Übungsblatt 10

Vorrechnen & Diskussion: 25.01.2005
3 Aufgaben, 8 Punkte

Aufgabe 1

3 P

Das Keplerproblem nach Newton

In der NEWTON'schen Formulierung der Mechanik werden zwei (isotrop) wechselwirkende Massenpunkte durch die gekoppelten Differntialgleichungen

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\vec{r}}_1 &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot f_{21}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 &= -(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot f_{21}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \end{aligned}$$

dargestellt. Ist die Gravitation für die Wechsewirkung verantwortlich, so ist

$$f_{21} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

1.a) Transformiere die (gekoppelten) Bewegungsgleichungen auf Schwerpunkts- und Relativkoordinaten.

1.b) Löse die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt

1.c) Bei der Relativbewegung gilt Drehimpulserhaltung ($L =$const.). Das bedeutet, dass die Bewegung der beiden Körper in einer Ebene stattfindet. Wähle also geeignete ebene Polarkoordinaten, zur Formulierung der Gleichung der Relativbewegung.

1.d) Löse die Bewegungsgleichung für die Winkelkoordinate und setze sie in die Radialgleichung ein.

1.e) Zeige, dass NEWTONS Bewegungsgleichungen der Gravitation beim Übergang von kartesischen nach Polarkoordinaten nicht forminvariant sind.

Aufgabe 2

3 P

Inverses Keplerproblem

Beim inversen KEPLERproblem geht es darum aus einem gegebenem Orbit $r(\varphi)$ die wirkenden Kräfte bzw. das Potential zu finden. Eigentlich könnte man zur gegebenen Bahn $r(\varphi)$ beliebig viele Kraftfelder $\vec{F}(\vec{r})$ finden, die ein Körper auf dieser Bahn halten könnte. Erst wenn man weiß, dass es sich um ein Zentralkraftproblem handelt, kann man die Größe $f(r) = \frac{dV}{dr}$ und damit das Kraftgesetz eindeutig aus der Bahnbewegung herleiten. (Die Form von $f(r)$ und andere Hinweise erhält man durch Lösen von Aufgabe 1.c) .)

2.a) Beweise

$$-\frac{dV}{dr} = f(r) = \frac{p_\varphi^2}{mr^4}\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\right)$$

2.b) Ein Körper bewegt sich auf einem elliptischen Orbit $r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ in einem Zentralkraftfeld, wobei das Zentrum in einem Brennpunkt liegt. Zeige dass $f(r) \sim r^{-2}$ gilt.

2.c) In einem anderen Zentrafkraftfeld bewegt sich ein Körper auf der Bahn $r(\varphi) = r_0 e^{-\varphi}$. Zeige dass das Kraftfeld mit r^{-3} abnimmt.

Aufgabe 3

2 P

Drittes Kepler'sches Gesetz

Beweise, dass bei Planetenbewegungen näherungsweise das 3. Keplergesetz

$$T^2 \sim a^3$$

(Qudrate der Umlaufzeiten sind proportional zur dritten Potenz der großen Halbachse) gilt. Untersuche den Proporitonalitätsfaktor für unser Sonnensystem.