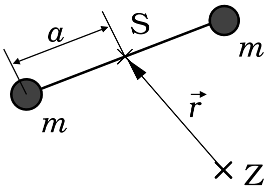
Übungsblatt 8

Vorrechnen & Diskussion: 11.01.2006
3 Aufgaben, 12 Punkte

Aufgabe 1

4 P

Hantel II



Zwei gleich schwere Massen m sind durch eine (massenlose) Stange der Länge $2a$ miteinenander verbunden. Diese Hantel befindet sich in einem Gravitationspotential $U = -\gamma \frac{m}{r}$ mit dem Zentrum in Z. r Um die Rechnung zu vereinfachen, kann davon ausgegangen werden, dass sich die beiden Massenpunkte nur in einer Ebene, in der auch Z und der Schwerpunkt liegen, bewegen können.

1.a) Formuliere die Zwangsbedingungen und führe geeignete Koordinaten ein.

1.b) Stelle die LAGRANGEfunktion auf und leite die Bewegungsgleichungen her.

1.c) Definiere Eigen-, Bahn- und Gesamtdrehimpuls. Welche dieser Größen sind konstant und warum?

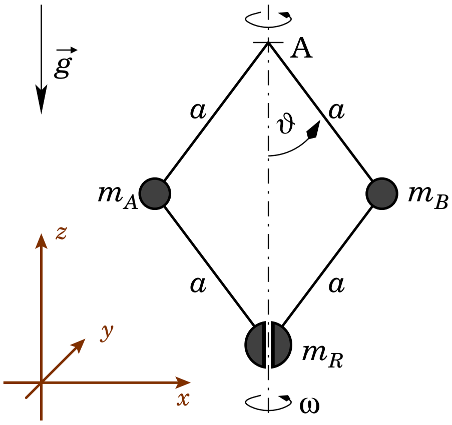
1.d) Entwickle die LAGRANGEgleichungen nach Potenzen von a/r bis zur 2. Ordnung.

1.e) Zeige, dass für $a/r \ll 1$ die Bahnbewegung von der Eigendrehbewegung (näherungsweise) entkoppelt.

Aufgabe 2

4 P

Fliekraftregler



Ein Fliehkraftregler ist ein mechanisches Instrument, das in vielen technischen Anwendungen eingesetzt wurde (wird). Die Arbeitsweise beruht darauf, dass sich bei der Rotation von zwei Massen an gelenkig befestigten Stangen eine von der Rotationsgeschwindigkeit abhängige Gleichgewichtsposition einstellt. Mittels geeigneter Vorrichtungen, die auf diese Positionen ansprechen, kann man in Abhängigkeit von der Rotationsgeschwindigkeit die Arbeitsweise von Maschinen regulieren.

Zwei (gewichtslose, starre) Stangen der Länge a sind an einem vertikalen, uniform rotierenden Stab gelenkig befestigt. Sie liegen in einer Ebene. Am Ende jeder Stange sitzt eine Fliehmasse $m_A = m_B = m$. Gelenkig verbunden sind zwei weitere Stangen der Länge a, die an einem Reiter mit der Masse m_R befestigt sind. Der Reiter kann sich (reibungsfrei) entlang der Vertikalen ($\vec{e}_z$) bewegen. Alle drei Massen werden als punktförmig behandelt. Das ganze System dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Vertikale, die Massen sind der einfachen Gravitation $g\vec{e}_z$ ausgesetzt.

2.a) Zeige, dass das System nur einen Freiheitsgrad hat.

2.b) Welche generalisierten Koordinaten könnten geeignet sein?

2.c) Stelle die kartesischen Koordinaten der Massenpunkte und ihre Ableitungen in Abhängigkeit von ϑ auf.

2.d) Stelle die LAGRANGEfunktion mit ϑ und als generalisierte Koordinate auf.

2.e) Bestimme die Bewegungsgleichung des Fliehkraftreglers.

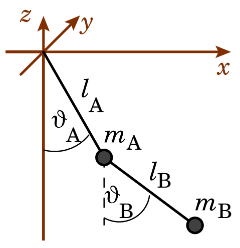
2.f) Bestimme die Gleichgewichtssituationen, die bei der uniformen Drehung auftreten können.

2.g) Untersuche die Bewegung des Fliehkraftreglers für kleine Auslenkungen $z_R = z_0 + \delta z$ aus dem Gleichgewicht z_0

Aufgabe 3

4 P

Doppelpendel



In diese Aufgabe ist ein Doppelpendel im Schwerefeld der Erde $g\vec{e}_z$ mit dem LAGRANGEformalismus zu untersuchen.

3.a) Formuliere und klassifiziere die Zwangsbedingungen. Wie viele Freiheitsgrade hat das System?

3.b) Wähle geeignete genaralisierten Koordinaten für das Doppelpendel.

3.c) Bestimme die LAGRANGEfunktion des Systems

3.d) Leite die Bewegungsgleichungen her.

3.e) Bestimme die Bewegungsgleichungen eines Doppelpendel mit gleichen Stangen $l_A = l_B = l$ und gleichen Massen $m_A = m_B = m$ für kleine Auslenkungen $\vartheta_A, \vartheta_B \ll 1$ und damit kleine Geschwindigkeiten $\dot{\vartheta}_A, \dot{\vartheta}_B$.

3.f) Löse die Bewegungsgleichungen mit dem Ansatz

$$\vartheta_A = \mathcal{C}_A e^{i\omega t} \qquad \vartheta_B = \mathcal{C}_B e^{i\omega t}$$

3.g) Bestimme die Abhängigkeit zwischen $\mathcal{C}_A$ und $\mathcal{C}_B$