

## Übungsblatt 3

Vorrechnen & Diskussion: 23.11.2005  
3 Aufgaben, 9 Punkte

### Aufgabe 1

2 P

#### Tunnel durch die Erde

Um sich vom Clausthaler Wetter abzulenken, denkt sich ein Physiker einen geraden Tunnel von Clausthal durch die Erde bis zur Insel Taveuni. (Diese Insel bietet – neben schönen Stränden, warmen Temperaturen, sehens- und forschungswerten Vulkanen – das Phänomen, dass man sich mit einem Schritt von heute nach morgen und zurück bewegen kann.) In diesem Tunnel befindet sich eine Kapsel der Masse  $m$ , die sich im Tunnel (reibungsfrei) bewegen kann. Um dem Wetter zu entfliehen, setzt sich der Physiker einfach in die Kapsel und lässt sie fallen. Der Einfachheit halber kann die Dichte  $\rho$  der Erde als konstant angenommen werden.

- 1.a) Berechne die Potentielle Energie der Kapsel, in Abhängigkeit von  $x$  bezüglich eines günstigen Punktes.
- 1.b) Stelle den Energiesatz auf. Bestimme mit seiner Hilfe Ort und Geschwindigkeit der Kapsel in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ .
- 1.c) Berechne die Zeit, die die Kapsel ( $m = 438 \text{ kg}$ ) von Clausthal nach Taveuni braucht. Clausthal liegt bei  $51^\circ 48' 00'' \text{ N}$  und  $10^\circ 20' 00'' \text{ O}$ . Der Tunnelausgang auf Taveuni liegt bei  $16^\circ 49' 00'' \text{ S}$  und  $179^\circ 58' 00'' \text{ W}$ . Die Masse der Erde  $M = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  und ihr Radius  $R = 6370 \text{ km}$ . Die Gravitationskonstante  $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^2}{\text{kg s}^2}$ .

## Aufgabe 2

4 P

### Raketenproblem

Eine Rakete, die unbeladen die Masse  $m_R$  hat, wird mit  $m_T$  Treibstoff beladen (Startmasse  $m_S = m_R + m_T$ ). Nach dem Start stößt sie konstant die Gasmenge  $\mu$  pro Zeiteinheit aus, bis ihr der Treibstoff ausgeht. Die Treibgase haben, von der Rakete aus gesehen, die (konstante) Durchschnittsgeschwindigkeit  $\vec{v}_T$  gegen die Flugrichtung. Reibung kann vernachlässigt werden.

- 2.a) Stelle die Bewegungsgleichung der gestarteten Rakete im Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{r})$  auf.
- 2.b) Betrachte eine Rakete im kräftefreien Raum. Bestimme die Geschwindigkeit der Rakete als Funktion der Zeit relativ zu Startplatz ( $t = 0$ ,  $\vec{r} = \vec{0}$ ,  $\vec{v}_R = \vec{0}$ , aufgefüllte Rakete)
- 2.c) Nach welcher Zeit  $t_B$  (Brenndauer) ist der Treibstoffvorrat verbraucht? Welche Geschwindigkeit und welche Energie hat die Rakete nach dem Ende der Brenndauer?
- 2.d) Wann wird die kinetische Energie der Rakete maximal? Welches Verhältnis müssen  $m_R$ ,  $m_T$ ,  $\mu$  und  $\vec{v}_T$  zueinander haben, damit dieses Maximum überhaupt erreicht wird? Welche Geschwindigkeit, Masse und kinetische Energie hat die Rakete zu diesem Zeitpunkt?
- 2.e) Betrachte eine (Sylvester-)Rakete, im Schwerfeld  $\vec{G}$  der Erde. Die Steighöhe  $h_s$  (Höhe, die nach der Brenndauer  $t_B$  erreicht wird) sei klein genug um  $\vec{G} = -mg\vec{e}_z$  annehmen zu können. Stelle die Bewegungsgleichung auf. Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit die Rakete überhaupt abhebt?
- 2.f) Berechne die Steighöhe  $h_s$  der Rakete. Welche Geschwindigkeit hat die Rakete dann?

## Aufgabe 3

3 P

### Reibung

In dieser Aufgabe sollen zwei unterschiedliche Modelle für Reibung zwischen einem Festkörper und einem Fluid untersucht werden. Die beiden

wichtigsten Modelle sind die STOKESreibung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{\text{ext}} - \beta\dot{\vec{r}}$$

und die NEWTONreibung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{\text{ext}} - \gamma|\dot{\vec{r}}|\dot{\vec{r}}$$

Dabei ist  $\vec{F}_{\text{ext}}$  die Summe aller 'externen' Kräfte, die auf den Körper wirken.  $\beta$  und  $\gamma$  sind Reibungskoeffizienten, die im wesentlichen von der Form des Körpers und der Viskosität des Fluids abhängen.

- 3.a) Bestimme die Geschwindigkeit  $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$  bei beiden Modellen am Beispiel der Bewegung eines Körpers ohne externe Kräfte, der relativ zum Medium eine Anfangsgeschwindigkeit  $\vec{v}_0$  hat. Wann kommt der Körper zum Stillstand? Welche Strecke legt der Körper in der Zeit  $t$  zurück? Welche Strecke kann er maximal zurücklegen?

Das STOKES'sche Modell wird zur Beschreibung von laminarer Strömung verwendet, während turbulente Strömung nach NEWTON beschrieben wird. Zur Charakterisierung der Strömung wird gerne die REYNOLD'sche Zahl  $Re = vL/\nu$  verwendet.  $L$  ist dabei die charakteristische Länge eines Körpers (z.B.  $2R$  bei einer Kugel) und  $\nu$  die kinematische Viskosität des Mediums (z.B.  $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$  für Luft). Ist die  $Re \lesssim 10^3$ , so geht man von laminarer Strömung aus, bei  $Re \gtrsim 10^4$  verwendet man NEWTONS Modell. Diese Werte hängen von der Geometrie des Körpers ab und müssen experimentell bestimmt werden. Des weiteren gibt es eine Übergangsform zwischen den beiden Grenzen.

- 3.b) Ein Körper bewegt sich zur Zeit  $t = 0$  mit einer Geschwindigkeit  $v_0$  durch ein Medium.  $v_0$  ist ausreichend hoch um eine turbulente Strömung der Flüssigkeit um den Körper zu verursachen. Auf den Körper wirken keine Kräfte. Berechne Ort und Geschwindigkeit des Körpers. Nimm an, dass die Strömung des Körpers schlagartig laminar wird, wenn seine REYNOLDSzahl einen kritischen Wert  $Re_k$  unterschreitet.
- 3.c) Bestimme die Geschwindigkeit  $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$  bei beiden Modellen am Beispiel des freien Falls ( $\vec{F}_{\text{ext}} = -mg\vec{e}_z$ ) eines Körpers aus der Ruhe ( $\vec{v}_0 = \vec{0}$ ). Betrachte den Grenzfall  $t \rightarrow \infty$ .