \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \end{aligned}$$

Im HA-System gilt

$$\begin{aligned}
 T_{rot} &= \frac{1}{2} \sum_k \Theta_k \omega_k^2 \\
 &= \frac{1}{2} (\Theta_1 \omega_1^2 + \Theta_2 \omega_2^2 + \Theta_3 \omega_3^2) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \Theta_1 (\dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma + \dot{\beta}^2 \cos^2 \gamma + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \sin \gamma \cos \gamma) \right. \\
 &\quad + \Theta_2 (\dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta \cos^2 \gamma + \dot{\beta}^2 \sin^2 \gamma - 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \sin \gamma \cos \gamma) \\
 &\quad \left. + \Theta_3 (\dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta + \dot{\gamma}^2 + 2\dot{\alpha}\dot{\gamma} \cos \beta) \right\} \\
 &= T_{rot}(\beta\gamma, \dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma})
 \end{aligned}$$

Lagrange-Gleichungen für

$$\begin{aligned}
 L_{rot} &= T_{rot} - U = T_{rot}(\beta\gamma, \dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}) - U(\alpha\beta\gamma) \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{rot}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T_{rot}}{\partial q_k} &= - \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad \begin{pmatrix} q_1 = \alpha \\ q_2 = \beta \\ q_3 = \gamma \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Andeutung der expliziten Auswertung

$$\underline{q_3 = \gamma} :$$

- $\frac{\partial T_{rot}}{\partial \dot{\gamma}} = \Theta_3 (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta) \quad \hookrightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{rot}}{\partial \dot{\gamma}} = \Theta_3 (\ddot{\alpha} \cos \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta + \ddot{\gamma})$
- $\frac{\partial T_{rot}}{\partial \gamma} = \Theta_1 (\dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta \sin \gamma \cos \gamma - \dot{\beta}^2 \sin \gamma \cos \gamma + \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos^2 \gamma - \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \sin^2 \gamma)$
 $+ \Theta_2 (-\dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta \sin \gamma \cos \gamma + \dot{\beta}^2 \sin \gamma \cos \gamma - \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos^2 \gamma + \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \sin^2 \gamma)$

\hookrightarrow Lg-Gl.:

$$\begin{aligned}
 &\Theta_3 (\ddot{\alpha} \cos \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta + \ddot{\gamma}) \\
 &- (\Theta_1 - \Theta_2) \left\{ (\dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta - \dot{\beta}^2) \sin \gamma \cos \gamma \right. \\
 &\quad \left. + \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \right\} = - \frac{\partial U}{\partial \gamma}
 \end{aligned}$$

Behauptung:

$$\text{Lg - Gl.} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\Theta_3 \dot{\omega}_3 - (\Theta_1 - \Theta_2) \omega_1 \omega_2 = -\frac{\partial U}{\partial \gamma}}$$

zu zeigen ist lediglich

$$\begin{aligned} \omega_1 \omega_2 &= (\dot{\alpha} \sin \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma) (\dot{\alpha} \sin \beta \cos \gamma - \dot{\beta} \sin \gamma) \\ &= \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta \sin \gamma \cos \gamma + \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos^2 \gamma \\ &\quad - \dot{\beta}^2 \sin \gamma \cos \gamma - \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \sin^2 \gamma \\ &= (\dot{\alpha}^2 \sin \beta - \dot{\beta}^2) \sin \gamma \cos \gamma + \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \end{aligned}$$

Entsprechende (länglichere) Rechnungen für $q_1 = \alpha$ und $q_2 = \beta$ führen auf:

$q_1 = \alpha$:

$$\begin{aligned} &\ddot{\alpha} \left\{ (\Theta_1 \sin^2 \gamma + \Theta_2 \cos^2 \gamma) \sin^2 \beta + \Theta_3 \cos^2 \beta \right\} \\ &\quad + 2\dot{\alpha} \dot{\beta} (\Theta_1 \sin^2 \gamma + \Theta_2 \cos^2 \gamma - \Theta_3) \sin \beta \cos \beta \\ + 2\dot{\alpha} \dot{\beta} (\Theta_1 - \Theta_2) \sin^2 \beta \sin \gamma \cos \gamma &+ \ddot{\beta} (\Theta_1 - \Theta_2) \sin \beta \sin \gamma \cos \gamma \\ &\quad + \dot{\beta}^2 (\Theta_1 - \Theta_2) \cos \beta \sin \gamma \cos \gamma \\ + \dot{\beta} \dot{\gamma} \left\{ (\Theta_1 - \Theta_2) (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) - \Theta_3 \right\} \sin \beta &+ \ddot{\gamma} \Theta_3 \cos \beta = -\frac{\partial U}{\partial \alpha} \end{aligned}$$

