Übungsblatt 0

Anwesenheitsübung: 02.11.2005
3 Aufgaben, 0 Punkte

Aufgabe 1

0 P

Kreisbewegung in verschiedenen Basissystemen

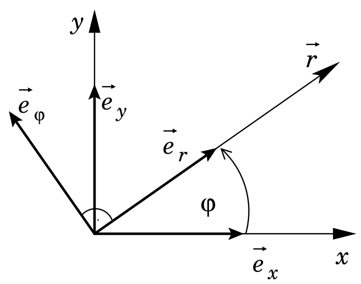

Abbildung 1: Polarkoordinaten

In kartesischen Koordinaten wird die Bewegung eines Massenpunkts auf einer Kreisbahn durch den Ortsvektor

$$\begin{aligned}\vec{r} &= R\cos\omega t \cdot \vec{e}_x + R\sin\omega t \cdot \vec{e}_y \\ &= \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

beschrieben. R ist der Radius des Kreises und ω die Winkelgeschwindigkeit oder Kreisfrequenz.

In ebenen Polarkoordinaten kann der Vektor viel einfacher als

$$\vec{r} = R \cdot \vec{e}_r(t) = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Es ist jedoch zu beachten, dass die Basis $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ dieses Koordinatensystems mit der Kreisfrequenz ω des Massenpunktes mitrotiert.

1.a) Stelle die Einheitsvektoren der Polardarstellung $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$ in kartesischen Koordinaten dar.

1.b) Berechne ihre Ableitung nach der Zeit t.

1.c) Wie lautet der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ in beiden Darstellungen?

1.d) Wie groß ist jeweils sein Betrag $v = |\vec{v}|$?

1.e) Zeige das die Kreisbewegung den Flächensatz (s. Lücke, Kap 3.4) erfüllt.

1.f) Berechne mit dem Flächesatz die von der Bahnkurve eingeschlossene Fläche.

1.g) Wie lautet der Beschleunigungsvektor $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ in beiden Darstellungen?

1.h) Wie groß ist jeweils sein Betrag $a = |\vec{a}|$?

Aufgabe 2

0 P

Gradient, Rotation und Divergenz

2.a) Berechne den Gradienten des skalaren Feldes $F(x, y, z) = F_o(x^2 + y^2 + z^2)$ in kartesischen Koordinaten und in Kugelkoordinaten.

2.b) Berechne Rotation und Divergenz des Vektorfeldes

$$\vec{A} = A_o \begin{pmatrix} \frac{-x}{r^2+a^2} \\ \frac{-y}{r^2+a^2} \\ \frac{-z}{r^2+a^2} \end{pmatrix} \text{ mit } r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ und } A_o, a \in \mathbf{R}$$

2.c) Versuche ein Skalarfeld Φ zu finden, für das $\vec{\nabla}\Phi = \vec{A}$ gilt.

Aufgabe 3

0 P

Taylorreihenentwicklung

Entwickle die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

bis zur zweiten Ordnung nach Taylor.

Anmerkungen:

Gradient, Divergenz und Rotation werden in der theoretischen Physik gerne mit Hilfe des Nabla-Operators $\vec{\nabla}$ notiert:

Gradient einer skalaren Funktion $f(\vec{r})$	$\vec{\nabla} f(\vec{r})$	(Produkt mit Skalar)
Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})$	(Skalarprodukt)
Rotation eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$	$\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$	(Kreuzprodukt)

Wie die Ableitung nach einem freien Parameter hat der Nabla-Operator in verschiedenen Basissystemen im algemeinen eine unterschiedliche Gestalt:

kartesische Koordinaten	$\vec{r} = (x, y, z)$	$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$
Zylinderkoordinaten	$\vec{r} = (r, \varphi, z)$	$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$
Kugelkoordinaten	$\vec{r} = (r, \vartheta, \varphi)$	$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{1}{r \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$

Zum Beispiel:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \quad = \quad \frac{\partial \vec{A}(\vec{r})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{A}(\vec{r})}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{A}(\vec{r})}{\partial z}$$

ist die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ in Zylinderkoordinaten