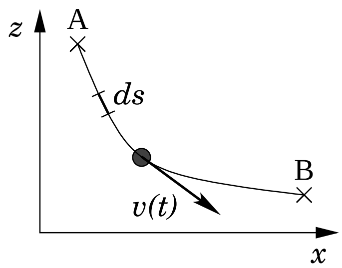
Übungsblatt 6

Vorrechnen & Diskussion: 14.12.2005
3 Aufgaben, 9 Punkte

Aufgabe 1

3 P

Das Brachystochronenproblem



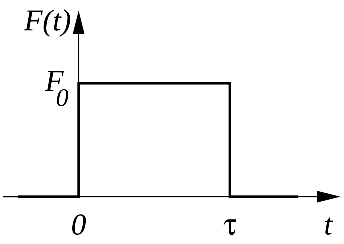
Gegeben sind zwei Punkte in der x-z-Ebene, die durch einen (fiktiven) Draht verbunden werden. Durch die Schwerkaft $g\vec{e}_z$ gleitet eine Perle auf dem Draht reibungsfrei vom höher gelegenen Punkt A zum tieferen Punkt B (Bei Punkt A hat sie eine vernachlässigbar kleine Geschwindigkeit). Bei welcher Form des Drahtes ($\hat{=}$Bahnkurve der Perle) ist die Zeit, die die Perle von A nach B Braucht minimal? Löse diese Aufgabe mit Hilfe der Variationsrechnung.

Hinweise: Mit der Substitution $z = \mathcal{Z} - \frac{1}{4gC^2}(1 - \cos\alpha)$ lässt sich das auftretende Integral einfacher lösen. Dabei ist $\mathcal{Z}$ geeignet zu wählen und α ist der freie Parameter. C ist ein Integrationsparameter, den man anhand der Anfangsbedingungen (x_A, z_A) und (x_B, z_B) bestimmen könnte. Diese Rechnung ist jedoch etwas langatmig und wird nicht verlangt.
Die Bahnkurve braucht nicht explizit angegeben werden (Parameterdarstellung in Abh. von α reicht).

Aufgabe 2

3 P

Inhomogener Oszillator



In der letzten Übungsstunde wurde die Lösung inhomogener Differentialgleichungen mittels GREENscher Funktionen in einem Refrat vorgestellt. In dieser Aufgabe soll diese tolle Verfahren ausprobiert werden: Ein gedämpfter harmonischer Oszillator wird für eine Zeit τ mit einer konstanten Kraft F_0 angetrieben. Vor dieser Anregung befand sich der Oszillator in Ruhe.

Oszillatorgleichung:

$$m\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x \quad = \quad F_0 \cdot (\theta(t) - \theta(t-\tau))$$

HEAVISIDEsche Sprungfunktion:

$$\theta(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{t} \delta(t')\, dt' \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

GREENS Funktion für den gedämpften harmonischen Oszillator im Schwing- und Kriechfall:

$$G(t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

sowie im aperiodischen Grenzfall:

$$G(t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{t}{m} e^{\lambda t} & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

mit

$$\lambda_{1/2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2} \qquad \qquad \lambda = -b$$

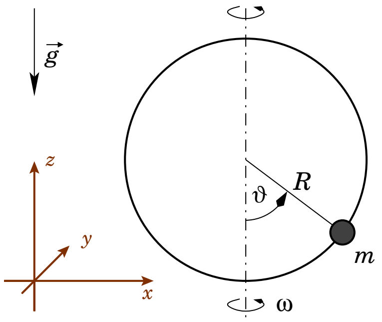
2.a) Berechne $x(t)$ für alle Fälle.

2.b) Diskutiere $x(t)$ für die Zeitintervalle $t < 0$, $0 \leq t \leq \tau$ und $t > \tau$.

Aufgabe 3

3 P

Perle am rotierenden Ring



Eine Perle der Masse m kann reibungslos auf einem Ring mit dem Radius R gleiten. Nun soll die Bewegung der Perle im Schwerefeld $\vec{g}$ untersucht werden, wenn sich der Ring um eine Drehachse parallel zu $\vec{g}$ dreht. Die Drehachse soll oben und unten durch den Ring gehen.

3.a) Formuliere die Zwangsbedingungen.

3.b) Wie lautet die LAGRANGEsche Bewegungsgleichung

3.c) Integriere die Bewegungsgleichung für kleine ϑ.