$q_2 = \beta$:

$$\begin{aligned} &\ddot{\alpha} (\Theta_1 - \Theta_2) \sin \beta \sin \gamma \cos \gamma \\ &\quad + \dot{\alpha}^2 (\Theta_3 - \Theta_1 \sin^2 \gamma - \Theta_2 \cos^2 \gamma) \sin \beta \cos \beta \\ &\quad + \dot{\alpha} \dot{\gamma} \left\{ \Theta_3 + (\Theta_1 - \Theta_2) (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \right\} \sin \beta \\ + \ddot{\beta} (\Theta_1 \cos^2 \gamma + \Theta_2 \sin^2 \gamma) - 2\dot{\beta} \dot{\gamma} (\Theta_1 - \Theta_2) \sin \gamma \cos \gamma &= -\frac{\partial U}{\partial \beta} \end{aligned}$$

Linearkombinationen der drei BWGl führen auf

$$\begin{aligned} \Theta_1 \dot{\omega}_1 - (\Theta_2 - \Theta_3) \omega_2 \omega_3 &= \frac{1}{\sin \beta} \left(-\sin \gamma \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \sin \beta \cos \gamma \frac{\partial U}{\partial \beta} + \cos \beta \sin \gamma \frac{\partial U}{\partial \gamma} \right) \\ &\equiv M_1 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \Theta_2 \dot{\omega}_2 - (\Theta_3 - \Theta_1) \omega_3 \omega_1 &= \frac{1}{\sin \beta} \left(-\cos \gamma \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \sin \beta \sin \gamma \frac{\partial U}{\partial \beta} + \cos \beta \cos \gamma \frac{\partial U}{\partial \gamma} \right) \\ &\equiv M_2 \end{aligned}$$

Zusammenfassung (mit $M_3 = -\frac{\partial U}{\partial \gamma}$):

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1 \dot{\omega}_1 - (\Theta_2 - \Theta_3) \omega_2 \omega_3 &= M_1 \\ \Theta_2 \dot{\omega}_2 - (\Theta_3 - \Theta_1) \omega_3 \omega_1 &= M_2 \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3 - (\Theta_1 - \Theta_2) \omega_1 \omega_2 &= M_3 \end{aligned} \right\} \text{Euler Gleichungen}$$

$$\text{bzw. } \sum_k \epsilon_{ijk} (\Theta_k \dot{\omega}_k - M_k) - (\Theta_i - \Theta_j) \omega_i \omega_j = 0$$

$$\text{mit } \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (ijk) \text{ zyklisch} \\ -1 & (ijk) \text{ antizyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

A.3 Details zur Lösung der BWGs gekoppelter Oszillatoren

Ausgangspunkt: Homogenes Gleichungssystem (*) (siehe Kapitel 5.4.2 c))

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\nu} \left(W_{\mu\nu} - \Omega_{\lambda}^2 T_{\mu\nu} \right) U_{\nu\lambda} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} \sum_{\nu} W_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} = \Omega_{\lambda}^2 \sum_{\nu} T_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} \quad | \cdot \sum_{\mu} U_{\mu\lambda'} \\ \sum_{\nu} W_{\mu\nu} U_{\nu\lambda'} = \Omega_{\lambda'}^2 \sum_{\nu} T_{\mu\nu} U_{\nu\lambda'} \quad | \cdot \sum_{\mu} U_{\mu\lambda} \end{array} \right] \ominus \\
 \Rightarrow & \sum_{\mu\nu} \left(U_{\mu\lambda'} W_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} - U_{\mu\lambda} W_{\mu\nu} U_{\nu\lambda'} \right) \\
 & = \sum_{\mu\nu} \left(\Omega_{\lambda}^2 U_{\mu\lambda'} T_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} - \Omega_{\lambda'}^2 U_{\mu\lambda} T_{\mu\nu} U_{\nu\lambda'} \right)
 \end{aligned}$$

Zur Weiterverarbeitung benutze Symmetrie der Matrizen \underline{T} , \underline{W} und vertausche Summationsindices auf geeignete Weise.

