Übungsblatt 1

Vorrechnen & Diskussion: 09.11.2005
5 Aufgaben, 13 Punkte

Aufgabe 1

3 P

klassisches Wurfproblem

Ein Massenpunkt verlässt den Boden (Anfangspunkt: Ursprung) mit der Geschwindigkeit $|\vec{v}_0| = v_0$ unter dem Winkel $(\vec{e}_x \cdot \vec{v}_0/v_0) = \cos\alpha$. Es wirkt die Schwerkraft mit $g = 9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Reibungseffekte sind vernachlässigbar.

1.a) Welcher Wurfwinkel ist bei vorgegebener Geschwindigkeit notwendig, damit der Massenpunkt eine vorgegebene Stelle $\vec{r}_e = (x_e, 0, 0)$ erreicht?

1.b) Wieviel Zeit benötigt er dafür?

1.c) Was ist die maximale Höhe dieser Flugbahn und zu welchem Zeitpunkt wird sie erreicht?

1.d) Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Massenpunkt den Zielpunkt?

1.e) Was ist die maximale Entfernung $x_{e,\max}$, die bei vorgegebenem v_0 möglich ist?

1.f) Unter welchem Wurfwinkel wird diese Entfernung erreicht?

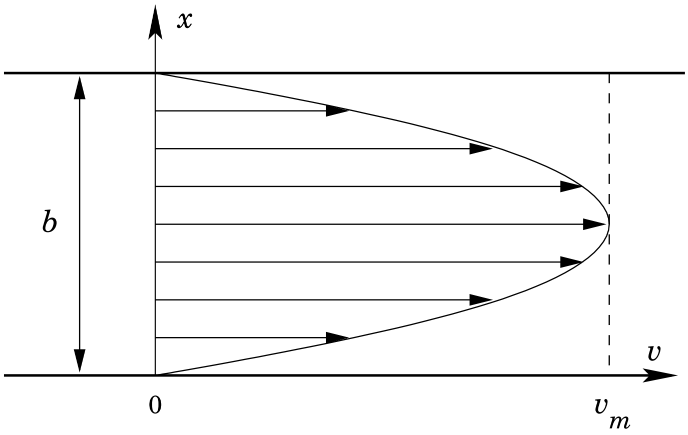

Abbildung 1: Strömungsprofil des Flusses

Aufgabe 2

3 P

Flussüberquerung

Ein Boot überquert mit der konstanten Geschwindigkeit v_b einen Fluss der Breite b sekrecht zu dessen Strömungsrichtung. Die Strömung hat einen parabolischen Verlauf: in der Mitte ist die Strömungsgeschwindigkeit v mit $v(b/2) = v_\mathrm{m}$ am größten und an beiden Ufern ist $v = 0$.

2.a) Gib das Geschwindigkeitsprofil des Flusses an.

2.b) Welche Bahnkurve beschreibt das Boot?

2.c) Wo liegt der Landepunkt?

2.d) Wie lange dauert die Überfahrt?

Nun fährt das Boot nicht mehr senkrecht zur Strömungsrichtung, sondern in einem Winkel α gegen die Stömung. (Wenn $\alpha = \pi/2$ ist, fährt das Boot direkt gegen die Strömung)

2.e) In welche (konstante) Richtung α muss das Boot steuern, damit der Landepunkt auf gleicher Höhe mit dem Startpunkt ist? (Start- und Landepunkt liegen auf einer Senkrechten zur Strömungsrichtung)

2.f) Welche Bahnkurve beschreibt das Boot jetzt?

2.g) Wie lange dauert die Überfahrt?

Aufgabe 3

2 P

Bahnkurve

Ein Punkt durchläuft von $t_a = 0$ bis $t_e = 1$ eine Kurve die durch den Ortsvektor

$$\vec{r}(t) \quad = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t \cdot R \sin\pi t \\ \sin\omega t \cdot R \sin\pi t \\ \cos\pi t \end{pmatrix}$$

beschrieben werden kann

3.a) Beschreibe die Kurve, die der Ortsvektor durchläuft. Welche Rolle spielen R und ω?

3.b) Berechne die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Punktes zum Zeitpunkt t.

