Übungsblatt 12

Vorrechnen & Diskussion: 08.02.2005
3 Aufgaben, 9 Punkte

Aufgabe 1

3 P

Kreuzprodukt und Levi-Civita-Symbol

In dieser Aufgabe soll das Kreuzprodukt und einige Verknüpfungen mit diesem in Indexschreibweise dargestellt werden. Dabei wird das LEVI-CIVITA-Symbol verwendet:

$$\epsilon_{ijk...} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j,k,...) \text{ eine zyklische Permutation von } (1,2,3,...) \text{ ist} \\ -1 & \text{falls } (i,j,k,...) \text{ eine antizyklische Permutation von } (1,2,3,...) \text{ ist} \\ 0 & \text{falls mindestens zwei Indizies gleich sind} \end{cases}$$

Eine Eigenschaft des LEVI-CIVITA-Symbols ist

$$\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \qquad (1)$$

wobei δ_{ij} das KRONECKERdelta ist mit

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

1.a) Stelle die x_i-Komponente des Kreuzpoduktes in Indexschreibweise dar. Ergebnis:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i$$

1.b) Beweise die Relation

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) - \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$$

und stelle sie in Indexschreibweise dar. Notiere den Sonderfall $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2$

1.c) Beweise die Relation

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$$

und stelle sie in Indexschreibweise dar. Notiere den Sonderfall $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{c})$.

Aufgabe 2

3 P

Trägheitsmomente

Berechne die Trägheitstensoren für Drehungen um den Schwerpunkt für folgende homogene Körper in geeigneten körperfesten Koordinatensystemen.

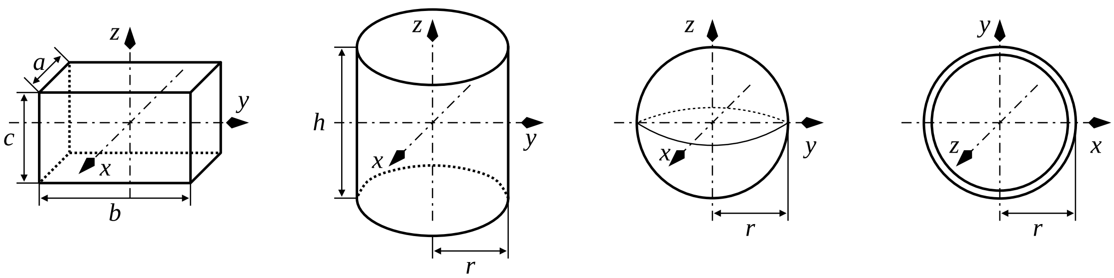

Abbildung 1: Starre Körper mit ihren Hauptträgheitsachsen x,y und z

2.a) Quader mit den Seitenlängen a, b und c

2.b) Zylinder mit der Höhe h und dem Radius r

2.c) Kugel mit dem Radius r

2.d) dünner Reifen mit dem Radius r

Aufgabe 3

3 P

Satz von Steiner

Ein Trägheitstensor $\mathbf{\Theta}$ ist bezüglich eines körperfesten Bezugsystem $S: (x_1, x_2, x_3)$ mit dem Ursprung im Schwerpunkt gegeben. Mit Hilfe des Satzes von STEINER kann man daraus den Trägheitstensor $\mathbf{\Theta}'$ bezüglich eines um $\vec{a}$ verschobenen Bezugssystems $S': (x_1', x_2', x_3')$ berechnen. (Die beiden Koordinatensysteme sind nich ineinander verdreht)

3.a) Beweise den Satz von STEINER:

$$\Theta_{ij}' = \Theta_{ij} + m\left(\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3} a_k^2 - a_i a_j\right)$$

3.b) Berechne $\mathbf{\Theta}$ für einen homogenen Würfel der Kantenlänge s bezüglich eines Bezugsystems in einer Ecke des Würfels. Verwende dazu den in Aufgabe 2.a) berechneten Trägheitstensor und den Satz von STEINER.

3.c) Finde die Hauptträgheitsmomente von $\mathbf{\Theta}$ des Würfels (an der Ecke aufgehängt) durch Diagonalisieren.

Hinweis: Die Diagonalisierung von $\mathbf{\Theta}$ ist elementar aber umfangreich. Es wird empfolen das Problem numerisch zu lösen.