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \text{RS} &= \Omega_{\lambda}^2 \sum_{\mu\nu} U_{\mu\lambda'} T_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} - \Omega_{\lambda'}^2 \sum_{\mu\nu} U_{\mu\lambda} T_{\nu\mu} U_{\nu\lambda'} \\
 &= \Omega_{\lambda}^2 \sum_{\mu\nu} U_{\mu\lambda'} T_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} - \Omega_{\lambda'}^2 \sum_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} T_{\mu\nu} U_{\mu\lambda'} \\
 &= \left(\Omega_{\lambda}^2 - \Omega_{\lambda'}^2 \right) \sum_{\mu\nu} U_{\lambda'\mu}^T T_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} \\
 \text{LS} &= \sum_{\mu\nu} U_{\mu\lambda'} W_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} - \sum_{\mu\nu} U_{\mu\lambda} W_{\nu\mu} U_{\nu\lambda'} \\
 &= \sum_{\mu\nu} U_{\mu\lambda'} W_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} - \sum_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} W_{\mu\nu} U_{\mu\lambda'} = 0
 \end{aligned}$$

Aus $\text{LS} = \text{RS} = 0$ folgt aufgrund der Voraussetzung $\Omega_{\lambda}^2 \neq \Omega_{\lambda'}^2$:

$$\sum_{\mu\nu} U_{\lambda'\mu}^T T_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} = 0 \quad \text{für } \lambda' \neq \lambda$$

Für $\lambda' = \lambda$ folgt aus $T = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} T_{\mu\nu} \dot{q}_{\mu} \dot{q}_{\nu} > 0$:

$$\sum_{\mu\nu} U_{\lambda\mu}^T T_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} > 0$$

Wähle Normierung :

$$\sum_{\mu\nu} U_{\lambda\mu}^T T_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} = 1$$

$$\xrightarrow{\text{insg.}} \sum_{\mu\nu} U_{\lambda'\mu}^T T_{\mu\nu} U_{\nu\lambda} = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (\underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{T}} \underline{\underline{U}} = 1)$$

Dann folgt aus $(\underline{\underline{W}} - \underline{\underline{\Omega}}^2 \underline{\underline{T}}) \underline{\underline{U}} = 0$:

$$\underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{\Omega}}^2 \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{T}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{\Omega}}^2$$

\implies $\underline{\underline{T}}$ und $\underline{\underline{W}}$ werden simultan von $\underline{\underline{U}}$ diagonalisiert.

A.4 Näheres zum dreiatomigen Molekül

1) Auswertung der Säkulargleichung

$$\begin{aligned} \rightarrow \det(\dots) &= \left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right) \left\{ \left(\frac{2k}{M} - \Omega^2\right) \left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right) - \frac{k^2}{mM} \right\} \\ &\quad - \frac{k}{\sqrt{mM}} \left(\frac{k}{\sqrt{mM}} \left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right)\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right) &\left\{ \left(\frac{2k}{M} - \Omega^2\right) \left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right) - \frac{2k^2}{mM} \right\} = 0 \\ \Leftrightarrow \Omega_2^2 &= \frac{k}{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sowie } \frac{2k^2}{mM} - \Omega^2 \left(\frac{k}{m} + \frac{2k}{M}\right) + \Omega^4 - \frac{2k^2}{mM} &= 0 \\ \Leftrightarrow \Omega^2 \left(\Omega^2 - \frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)\right) & \\ \Rightarrow \Omega_1^2 = 0 & \\ \Omega_3^2 = \frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right) & \end{aligned}$$

2) Bestimmung der Transformations-Matrix

$$\triangleleft \begin{pmatrix} \frac{k}{m} - \Omega_\lambda^2 & -\frac{k}{\sqrt{mM}} & 0 \\ -\frac{k}{\sqrt{mM}} & \frac{2k}{M} - \Omega_\lambda^2 & -\frac{k}{\sqrt{mM}} \\ 0 & -\frac{k}{\sqrt{mM}} & \frac{k}{m} - \Omega_\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1\lambda} \\ U_{2\lambda} \\ U_{3\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einsetzen der Eigenfrequenzen:

$\Omega_1 = 0$:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{k}{m} U_{11} - \frac{k}{\sqrt{mM}} U_{21} = 0 \\ -\frac{k}{\sqrt{mM}} U_{11} + \frac{2k}{M} U_{21} - \frac{k}{\sqrt{mM}} U_{31} = 0 \\ -\frac{k}{\sqrt{mM}} U_{21} + \frac{k}{m} U_{31} = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \underline{U}_1 = \alpha \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m}{M}} \\ 1 \\ \sqrt{\frac{m}{M}} \end{pmatrix}$$

$\Omega_2^2 = \frac{k}{m}$:

$$\left| \begin{array}{l} -\frac{k}{\sqrt{mM}} U_{22} = 0 \\ -\frac{k}{\sqrt{mM}} U_{12} + k \left(\frac{2}{M} - \frac{1}{m}\right) U_{22} - \frac{k}{\sqrt{mM}} U_{32} = 0 \\ -\frac{k}{\sqrt{mM}} U_{22} = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \underline{U}_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_3^2 = \frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right) :$$

$$\left| \begin{array}{l} -\frac{2k}{M}U_{13} - \frac{k}{\sqrt{mM}}U_{23} = 0 \\ -\frac{k}{\sqrt{mM}}U_{13} - \frac{k}{m}U_{23} - \frac{k}{\sqrt{mM}}U_{33} = 0 \\ -\frac{k}{\sqrt{mM}}U_{22} - \frac{2k}{m}U_{33} = 0 \end{array} \right| \implies \underline{U}_3 = \gamma \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{m}} \\ 1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{m}} \end{pmatrix}$$

$$\implies \underline{U} = \begin{pmatrix} \alpha\sqrt{\frac{m}{M}} & \beta & -\frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{M}{m}} \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \alpha\sqrt{\frac{m}{M}} & -\beta & -\frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{M}{m}} \end{pmatrix}$$

$$\underline{U}^T = \begin{pmatrix} \alpha\sqrt{\frac{m}{M}} & \alpha & \alpha\sqrt{\frac{m}{M}} \\ \beta & 0 & -\beta \\ -\frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{M}{m}} & \gamma & -\frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{M}{m}} \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \underline{U}^T \underline{U} = \begin{pmatrix} \alpha^2 \frac{m}{M} + \alpha^2 + \alpha^2 \frac{m}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma^2}{4} \frac{M}{m} + \gamma^2 + \frac{\gamma^2}{4} \frac{M}{m} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{Normierung} \\ \implies \end{array} \alpha^2 \left(1 + \frac{2m}{M}\right) = 1 \iff \alpha = \sqrt{\frac{M}{M+2m}}$$

$$2\beta^2 = 1 \iff \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\gamma^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{M}{m}\right) = 1 \iff \gamma = \sqrt{\frac{2m}{M+2m}}$$

$$\implies \underline{U} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m}{M+2m}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{M}{2(M+2m)}} \\ \sqrt{\frac{M}{M+2m}} & 0 & \sqrt{\frac{2m}{M+2m}} \\ \sqrt{\frac{m}{M+2m}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{M}{2(M+2m)}} \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung:

$$\hookrightarrow q_1(t) = \frac{1}{\sqrt{M+2m}} Q_1(t) + \frac{1}{\sqrt{2m}} Q_2(t) - \sqrt{\frac{M}{2m(M+2m)}} Q_3(t)$$

$$q_2(t) = \frac{1}{\sqrt{M+2m}} Q_1(t) + \sqrt{\frac{2m}{M(M+2m)}} Q_3(t)$$

$$q_3(t) = \frac{1}{\sqrt{M+2m}} Q_1(t) - \frac{1}{\sqrt{2m}} Q_2(t) - \sqrt{\frac{M}{2m(M+2m)}} Q_3(t)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } Q_1(t) &= A_1 t + B_1 \\ Q_2(t) &= A_2 \cos(\Omega_2 t + \delta_2) \\ Q_3(t) &= A_3 \cos(\Omega_3 t + \delta_3) \end{aligned}$$