Aufgabe 4

3 P

Transformation zwischen Bezugssystemen

Ein sich bewegender Massenpunkt wird in einem Inertialsystem S und ein anderes Bezugsystem S' betrachtet. Dieses bewege sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_{\mathrm{rel}}(t)$ von S weg. Die Koordinaten werden so gewählt, dass $\vec{v}_{\mathrm{rel}}(t)$ in beiden Bezugssystemen nur eine x-Komponente hat. Die Zeit verläuft in beiden Bezugssystemen gleich schnell ($t' = t$). Zur Zeit $t = t' = 0$ haben sich die Ursprünge in einem Punkt gekreuzt. Im Inertialsystem S genügt der Massenpunkt der (NEWTONschen) Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} \quad = \quad \vec{F} \tag{1}$$

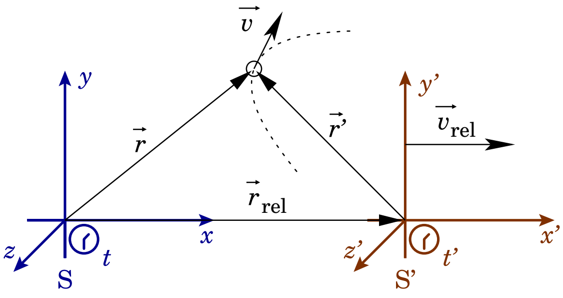

Abbildung 2: Darstellung der Bahnkurve eines Massenpunktes in zwei, sich von einander entfernenden Koordinatensystemen S und S'

4.a) Stelle die Transformation $T(\vec{v}_{\rm rel}(t)) : \vec{r} \mapsto \vec{r'}$ auf.

4.b) Wie lautet die Bewegungsgleichung des Massenpunktes aus der Sicht von S' wenn $\vec{v}_{\rm rel}(t) = \vec{a}t$ mit konstantem $\vec{a}$ ist?

4.c) Wie muss $\vec{v}_{\rm rel}(t)$ gewählt werden, damit die Bewegungsgleichung (1) unter der Transformation $T(\vec{v}_{\rm rel}(t)) : \vec{r} \mapsto \vec{r'}$ invariant bleibt.

4.d) Die GALILEItransformation $G(\vec{r}_{\rm rel}, \vec{v}_{\rm rel}) : \vec{r} \mapsto \vec{r'}$ ist definiert durch[1]:

$$G(\vec{r}_{\rm rel}, \vec{v}_{\rm rel}) \circ \vec{r}(t) \quad = \quad \vec{r}(t) - \vec{r}_{\rm rel} - \vec{v}_{\rm rel} t \qquad \vec{r}_{\rm rel}, \vec{v}_{\rm rel} = \mathrm{const}$$

Zeige diese GALILEItransformationen eine ABELsche Gruppe bilden.

4.e) Anwendung der Galilieitransformationen:

Ein Physiker fährt in einem Zug, der relativ zur Erde mit konster Geschwindigkeit fährt. Am Bahndamm sieht er

(a) einen Jungen (reibungsfrei) einen Ball werfen (senkrecht oder schräg)

(b) jemanden ein Federpendel betrachten

(c) einen stehendes oder rollendes Rad

Überlege qualitativ welche Bahnkurven der Physiker sieht.

Aufgabe 5

2 P

Tiefe eines Brunnens

Um die Tiefe eines Brunnens zu bestimmen läßt man einen Stein in diesen fallen und mist die Zeit t bis zum Aufschlag. Das Schwerefeld g kann als homogen angenommen werden. Es wird ein ausreichend schwerer und aerodynamischer Stein gewählt, so dass Reibungseffekte mit Luft vernachlässigt werden können. Die Zeit, die der Schall (Geschwindigkeit c) des Aufschlags braucht bis er den Rand des Brunnens erreicht, ist jedoch signifikant.

5.a) Berechne die Tiefe des Brunnens

5.b) In realistischen Fällen ist $c \gg 2gt$. Gib die ersten drei Terme einer Reihenentwicklung an.

5.c) Bei einem Brunnen auf der Erde ($g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$, $c = 330\,\mathrm{m/s}$) wird eine Fallzeit von $4.0\,\mathrm{s}$ gemessen. Welche Tiefe wird nach 1.-3. Ordnung und exakt ermittelt?

[1] Die vollständige Gallileitransformation enthält noch eine konstante Drehung der Bezugsysteme untereinander und einen Zeitoffset. Allerdings werden die Bezugssysteme meist so gewählt, dass diese verschwinden.