

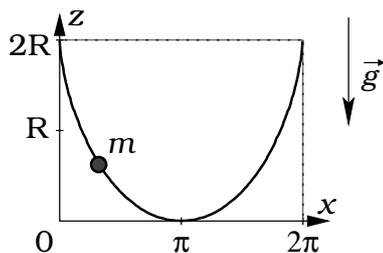
Übungsblatt 7

Vorrechnen & Diskussion: 21.12.2005
4 Aufgaben, 11 Punkte

Aufgabe 1

3 P

Zykloidenpendel



Eine Perle gleitet unter Einfluss der Schwerkraft $g\vec{e}_z$ reibungsfrei auf einem Draht. Dieser ist als Zykloide geformt, d.h. die Bahn der Perle genügt den Gleichungen

$$\begin{aligned}x &= R(\alpha - \sin \alpha) \\z &= R(1 + \cos \alpha) \quad \text{mit } 0 \leq \alpha \leq 2\pi\end{aligned}$$

- 1.a) Stelle die LAGRANGEfunktion auf.
- 1.b) Bestimme \ddot{u} für $u = \sin \frac{\varphi(t)}{2}$
- 1.c) Bestimme die Bewegungsgleichung der Perle.
- 1.d) Löse die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen $z(0) = z_0$ und $\dot{\alpha}(0) = 0$
- 1.e) Berechne die Dauer einer Periode T in Abhängigkeit von der Auslenkung z_0 .

Werkzeug:

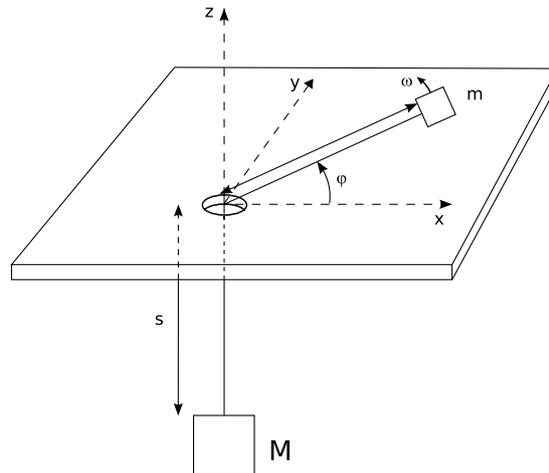
$$(1 + \cos \varphi) = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \quad \sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$\sin(\arccos x) = -x + \frac{\pi}{2} \quad \text{für } -1 \leq x \leq 1$$

Aufgabe 2

3 P

Kraft einer rotierenden Masse



Eine Masse m rotiert reibungslos auf einer Tischplatte. Über einen Faden der Länge l ($l = r + s$), der durch ein Loch in der Platte verläuft, ist m mit einer anderen Masse M verbunden. Es ist die Bewegung von m und M unter Einfluß der Schwerkraft $g\vec{e}_z$ zu untersuchen.

- 2.a) Formuliere und klassifiziere die Zwangsbedingungen.
- 2.b) Stelle die LAGRANGEfunktion auf und leite die Bewegungsgleichung her.
- 2.c) Unter welchen Bedingungen rutscht die Masse M nach oben, wann nach unten?
- 2.d) Diskutiere den Spezialfall $\omega = 0$.

Aufgabe 3

2 P

Zwangsbedingungen

- 3.a) Zeige dass die differentiellen Zwangsbedingungen für das in der Ebene rollende Rad nicht-holonom sind.

- 3.b) Überprüfe die Integrabilitätsbedingung für die Zwangsbedingung einer uniform rotierenden (schiefen) Ebene. Die Rotationsachse liegt in der Ebene.

Aufgabe 4

3 P

Krummlinige Koordinatensysteme

Viele Probleme in der Physik lassen sich durch die Wahl geeigneter krummliniger Koordinaten wesentlich vereinfachen. Heufig sind Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten geeignet, da viele physikalische Probleme zylinder- oder kugelsymmetrisch sind. In dieser Aufgabe soll die Bewegung eines Massenpunktes in diesen Darstellungen bestimmt werden. Die dadurch gewonnen Erkenntnisse können sicher bei einigen anderen Problemen zu gebrauchen sein.

4.a) Zylinderkoordinaten:

- (a) Stelle den Ort eines Massenpunktes in Zylinderkoordinaten (Einheitsvektoren) dar.
- (b) Berechne die Ableitung der Einheitsvektoren allgemein.
- (c) Berechne Geschwindigkeit und kinetische Energie eines beliebig beschleunigten Massenpunktes.
- (d) Berechne Geschwindigkeit und kinetische Energie eines Massenpunktes, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t)$ und der Geschwindigkeit \dot{z} auf einem Zylindermantel bewegt.

4.b) Kugelkoordinaten:

- (a) Stelle den Ort eines Massenpunktes in Kugelkoordinaten (Einheitsvektoren) dar.
- (b) Berechne die Ableitung der Einheitsvektoren allgemein.
- (c) Berechne Geschwindigkeit und kinetische Energie eines beliebig beschleunigten Massenpunktes.
- (d) Berechne Geschwindigkeit und kinetische Energie eines Massenpunktes, der sich mit den Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}(t)$ und $\dot{\vartheta}$ auf einer Kugeloberfläche bewegt.