3) Anfangsbedingungen zum Herausschälen der Normalschwingungen

$$\begin{aligned} \text{Fall (i) : } \quad q_1(0) &= q_2(0) = q_3(0) = 0 \\ \dot{q}_1(0) &= \dot{q}_2(0) = \dot{q}_3(0) = v_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies q_1(t) &= q_2(t) = q_3(t) = v_0 t \\ &\quad \text{(Translation)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fall (ii) : } \quad q_1(0) &= A = -q_3(0), \quad q_2(0) = 0 \\ \dot{q}_1(0) &= \dot{q}_2(0) = \dot{q}_3(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies q_1(t) &= A \cos \Omega_2 t = -q_3(t) \\ q_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fall (iii) : } \quad q_1(0) &= q_3(0) = -A, \quad q_2(0) = \frac{2m}{M} A \\ \dot{q}_1(0) &= \dot{q}_2(0) = \dot{q}_3(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies q_1(t) &= -A \cos \Omega_3 t = q_3(t) \\ q_2(t) &= \frac{2m}{M} A \cos \Omega_3 t \end{aligned}$$

Anhang B

Symbolverzeichnis

1 Abkürzungen

1.1 Lateinisch

a	Beschleunigung
A	Fläche, Arbeit
C	Integrationskonstante
e, exp	Exponentialfunktion, Eulerzahl
E	Energie
f	innere Kräfte
F	Kraft
g	Gravitationsbeschleunigung in der Nähe der Erdoberfläche
h	Höhe
l	Drehimpuls eines MP
L	Drehimpuls eines Teilchensystems, Lagrange
m, M	Masse
P	Leistung
q	generalisierte Koordinate
r, R	Radius, Weg
\Re	Reelle Zahlen
s	Abstand
S	Wirkung
t	Zeit
T	kinetische Energie
U	potentielle Energie
v	Geschwindigkeit
V	Potential (aufgrund innerer Kräfte)
x, y	Abstand, Entfernung

1.2 Griechisch

γ	Gravitationskonste
δ	Delta Funktion
Δ	Differenz, Laplace Operator
∇	Nabla Operator
ω	Winkelgeschwindigkeit

2 Indizes

\odot	Sonne
0	Ursprung, Beginn
1, 2	Ort, Zeitpunkt
i, k	Laufvariablen
diss	dissipativ
eff	effektiv
ext	extern
E	Erde
grav	gravitativ
hom	homogen
kin	kinetisch
p, part	partikulär
Q	generalisierte Kraft, generalisierte Koordinate
rad	radial
rel	relativ
rot	rotatorisch
SP	Schwerpunkt
trans	translatorisch
zent	zentral

Anhang C

Wichtige Fundamental Konstanten

$$\begin{array}{lcl} \gamma & \approx & 6,6726 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \\ g & \approx & 9,81 \frac{m}{s^2} \\ M_E & \approx & 5,97 \cdot 10^{24} kg \\ R_E & \approx & 6,378 \cdot 10^6 m \end{array}$$

Literaturverzeichnis

- [1] BLÖCHL, P.: *Theoretische Physik I: Klassische Mechanik*. Internetadresse: <http://www.pt.tu-clausthal.de/atp/education.shtml>.
- [2] FLIESSBACH, T.: *Mechanik*. Spektrum.
- [3] FORSTER, O.: *Analysis I*.
- [4] GOLDSTEIN, H.: *Klassische Mechanik*. Aula, Wiesbaden.
- [5] GREINER, W.: *Theoretische Physik 1+2*. H. Deutsch, Frankfurt.
- [6] JELITTO, R.: *Theoretische Physik 1+2*. Aula, Wiesbaden.
- [7] KUYPERS, F.: *Klassische Mechanik*. Wiley-VCH.
- [8] LÜCKE, W.: *Mathematische Methoden der Physik*. Internetadresse: <http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/etp.html>.
- [9] LINHARD, F.: *Klassische Mechanik*. Fischer, Frankfurt, 2002.
- [10] NOLTING, W.: *Grundkurs Theoretische Physik I+II*. Springer.
- [11] R. M. DREIZLER und C. S. LÜDDE: *Theoretische Physik 1*. Springer.
- [12] SCHECK, F.: *Theoretische Physik 1*. Springer.
- [13] SOMMERFELD, A.: *Vorlesungen über Theoretische Physik 1: Mechanik*.